

## ВЛИЯНИЕ НЕЛОКАЛЬНОСТИ ФЛУКТУАЦИЙ НА КОГЕРЕНТНЫЕ ЭФФЕКТЫ В МНОГОКРАТНОМ РАССЕЯНИИ

*В. Л. Кузьмин*

*Санкт-Петербургский торгово-экономический институт  
194021, Санкт-Петербург, Россия*

*В. П. Романов\**

*Санкт-Петербургский государственный университет  
198904, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 11 ноября 1997 г.

Уравнение Бете–Солпитера, описывающее перенос излучения в сильнонеоднородных средах с анизотропной индикатрисой рассеяния, решено с учетом вкладов полиномов Лежандра нулевого, первого и второго порядков. Получено аналитическое выражение для пропагатора переноса излучения. Показано, что с ростом среднего значения полинома Лежандра второго порядка область применимости диффузионного приближения сдвигается в сторону больших расстояний. В рамках развитого подхода рассчитана интенсивность когерентного обратного рассеяния и исследовано влияние высших моментов на ее угловую зависимость. Показана возможность экспериментального обнаружения пика когерентного обратного рассеяния в критической области.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы большое внимание уделяется теоретическому и экспериментальному исследованию интерференционных эффектов в многократном рассеянии света (см. обзоры [1–5]). Последовательно теория этих эффектов развита для системы точечных рассеивателей или для неоднородной среды, в которой пространственная дисперсия структурного фактора мала в сравнении с длиной волны падающего излучения. Однако подавляющее число экспериментов проводится для систем, в которых пространственные размеры неоднородностей сравнимы с длиной волны излучения или больше нее.

Учет конечных размеров рассеивателей обычно сводится к замене длины свободного пробега фотонов  $l$  на транспортную длину [6, 7]  $l^* = l/(1 - \overline{\cos\theta})$ , где  $\overline{\cos\theta}$  — средний косинус угла однократного рассеяния. При этом полагают, что результаты, полученные в рамках теории точечных рассеивателей, остаются справедливыми, но естественным масштабом становится параметр  $l^*$ , который может значительно превосходить  $l$ . Такой подход обосновывается с помощью диффузионного приближения теории переноса излучения [8, 9]. Он фактически соответствует учету анизотропии индикатрисы рассеяния путем разложения по полиномам Лежандра [10, 11] с сохранением членов нулевого и первого порядков.

---

\* E-mail: vadim.romanov@pobox.spbu.ru

Однако при сравнении теории с опытом такой подход используется и для больших рассеивателей, когда анизотропия индикатрисы рассеяния не мала. В этих случаях возникает естественная необходимость учитывать в индикатрисе более высокие члены разложения. В работах [12–15], посвященных изучению многократного рассеяния света в жидких кристаллах в рамках уравнения Бете–Солпитера, задача решалась численно без использования разложения по сферическим функциям для индикатрисы типа Орнштейна–Цернике. Рассчитывалась асимптотическая часть функции когерентности, или пропагатора переноса излучения. Численные результаты подтвердили справедливость диффузионного приближения на больших расстояниях. В работе [16] рассматривались сильноанизотропные индикатрисы вида  $(\cos \theta)^{-\alpha}$ , где  $\theta$  — угол рассеяния, для слоев толщиной  $L$  значительно меньшей транспортной длины,  $L \ll l^*$ . Это соответствует случаю, когда диффузионный режим не реализуется.

В настоящей работе, решая уравнение Бете–Солпитера, мы учитываем вклады полиномов Лежандра нулевого, первого и второго порядков. Учет членов второго и следующих порядков означает выход за рамки диффузионного приближения. Показано, что при этом основной диффузионный член пропагатора переноса излучения вида  $(1 - \overline{\cos \theta})r^{-1}$  не меняется, а учет члена второго порядка сказывается на виде более быстро убывающих с расстоянием  $r$  членов, которые сохраняют информацию об анизотропии дифференциального сечения однократного рассеяния. Эти быстро убывающие члены тем не менее могут быть существенными, когда рассеянное излучение формируется в слое толщиной порядка длины экстинкции, например при обратном рассеянии.

Полученные результаты используются для расчета угловой зависимости интенсивности когерентного обратного рассеяния. Показано, что учет члена второго порядка приводит к заметному вкладу в интенсивность. Проанализирована возможность наблюдения пика обратного рассеяния вблизи точек фазовых переходов второго рода. Проведен расчет интенсивности когерентного обратного рассеяния для индикатрисы Орнштейна–Цернике в критической области. Рассчитанная величина эффекта доступна для наблюдения в рамках современного эксперимента как по температуре, так и по углам рассеяния.

## 2. ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим распространение света в неоднородной среде, стохастические свойства которой описываются флуктуациями диэлектрической проницаемости  $\Delta \varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r}) - \varepsilon$ , где  $\varepsilon = \overline{\varepsilon(\mathbf{r})}$ . В такой среде волновое уравнение имеет вид

$$(\text{rot rot} - k^2)\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k_0^2 \Delta \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  — напряженность электрического поля в случайной среде,  $k = k_0 \sqrt{\varepsilon}$ ,  $k_0 = 2\pi/\lambda$  — волновое число,  $\lambda$  — длина волны.

