ЖЭТФ, 1998, том 113, вып. 6, стр. 2081–2095 ©1998

МЕТОД МОМЕНТОВ И НЕРАВНОВЕСНАЯ ТЕРМОДИНАМИКА РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗОВ

*В. М. Жданов, В. И. Ролдугин**

Институт физической химии Российской академии наук
117915, Москва, Россия

Поступила в редакцию 3 декабря 1997 г.

Рассматривается обобщенный вариант неравновесной термодинамики разреженных газов, построенный на основе линеаризованных уравнений моментов метода Грэда. Показано, что несмотря на усложнение вида термодинамических сил, включающих пространственные производные от потоков, производство энтропии сохраняет вид билинейной комбинации обобщенных термодинамических потоков и сил. Использование теории возмущений по малому числу Кнудсена обеспечивает переход от полученных выражений к известным результатам метода Чепмена–Энскога на уровне линеаризованного барнеттовского приближения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Методы кинетической теории газов нередко используются для обоснования границ применимости феноменологической неравновесной термодинамики [1, 2]. В работах последних лет [3–6] было снято одно из долго существовавших ограничений в использовании неравновесной термодинамики, утверждавшее, что классическая форма совместима с кинетической теорией разреженных газов лишь на уровне первого приближения известного метода Чепмена–Энскога [7, 8]. Была показана согласованность неравновесной термодинамики и с более высокими приближениями метода, например, с результатами линеаризованного барнеттовского приближения. В последнем случае в выражении для локального производства энтропии появляются дополнительные члены, пропорциональные вторым производным от скорости и температуры, и соответствующие им «нефизические» потоки, введение которых обеспечивает выполнение соотношений Онзагера [5, 6].

Еще Грэдом на основе развитого им метода моментов [9, 10] была отмечена возможность применения неравновесной термодинамики в более широких ситуациях, когда неравновесное состояние газа (и неравновесная энтропия) определяются не только локальными значениями плотности и внутренней энергии (температуры) газа, как в обычной классической схеме неравновесной термодинамики, но и любым числом дополнительных переменных состояния (моментов функции распределения). Эта идея была затем реализована в попытках построения так называемой обобщенной термодинамики неравновесных процессов (extended irreversible thermodynamics), в которой в качестве дополнительных переменных используются тепловой поток и тензор вязких напряжений [11–13], а иногда и бо́льшее число моментов [14, 15].

* E-mail: roldughin@lmm.phyche.msk.su

Специфическая область применения обобщенной термодинамики неравновесных процессов связана с анализом ситуаций, когда характерное время задачи сравнимо с временем релаксации за счет столкновений молекул, что предопределяет использование в теории нестационарных уравнений моментов. Вместе с тем остались фактически в стороне вопросы, связанные с учетом в линеаризованных уравнениях моментов пространственных производных от потоков (моментов) другой тензорности. Их присутствие в выражениях для потока тепла и тензора вязких напряжений, а также в других нефизических потоках, следующих из решения уравнений моментов, выводит эти выражения за рамки стандартных линейных соотношений переноса классической неравновесной термодинамики. Можно показать, однако, что такое обобщение не приводит к противоречию с каноническими выводами неравновесной термодинамики. Несмотря на некоторое усложнение вида термодинамических сил за счет новых членов, выражение для производства энтропии по-прежнему сохраняет вид билинейной комбинации обобщенных термодинамических сил и потоков. При этом благодаря учету дополнительных моментов функции распределения существенно расширяется система феноменологических уравнений для потоков и сил, а для перекрестных коэффициентов в выражениях для потоков одинаковой тензорной размерности выполняются соотношения симметрии Онзагера.

Построению именно такого обобщения неравновесной термодинамики посвящена настоящая работа. Выражение для локального производства энтропии выводится на основе разложения функции распределения в ряд по ортогональным тензорным полиномам, представляющим собой (с точностью до нормировки) произведения полиномов Сонина на тензорные сферические гармоники, а также с помощью уравнений моментов, получаемых на базе линеаризованного кинетического уравнения. Применение теории возмущений по малому числу Кнудсена по отношению к системе уравнений моментов приводит затем к результатам, фактически совпадающим с известными результатами метода Чепмена–Энскога на уровне как первого, так и второго (барнеттовского) приближения. Это относится как к обобщенным выражениям для потоков и соответствующему им представлению для производства энтропии, так и к конкретным результатам, позволяющим рассчитывать все необходимые коэффициенты переноса с точностью, соответствующей учету произвольного числа полиномов Сонина в разложении функции распределения.

2. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ МОМЕНТОВ

Рассмотрим стационарное состояние разреженного одноатомного газа, описываемое с помощью функции распределения $f(\mathbf{v}, \mathbf{r})$, где $\mathbf{v}$ — скорость частицы, $\mathbf{r}$ — ее положение. Пусть состояние газа слабо отклоняется от равновесия, тогда $f(\mathbf{v}, \mathbf{r})$ можно представить в виде

$$f = f^{(0)}(1 + \Phi), \quad f^{(0)} = n(\beta/\pi)^{3/2} \exp(-\beta c^2), \tag{1}$$

где $f^{(0)}$ — локальное максвелловское распределение частиц по скоростям, Φ — малая добавка ($|\Phi| \ll 1$), $\beta = m/2kT$, n — плотность, T — температура, m — масса частицы, $\mathbf{c} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ — скорость частиц относительно центра масс, $\mathbf{u}$ — макроскопическая скорость газа.

Поправка $\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{r})$ удовлетворяет линеаризованному кинетическому уравнению Больцмана [8, 10]

$$(\mathbf{v}\nabla) \ln f^{(0)} + (\mathbf{v}\nabla)\Phi = L\Phi, \tag{2}$$

где

$$\nabla \ln f^{(0)} = \nabla \ln p + (\beta c^2 - 5/2)\nabla \ln T + 2\beta \mathbf{c}(\nabla \mathbf{u}). \tag{3}$$

При этом

$$L\Phi = \iint (\Phi' + \Phi_1' - \Phi - \Phi_1) f_1^{(0)} g\sigma(g, \Omega) d\Omega\, d\mathbf{v}_1 \tag{4}$$

— линеаризованный оператор столкновений молекул со скоростями $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_1$ (штрих означает, что функции распределения зависят от скоростей молекул после столкновения), $p = nkT$ — давление, $\sigma(g, \Omega)$ — дифференциальное сечение столкновения, g — относительная скорость сталкивающихся молекул, Ω — угол рассеяния.

Полезно ввести определение скалярного произведения функций в гильбертовом пространстве:

$$(g, h) = \frac{1}{n} \int f^{(0)}(\mathbf{c}) g(\mathbf{c}) h(\mathbf{c}) d\mathbf{c}.$$

Параметры локального максвелловского распределения $(n, \mathbf{u}, T)$ определены одинаковым образом как на полной функции распределения f, так и на $f^{(0)}$, что приводит к условиям

$$(1, \Phi) = 0, \quad (\mathbf{c}, \Phi) = 0, \quad (c^2, \Phi) = 0. \tag{5}$$

Ниже будут использоваться два известных свойства линеаризованного оператора столкновений [8]: соотношение симметрии

$$(\Psi, L\Phi) = (L\Psi, \Phi) \tag{6}$$

и условие

$$(\Phi, L\Phi) \leq 0. \tag{7}$$

Знак равенства в последнем соотношении отвечает случаю, когда Φ является инвариантом столкновений частиц.

Разложим неравновесную поправку Φ в ряд по ортонормированной системе тензорных полиномов $\mathbf{P}^{ps}(\mathbf{W})$ от безразмерной относительной скорости частиц $\mathbf{W} = \mathbf{c}\sqrt{\beta}$:

$$\Phi = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{a}^{ps}(\mathbf{r}) \otimes \mathbf{P}^{ps}(\mathbf{W}), \tag{8}$$

где символ $\otimes$ принят для обозначения скалярного произведения тензоров. Полиномы имеют вид [16, 17][1)]

$$\mathbf{P}^{ps}(\mathbf{W}) = \gamma_{ps} S_{p+1/2}^{(s)}(W^2) \mathbf{R}^p(\mathbf{W}). \tag{9}$$

[1)] Эти полиномы соответствуют ортонормированной системе собственных функций линеаризованного оператора столкновений для модели максвелловских молекул [16], они совпадают также (с точностью до нормировки) с неприводимыми тензорными полиномами Эрмита, использованными впервые Грэдом [18].

При этом $S^{(s)}_{p+1/2}(W^2)$ — полиномы Сонина [1], $\mathbf{R}^p(\mathbf{W})$ — тензорные сферические гармоники [16], γ_{ps} — нормировочный множитель:

$$\gamma_{ps} = (-1)^s \sqrt{\frac{2^{p+s} s!(2p+1)!!}{p!(2p+2s+1)!!}}\,.$$

Полиномы $\mathbf{P}^{ps}$ нормированы условием

$$(\mathbf{P}^{ps}, \mathbf{P}^{p's'}) = \delta_{pp'}\delta_{ss'}\Delta^{(p)}, \tag{10}$$

где $\Delta^{(p)}$ — единичный проекционный тензор [17].

Первые несколько полиномов имеют вид

$$\begin{aligned} &P^{00} = 1, \quad P^{01} = \sqrt{2/3}\,(W^2 - 3/2), \quad \mathbf{P}^{10} = \sqrt{2}\mathbf{W}, \\ &\mathbf{P}^{11} = \sqrt{4/5}\mathbf{W}(W^2 - 5/2), \quad \mathbf{P}^{20} = \sqrt{2}\overline{\mathbf{WW}}, \\ &\mathbf{P}^{30} = \sqrt{4/3}\,\overline{\mathbf{WWW}}, \ldots \end{aligned} \tag{11}$$

При этом