Пренебрегая поляризационными эффектами, заменим волновое уравнение (2.1) на соответствующее скалярное, которое в интегральной форме имеет вид

$$E(\mathbf{r}) = \langle E(\mathbf{r}) \rangle + \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{r}_1 T(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \Delta \varepsilon(\mathbf{r}_1) E(\mathbf{r}_1), \quad (2.2)$$

где  $T(r) = k_0^2 \exp(ikr)/r$  — функция Грина скалярного волнового уравнения.

Определим интенсивность рассеяния на большом расстоянии  $r_0$  от среды как

$$I(\mathbf{r}) = \overline{\delta E(\mathbf{r})\delta E^*(\mathbf{r})} \equiv r_0^{-2} I(\mathbf{k}_s|\mathbf{k}_i),$$

где  $\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s$  — волновые векторы падающей и рассеянной волн,  $\delta E(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r}) - \overline{E(\mathbf{r})}$  — рассеянное поле. Функцию  $I(\mathbf{k}_s|\mathbf{k}_i)$  можно представить в виде [1–5]

$$I(\mathbf{k}_s|\mathbf{k}_i) = I_1(\mathbf{k}_s|\mathbf{k}_i) + I_M(\mathbf{k}_s|\mathbf{k}_i), \tag{2.3}$$

где  $I_1$  — интенсивность однократного рассеяния, которое в дальнейшем не обсуждается,  $I_M$  — суммарная интенсивность всех кратностей рассеяния начиная со второй.

В приближении слабого рассеяния,  $\lambda/l \ll 1$ , в ряд по кратностям рассеяния в главном порядке по параметру  $\lambda/l$  вносят вклад только лестничные диаграммы,  $I_M(\mathbf{k}_s|\mathbf{k}_i) = I_L(\mathbf{k}_s|\mathbf{k}_i)$ ,

$$I_L(\mathbf{k}_s|\mathbf{k}_i) = \int d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2 \exp(2 \operatorname{Im} \mathbf{k}_s \mathbf{R}_2 - 2 \operatorname{Im} \mathbf{k}_i \mathbf{R}_1) \Gamma(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1|\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) |E|^2, \tag{2.4}$$

где  $\operatorname{Im} \mathbf{k}$  — мнимая часть волнового вектора,  $2 \operatorname{Im} k = l^{-1}$ , функция  $\Gamma(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1|\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i)$  — пропагатор переноса излучения. Оба слагаемых в экспоненте (2.4) описывают затухание плоских волн в среде. Так, для среды, занимающей полупространство  $z \geq 0$ , экспоненциальный множитель принимает вид

$$\exp\left[\left(-\frac{z_2}{\cos \theta_s} - \frac{z_1}{\cos \theta_i}\right) \frac{1}{l}\right],$$

где  $\theta_i$  — угол падения,  $\theta_s$  — угол рассеяния, отсчитываемый от обратного направления; для такой геометрии  $\theta_i, \theta_s < \pi/2$ . Мы будем рассматривать непоглощающие среды, так что затухание излучения происходит только за счет рассеяния.

Ряд по кратностям рассеяния суммируется и приводит к уравнению Бете–Солпитера для пропагатора переноса излучения:

$$\Gamma(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1|\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) = k_0^8 \tilde{G}(-\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_{21}) \Lambda(\mathbf{R}_{21}) \tilde{G}(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_{12}) + k_0^4 \int d\mathbf{R}_3 \tilde{G}(\mathbf{k}_{23} - \mathbf{k}_s) \Lambda(\mathbf{R}_{23}) \Gamma(\mathbf{R}_3, \mathbf{R}_1|\mathbf{k}_{23}, \mathbf{k}_i). \tag{2.5}$$

Здесь  $\tilde{G}(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r} G(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r})$  — фурье-образ корреляционной функции флуктуаций диэлектрической проницаемости

$$G(\mathbf{r}) = (4\pi)^{-2} \overline{\Delta \varepsilon(0) \Delta \varepsilon(\mathbf{r})}, \tag{2.6}$$

$\Lambda(\mathbf{r}) = r^{-2} \exp(-r/l)$ ,  $\mathbf{k}_{ij} = k \mathbf{R}_{ij}/R_{ij}$  — волновой вектор рассеянной волны, распространяющейся между точками  $\mathbf{R}_i$  и  $\mathbf{R}_j$ ,  $\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j$ . Отметим, что запись уравнения Бете–Солпитера в форме (2.5) аналогична смешанному представлению Вигнера (см. [17]).

При ограничении лестничными диаграммами интерференционные эффекты выпадают из рассмотрения [3]. Они будут учтены в разд. 4.

## 3. УЧЕТ НЕЛОКАЛЬНОСТИ ФЛУКТУАЦИЙ

Корреляционная функция  $G(\mathbf{r})$  характеризуется радиусом корреляции  $r_c$ . В общем случае для произвольного значения  $kr_c$  решение уравнения (2.5) не представляется возможным даже для однородной безграничной среды. Однако в случае малой корреляционной длины, когда функцию  $G(\mathbf{r})$  можно заменить на  $\delta$ -функцию, что соответствует в пространстве волновых векторов изотропности индикатрисы однократного рассеяния,  $\bar{G}(\mathbf{q}) = \text{const}$ , уравнение Бете–Солпитера легко решается путем перехода к спектру Фурье по переменной  $\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$ . Именно этот случай обычно и рассматривается как исходное приближение при анализе когерентных и корреляционных эффектов в многократном рассеянии.

Для учета конечности корреляционной длины, т. е. зависимости  $\Gamma(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1 | \mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i)$  от ориентаций  $\mathbf{k}_s$  и  $\mathbf{k}_i$ , пропагатор переноса излучения раскладывают в ряд по полиномам Лежандра и ограничиваются членами нулевого и первого порядков. Однако для индикатрис с сильной анизотропией существенную роль могут играть и более высокие моменты  $\overline{\cos^n \theta}$ . Подход, основанный на разложении по сферическим функциям, широко применяется в рамках уравнения переноса излучения [11, 18]. В частности, в [11] это уравнение детально проанализировано при учете моментов первого и второго порядков.

Согласно (2.5), функция  $\Gamma(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1 | \mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i)$  в однородной системе зависит от относительного вектора  $\mathbf{R}_{21} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$  и взаимной ориентации векторов  $\mathbf{k}_i$ ,  $\mathbf{k}_s$  и  $\mathbf{R}_{21}$ . В общем случае эту зависимость можно представить в виде разложения по сферическим функциям

$$\Gamma(\mathbf{R} | \mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k,l,|m| \leq \min\{k,l\}} \gamma_{klm}(R) P_k^m(\cos \theta_s) P_l^m(\cos \theta_i) \exp [im(\phi_s - \phi_i)], \quad (3.1)$$

где  $P_k^m(\cos \theta)$  — присоединенный полином Лежандра,

$$\cos \theta_s = \frac{\mathbf{k}_s \mathbf{R}}{kR}, \quad \cos \theta_i = \frac{\mathbf{k}_i \mathbf{R}}{kR},$$

$\phi_s - \phi_i$  — угол между проекциями векторов  $\mathbf{k}_s$  и  $\mathbf{k}_i$  на плоскость ортогональную  $\mathbf{R}$ .

Для упрощения анализа мы проинтегрируем уравнение (2.5) по ориентациям вектора  $\mathbf{k}_i$ . При этом уравнение остается замкнутым, поскольку в левой и правой частях искомая функция зависит от одного и того же входящего вектора  $\mathbf{k}_i$ . Введя новую функцию  $\Gamma_0(\mathbf{R}_{21} | \mathbf{k}_s) = \int d\Omega_i \Gamma(\mathbf{R}_{21} | \mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i)$ , получим

$$\Gamma_0(\mathbf{R}_{21} | \mathbf{k}_s) = k_0^4 l^{-1} \bar{G}(-\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_{21}) \Lambda(\mathbf{R}_{21}) + k_0^4 \int d\mathbf{R}_3 \bar{G}(\mathbf{k}_{23} - \mathbf{k}_s) \Lambda(\mathbf{R}_{23}) \Gamma_0(\mathbf{R}_{31} | \mathbf{k}_{23}). \quad (3.2)$$

При выводе уравнения (3.2) используется оптическая теорема  $l^{-1} = k_0^4 \int d\Omega_s \bar{G}(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i)$ .

Несмотря на то, что при переходе к уравнению для  $\Gamma_0$  будет потерян вклад некоторых членов, оно позволяет точно рассчитать изотропную часть пропагатора переноса излучения за рамками диффузионного приближения. Учет ориентационной зависимости одновременно для обоих векторов мы проведем при вычислении когерентного обратного рассеяния.

Раскладывая функцию  $\Gamma_0(\mathbf{R}_{21}|\mathbf{k}_s)$  в ряд по полиномам Лежандра,

$$\Gamma_0(\mathbf{R}|\mathbf{k}) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(R) P_n \left( \frac{\mathbf{R}\mathbf{k}}{Rk} \right), \quad (3.3)$$

где  $\gamma_n(R) = \gamma_{n,0,0}(R) = \gamma_{0,n,0}(R)$ , и используя свойство ортогональности полиномов  $P_n(\cos \theta)$ , сводим уравнение (3.2) к системе уравнений относительно коэффициентов разложения (3.3):

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{(2n+1)} \gamma_n(R_{21}) = \overline{P_n} \left[ l^{-2} \Lambda(R_{21}) + \right. \\ \left. + l^{-1} \int d\mathbf{R}_3 P_n \left( \frac{\mathbf{R}_{23}\mathbf{R}_{21}}{R_{23}R_{21}} \right) \Lambda(R_{23}) \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m(R_{31}) P_m \left( \frac{\mathbf{R}_{31}\mathbf{k}_{23}}{R_{31}k} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь параметры  $\overline{P_n}$  определяются как среднее по индикатрисе однократного рассеяния:

$$\overline{P_n} = \frac{\int d\Omega_s \tilde{G}(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i) P_n((\mathbf{k}_s \mathbf{k}_i)/k^2)}{\int d\Omega_s \tilde{G}(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i)}. \quad (3.5)$$

Решим систему уравнений (3.4), ограничиваясь учетом первых трех членов разложения (3.3). Введем вместо функций  $\gamma_1(R_{21})$  и  $\gamma_2(R_{21})$  векторную  $\mathbf{g}_1(\mathbf{R}_{21}) = \gamma_1(R_{21})\mathbf{R}_{21}/R_{21}$  и тензорную

$$\hat{\mathbf{g}}_2(\mathbf{R}_{21}) = \gamma_2(R_{21}) \left( \frac{3\mathbf{R}_{21}\mathbf{R}_{21}}{R_{21}^2} - \hat{I} \right)$$

функции. Используя преобразование Фурье по пространственным переменным  $\mathbf{R}_{ij}$ , систему уравнений (3.4) запишем в виде

$$\begin{aligned} 4\pi \tilde{\gamma}_0(q) = l^{-2} \tilde{\Lambda}_0(q) + l^{-1} \left\{ \tilde{\Lambda}_0(q) \tilde{\gamma}_0(q) + \tilde{\Lambda}_1(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{g}}_1(\mathbf{q}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \left[ (3\hat{\Lambda}_2(\mathbf{q}) - \hat{I} \tilde{\Lambda}_0(q)) \hat{\mathbf{g}}_2(\mathbf{q}) \right] \right\}, \\ \frac{4\pi}{3P_1} \tilde{\mathbf{g}}_1(\mathbf{q}) = l^{-2} \tilde{\Lambda}_1(\mathbf{q}) + l^{-1} \left\{ \tilde{\Lambda}_1(\mathbf{q}) \tilde{\gamma}_0(q) + \hat{\Lambda}_2(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{g}}_1(\mathbf{q}) + \frac{1}{2} \hat{\Lambda}_3(\mathbf{q}) \hat{\mathbf{g}}_2(\mathbf{q}) \right\}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{5P_2} \hat{\mathbf{g}}_2(\mathbf{q}) = l^{-2} \left[ 3\hat{\Lambda}_2(\mathbf{q}) - \hat{I} \tilde{\Lambda}_0(q) \right] + l^{-1} \left\{ \left[ 3\hat{\Lambda}_2(\mathbf{q}) - \hat{I} \tilde{\Lambda}_0(q) \right] \tilde{\gamma}_0(q) + \right. \\ \left. + 3\hat{\Lambda}_3(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{g}}_1(\mathbf{q}) - \hat{I} \tilde{\Lambda}_1(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{g}}_1(\mathbf{q}) + \frac{3}{2} \hat{\Lambda}_4(\mathbf{q}) \hat{\mathbf{g}}_2(\mathbf{q}) - \frac{1}{2} \hat{I} \text{Sp} \left( \hat{\Lambda}_2(\mathbf{q}) \hat{\mathbf{g}}_2(\mathbf{q}) \right) \right\}, \end{aligned}$$

где тильда означает фурье-образ соответствующей функции. Функция

$$\hat{\Lambda}_n(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r} \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}\dots\mathbf{r}}{r^n} \Lambda(\mathbf{r}) \quad (3.7)$$

представляет собой тензор  $n$ -го ранга. Интегралы (3.7) легко вычисляются. В частности, получаем

$$\tilde{\Lambda}_0(q) = 4\pi l p_0,$$

$$\tilde{\Lambda}_1(\mathbf{q}) = -4\pi i \mathbf{q} l^2 p_1, \quad (3.8)$$

$$\tilde{\Lambda}_2(\mathbf{q}) = 4\pi l \left[ \frac{\mathbf{q}\mathbf{q}}{q^2} p_1 + \frac{1}{2}(p_0 - p_1) \left( \hat{I} - \frac{\mathbf{q}\mathbf{q}}{q^2} \right) \right],$$

где введены вспомогательные функции

$$p_0 = \frac{1}{w} \operatorname{arctg} w, \quad p_1 = \frac{1}{w^2}(1 - p_0), \quad p_2 = \frac{1}{w^2} \left( \frac{1}{3} - p_1 \right),$$

$w = ql$  — безразмерный аргумент.

В результате решение системы (3.6) записывается в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_0(q) &= \frac{1}{lw^2 p_1} (p_0 - 3p_1 \overline{\cos \theta}) + \frac{3p_2 - p_1}{2Al p_1}, \\ \tilde{\mathbf{g}}_1(\mathbf{q}) &= \frac{\mathbf{q}}{q} \tilde{\gamma}_1(q), \quad \tilde{\gamma}_1(q) = -\frac{3i \overline{\cos \theta}}{lw}, \\ \hat{\tilde{\mathbf{g}}}_2(\mathbf{q}) &= \left( \frac{3\mathbf{q}\mathbf{q}}{q^2} - \hat{I} \right) \tilde{\gamma}_2(q), \quad \tilde{\gamma}_2(q) = -\frac{1}{lA}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$A = \frac{p_1}{2(3p_2 - p_1)} \left[ \frac{4}{5\overline{P}_2} - 9p_2 + 6p_1 - p_0 - \frac{w^2}{p_1} (3p_2 - p_1)^2 \right]. \quad (3.10)$$

Формулы (3.9) определяют пропагатор  $\Gamma_0(\mathbf{R}|\mathbf{k})$  при описании индикатрисы рассеяния тремя полиномами Лежандра.

В когерентных эффектах многократного рассеяния существенную роль играет пропагатор переноса излучения на больших расстояниях, т.е. поведение его фурье-компонент при  $ql \leq 1$ . В этой области формула (3.9) для  $\tilde{\gamma}_0(q)$  дает

$$\tilde{\gamma}_0(q) \approx \frac{3}{l} \left[ \left( 1 - \overline{\cos \theta} \right) \frac{1}{w^2} + \frac{28}{27} \frac{1}{(35/9)(1/\overline{P}_2 - 1) + w^2} \right]. \quad (3.11)$$

Первый член в квадратных скобках соответствует известному выражению диффузионного приближения  $\tilde{\gamma}_0(q) \sim 3/(l^* w^2)$ . В рамках уравнения переноса излучения вид этого члена при отсутствии поглощения не изменяется и при учете  $\overline{P}_2$  [11]. Второе слагаемое в (3.11) обусловлено более детальным описанием переноса излучения в рамках уравнения Бете–Солпитера. При  $\overline{P}_2 \rightarrow 0$  это слагаемое обращается в нуль. С возрастанием  $\overline{P}_1 = \overline{\cos \theta}$  естественно ожидать, что для реальных систем среднее значение второго полинома Лежандра от угла рассеяния  $\overline{P}_2$  также будет возрастать. При этом существенно возрастает роль второго слагаемого.

Область применимости диффузионного приближения определяется из требования, чтобы первое слагаемое в квадратных скобках (3.11) вносило основной вклад, т.е.

$$\frac{27}{28} (1 - \overline{\cos \theta}) > \frac{q^2 l^2}{(35/9)(1/\overline{P}_2 - 1) + q^2 l^2}. \quad (3.12)$$

Область волновых векторов  $\mathbf{q}$ , для которых выполняется диффузионное приближение, как видно из (3.12), сужается по мере роста анизотропии индикатрисы рассеяния, когда  $\overline{\cos\theta}$  и  $\overline{P_2}$  возрастают.

Установим границы применимости подхода, основанного на учете конечного числа членов разложения по полиномам Лежандра в индикатрисе рассеяния. Это разложение с учетом (3.5) имеет вид

$$\frac{\tilde{G}(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i)}{\int \tilde{G}(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i) d\Omega} = \sum_0^{\infty} (2n+1) \overline{P_n} P_n(x), \quad (3.13)$$

где  $x = (\mathbf{k}_i \mathbf{k}_s) / k^2$ . Величина  $\tilde{G}(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i)$  описывает интенсивность рассеянного излучения в направлении  $\mathbf{k}_s$  и должна быть неотрицательной:  $\tilde{G}(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i) \geq 0$ . В частности, при ограничении полиномами второго порядка имеем

$$1 + 3\overline{P_1}x + 5\overline{P_2}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) \geq 0 \quad (3.14)$$

при значениях  $x$  в интервале  $-1 \leq x \leq 1$ .

Из формул (3.9)–(3.11) следует, что параметры  $\overline{P_n}$ , где  $n \geq 2$ , на вид диффузионной асимптотики не влияют, и поэтому для любого  $\cos\theta$  всегда можно указать область расстояний, для которых справедливо диффузионное приближение. Однако при расчете поправочных членов, содержащих информацию о высших моментах индикатрисы, ограничение вида (3.14), а также другие условия адекватности описания индикатрисы конечным числом моментов являются существенными.

#### 4. КОГЕРЕНТНОЕ ОБРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ

В качестве применения полученных результатов рассчитаем форму пика когерентного обратного рассеяния. Как известно, он обусловлен тем, что при углах рассеяния  $\theta_s \ll \lambda/l$ , отсчитываемых от обратного направления, наряду с (2.3), (2.4) в интенсивность рассеяния вносят вклад циклические диаграммы, которые в этом случае становятся того же порядка, что и лестничные. Впервые на существование таких интерференционных поправок к интенсивности обратного рассеяния света было указано в работах [19–23], а экспериментально они были впервые обнаружены в [6, 7].

Будем рассматривать случай нормального падения,  $\theta_i = 0$ . Вклад циклических диаграмм в рассеяние имеет вид [8, 9]

$$I_C(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) \propto \int d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2 \exp[-(z_1 + z_2)l^{-1} + ik_0\theta_s(x_1 - x_2)] \times \\ \times \left[ \Gamma(|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1| | \mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) - \Gamma(|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1^{(m)}| | \mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) \right], \quad (4.1)$$

где  $\mathbf{R}_1^{(m)} = (x_1, y_1, -z_1 - 2l_m)$  — зеркальный образ точки  $\mathbf{R}_1$  относительно плоскости  $z = -l_m$ . Параметр  $l_m$  выбирается обычно в виде [23]  $l_m = 0.71l^*$ . Формула (4.1) записана для случая рассеяния от полупространства  $z > 0$  для волны, рассеянной назад под углом  $\theta_s$  в плоскости  $(xz)$ .

Видно, что интенсивность рассеяния зависит от полной функции  $\Gamma(\mathbf{R}|\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i)$ . Поэтому необходимо дополнить анализ предыдущего раздела, включив в рассмотрение зависимость от ориентации обоих векторов  $\mathbf{k}_s$  и  $\mathbf{k}_i$ . Применяя к уравнению (2.5) операцию интегрирования в виде

$$\iint d\Omega_s d\Omega_i P_1(\cos \theta_s) P_1(\cos \theta_i),$$

для однородной среды получим с учетом разложения (3.1)

$$\frac{4\pi}{9} \gamma_{110}(R_{21}) = \frac{\overline{\cos^2 \theta} \Lambda(R_{21})}{l^2} + \frac{\overline{\cos \theta}}{3l} \times \\ \times \int d\mathbf{R}_3 \Lambda(R_{23}) \frac{(\mathbf{R}_{21} \mathbf{R}_{23})}{R_{21} R_{23}} \frac{(\mathbf{R}_{21} \mathbf{R}_{31})}{R_{21} R_{31}} \gamma_1(R_{31}) + 0(\overline{\cos^3 \theta}). \quad (4.2)$$

Подставляя в (4.1) разложение (3.1) и выполняя фурье-преобразование по переменным  $\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1^{(m)}$ , получим

$$I_C(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_z}{2\pi} f(q_z) \left[ \tilde{\gamma}_0(q_s) + 2P_2 \left( \frac{q_z}{q_s} \right) \tilde{\gamma}_2(q_s) + \frac{\mathbf{k}_i \mathbf{k}_s}{k^2} \hat{g}_{11}(\mathbf{q}_s) \right], \quad (4.3)$$

где  $\mathbf{q}_s = (k_0 \theta_s, 0, q_z)$ ,  $q_s = \sqrt{(k_0 \theta_s)^2 + q_z^2}$ ,

$$\hat{g}_{11}(\mathbf{q}_s) = \int d\mathbf{R} \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^2} \gamma_{110}(R) \exp(-i\mathbf{q}_s \mathbf{R}). \quad (4.4)$$

Функция  $f(q)$  зависит от выбора граничных условий. Выбирая  $l_m = 0.71l^*$ , имеем [8]

$$f(q) = \frac{(1 - w^2) [1 - \cos(1.42 w l^* / l)] + 2w [w + \sin(1.42 w l^* / l)]}{(1 + w^2)^2}.$$

Функция  $\gamma_{110}(R)$  непосредственно вычисляется из формулы (4.2) с использованием явного выражения для вектора  $(\mathbf{R}/R)\gamma_1(R) = \mathbf{g}_1(\mathbf{R})$ , найденного в предыдущем разделе.

Параметризуя тензор  $\hat{g}_{11}(\mathbf{q}_s)$  в виде

$$\hat{g}_{11}(\mathbf{q}_s) = a_{11}(q_s) \hat{\mathbf{I}} + \frac{1}{2} b_{11}(q_s) \left( 3 \frac{\mathbf{q}_s \mathbf{q}_s}{q_s^2} - \hat{\mathbf{I}} \right), \quad (4.5)$$

из (4.4) находим

$$a_{11}(q_s) = \frac{1}{3} \int d\mathbf{R} \gamma_{110}(R) \exp(-i\mathbf{q}_s \mathbf{R}), \quad (4.6)$$

$$b_{11}(q_s) = \frac{2}{3} \int d\mathbf{R} P_2 \left( \frac{\mathbf{q}_s \mathbf{R}}{q_s R} \right) \gamma_{110}(R) \exp(-i\mathbf{q}_s \mathbf{R}). \quad (4.7)$$

Подставляя в (4.6) и (4.7) вместо  $\gamma_{110}(R)$  правую часть уравнения (4.2) с использованием (3.8) и (3.9), получим

$$a_{11}(q_s) = \frac{3\overline{\cos^2 \theta}}{l} \left[ \frac{1}{w_s} \left( 1 + \frac{1}{w_s^2} \right) \arctg w_s - \frac{1}{w_s^2} + 2 \int_{q_s}^{\infty} \frac{p_1}{q} dq \right], \quad (4.8)$$



$$b_{11}(q_s) = \frac{3\overline{\cos\theta}^2}{l} \left[ \frac{1}{w_s^2} - \frac{1}{w_s} \left( 1 + \frac{1}{w_s^2} \right) \arctg w_s + 2q_s^{-3} \int_0^{q_s} q^2 p_1 dq \right], \quad (4.9)$$

где  $w_s = lq_s$ .

В результате зависящая от угла часть интенсивности когерентного обратного рассеяния с точностью до членов порядка  $\overline{\cos\theta}^2$  может быть представлена в виде

$$I_C(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_z}{2\pi} f(q_z) \left[ \tilde{\gamma}_0(q_s) + 2P_2 \left( \frac{q_z}{q_s} \right) \tilde{\gamma}_2(q_s) - a_{11}(q_s) - b_{11}(q_s) P_2 \left( \frac{q_z}{q_s} \right) \right]. \quad (4.10)$$

Для рассеяния назад вклад  $\gamma_1$  исчезает в силу соображений четности.

Диффузионное приближение соответствует учету в (4.10) члена  $\tilde{\gamma}_0(q_s)$ . Только этот член дает линейную зависимость от угла рассеяния  $\theta_s$ . Остальные вклады, отвечающие за анизотропию пропагатора переноса излучения, дают пик лоренцевского типа. Их наличие, вообще говоря, приводит к отклонению зависимости от линейной, а на малых углах проявляется как изменение начального наклона. В рамках диффузионного приближения форма пика при малых углах описывается соотношением  $1 - \gamma kl^* \theta_s$ , где константа  $\gamma$  называется начальным наклоном. Наличие поправочных членов приводит к усложнению описания формы пика, но позволяет определять не только  $l^*$ , но и отдельно  $l$ ,  $\overline{P}_1$ ,  $\overline{P}_2$ , т.е. получить более детальную информацию о рассеивающей системе, поскольку уравнение (4.10) описывает не только начальный наклон, но и форму пика в достаточно широком интервале углов.

На рис. 1 показано, как меняется форма пика обратного рассеяния в зависимости от параметра

$$\overline{P}_2 = \frac{3}{2} \overline{\cos^2\theta} - \frac{1}{2}$$

при фиксированном значении  $\overline{P}_1 = \overline{\cos\theta} = 0.5$ . Из рисунка видно, что с увеличением  $\overline{P}_2$  наклон увеличивается. Так, при  $\overline{P}_2 = 0.1$  получен наклон  $\gamma = 1.5$ , а при  $\overline{P}_2 = 0.3$  — значение  $\gamma = 1.7$ . Это означает, что наклон не может быть корректно описан только с помощью одного параметра  $\overline{\cos\theta}$ . Кривая 4 получена при учете в (3.3) членов  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  и дает наклон  $\gamma = 1.35$ . Отметим, что в диффузионном приближении также учитываются только эти два члена, но при этом для  $\tilde{\gamma}_0(q)$  используется не точное, а асимптотическое выражение вида  $(l^* w^2)^{-1}$ , что приводит к наклону  $\gamma = 2.3$  [24]. Таким образом, кривая 4 может рассматриваться как уточнение диффузионного приближения. Мы используем ее в качестве эталонной для иллюстрации роли членов разложения пропагатора более высокого порядка.

На рис. 2 представлена интенсивность обратного рассеяния, рассчитанная по формуле (4.10), отнесенная к величине интенсивности, рассчитанной при ограничении в (3.3) двумя членами разложения. Из рисунка видно, что учет высших моментов, во-первых, понижает высоту пика и, во-вторых, искажает его форму.

Мы применили полученные результаты для анализа возможности наблюдения пика когерентного обратного рассеяния в критической области. Для простоты при описании

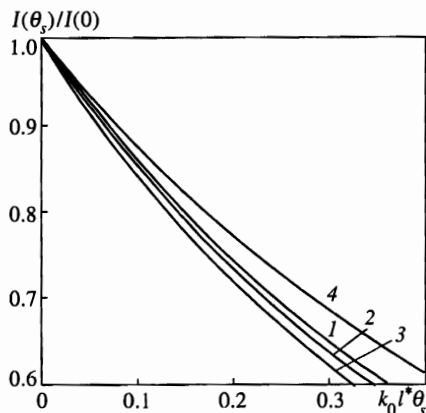


Рис. 1

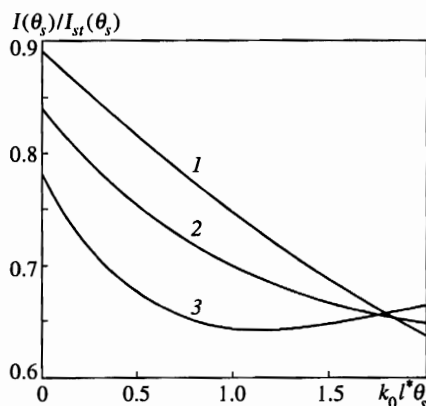


Рис. 2

Рис. 1. Нормированная на высоту пика интенсивность обратного рассеяния  $I(\theta_s)/I(0)$  в зависимости от угловой переменной  $k l^* \theta_s$  при  $\overline{\cos \theta} = 0.5$  для различных значений  $\overline{P_2}$ : 1 —  $\overline{P_2} = 0.1$ ; 2 —  $\overline{P_2} = 0.2$ ; 3 —  $\overline{P_2} = 0.3$ . Кривая 4 — учет в (3.3) только первых двух членов разложения

Рис. 2. Отношение интенсивности  $I(\theta_s)$  обратного рассеяния при  $\overline{P_1} = 0.5$  к интенсивности  $I_{st}(\theta_s)$ , рассчитанной в приближении  $\gamma_n = 0$  при  $n \geq 2$ , в зависимости от угла рассеяния при  $\overline{P_2} = 0.1$  (1);  $\overline{P_2} = 0.2$  (2);  $\overline{P_2} = 0.3$  (3)

угловой зависимости однократного рассеяния была использована формула Орнштейна-Цернике

$$\tilde{G}(q) \propto (r_c^{-2} + q^2)^{-1},$$

где  $r_c$  — радиус корреляции. Для такой индикатрисы

$$\overline{\cos \theta} = \frac{1 + 2x^2}{2x^2} - \frac{2}{\ln(1 + 4x^2)},$$

$$\overline{\cos^2 \theta} = \frac{1 + 2x^2}{2x^2} \overline{\cos \theta}, \tag{4.11}$$

а длина экстинкции [25] определяется выражением

$$l^{-1} = \frac{\pi}{2} B \left[ \left( 2 + x^{-2} + \frac{1}{4} x^{-4} \right) \ln(1 + 4x^2) - 2 - x^{-2} \right], \tag{4.12}$$

где  $x = k r_c$ ,  $B = R_{sc}/x^2$ ,  $R_{sc}$  — константа рассеяния.

Мы рассчитали угловую зависимость пика обратного рассеяния для области значений  $k r_c$ , где величины первых двух моментов индикатрисы рассеяния удовлетворяют условию (3.14). Были выбраны следующие значения, характерные для сильноопалесцирующих систем [26,27]:  $B = 1 \text{ см}^{-1}$ ,  $r_c = r_0 \tau^{-\nu}$ ,  $\nu = 0.63$ ,  $r_0 = 3.2 \text{ \AA}$ ,  $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ ,  $k = 2\pi n/\lambda$ ,  $n = 1.3$ .

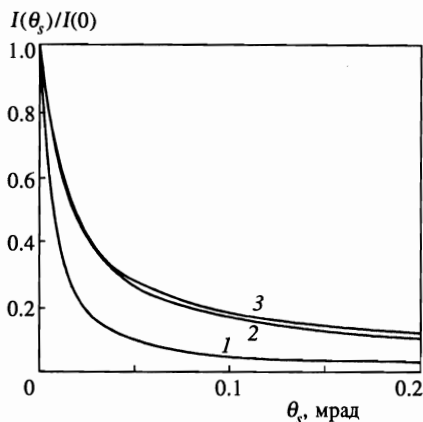


Рис. 3. Угловая зависимость интенсивности обратного рассеяния, рассчитанная для индикатрисы Орнштейна–Цернике при различных значениях  $kr_c$ : 1 —  $kr_c = 0.775$  ( $kl = 4.9 \cdot 10^4$ ,  $\overline{P}_1 = 0.2$ ,  $\overline{P}_2 = 0.047$ ); 2 —  $kr_c = 2.45$  ( $kl = 1.7 \cdot 10^4$ ,  $\overline{P}_1 = 0.46$ ,  $\overline{P}_2 = 0.25$ ); 3 —  $kr_c = 2.56$  ( $kl = 1.5 \cdot 10^4$ ,  $\overline{P}_1 = 0.49$ ,  $\overline{P}_2 = 0.28$ ). Значения  $kl$ ,  $\overline{P}_1$  и  $\overline{P}_2$  вычислены по формулам (4.11), (4.12)

На рис. 3 приведены результаты расчетов для значений  $kr_c = 0.775, 2.45, 2.56$ . Кривые построены в реальных угловых единицах, для того чтобы оценить возможность экспериментального обнаружения пика когерентного обратного рассеяния в критической области. Видно, что при точности измерений порядка 0.05 мрад в критической области можно обнаружить пик обратного рассеяния и исследовать его температурную зависимость.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассматривая перенос излучения в сильнонеоднородных средах, мы развили подход с последовательным учетом высших моментов индикатрисы однократного рассеяния. Были получены аналитические выражения для пропагатора переноса излучения с учетом полиномов Лежандра первого и второго порядков.

При решении задачи о переносе излучения всегда можно указать область расстояний  $r \gg l^*$ , на которых справедливо диффузионное приближение. В этой области нет необходимости учитывать высшие члены разложения по сферическим функциям. Однако для конкретных задач многократного рассеяния существенной оказывается приграничная область толщиной порядка длины экстинкции  $l$ , которая может быть значительно меньше  $l^*$  при  $\overline{\cos \theta} \rightarrow 1$ . В этой промежуточной области  $l < r < l^*$  оказывается существенным вклад высших сферических гармоник. При этом становится важной задача явного учета граничных условий вне рамок метода зеркальных отображений.

В качестве применения развитого подхода была рассчитана интенсивность когерентного обратного рассеяния и исследовано влияние высших моментов на ее угловую зависимость. Была показана возможность экспериментального обнаружения пика когерентного обратного рассеяния в критической области.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 92-02-18201).

## Литература

1. P. J. Pine, D. A. Weitz, G. Maret, P. E. Wolf, E. Herbolzheimer, and P. M. Chaikin, in *Scattering and Localization of Classical Waves in Random Media*, ed. by P. Sheng, World Scientific, Singapore (1989).
2. P. E. Wolf and G. Maret, in *Scattering in Volumes and Surfaces*, ed. by M. Nieto-Vesperanos and J. C. Dainty, Elsevier, Amsterdam (1990), p. 37.
3. Yu. N. Barabanenkov, Yu. A. Kravtsov, V. D. Ozrin, and A. I. Saichev, *Progress in Optics*, ed. by E. Wolf, **29**, 65 (1991).
4. A. Lagendijk and B. A. van Tiggelen, *Phys. Rep.* **270**, 145 (1996).
5. В. Л. Кузьмин, В. П. Романов, *УФН* **166**, 247 (1996).
6. M. P. Van Albada and A. Lagendijk, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2692 (1985).
7. P. E. Wolf and G. Maret, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2696 (1985).
8. E. Akkermans, P. E. Wolf, R. Maynard, and G. J. Maret, *J. de Phys.* **49**, 77 (1988).
9. Ю. Н. Барабаненков, В. Д. Озрин, *ЖЭТФ* **94**(6), 56 (1988).
10. А. Исимару, *Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах*, Мир, Москва (1981).
11. Л. А. Апресян, Ю. А. Кравцов, *Теория переноса излучения*, Наука, Москва (1983).
12. B. A. Tiggelen, R. Maynard, and A. Heiderich, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 639 (1996).
13. H. Stark and T. C. Lubensky, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2229 (1996).
14. B. A. Tiggelen, R. Maynard, and Th. M. Nieuwenhuizen, *Phys. Rev. E* **53**, 2881 (1996).
15. H. Stark and T. C. Lubensky, *Phys. Rev. E* **55**, 514 (1997).
16. Е. Е. Городничев, Д. Б. Рогозкин, *ЖЭТФ* **107**, 209 (1995).
17. В. И. Татарский, *УФН* **139**, 587 (1983).
18. К. Кейз, П. Цвайфель, *Линейная теория переноса*, Мир, Москва (1972).
19. K. M. Watson, *J. Math. Phys.* **10**, 688 (1969).
20. D. A. de Wolf, *IEEE Trans.* **AP-19**, 254 (1971).
21. Ю. Н. Барабаненков, *Изв. ВУЗов, Радиофизика* **16**, 88 (1973).
22. А. Г. Виноградов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, *Изв. ВУЗов, Радиофизика* **16**, 1055, 1064 (1973).
23. А. А. Голубенцев, *ЖЭТФ* **86**, 47 (1984).
24. F. C. Mackintosh and S. John, *Phys. Rev. B* **40**, 2383 (1989).
25. V. G. Puglielli and N. C. Ford, Jr., *Phys. Rev. Lett.* **25**, 143 (1970).
26. М. А. Анисимов *Критические явления в жидкостях и жидких кристаллах*, Наука, Москва (1987).
27. V. L. Kuzmin, V. P. Romanov, and L. A. Zubkov, *Phys. Rep.* **248**, 71 (1994).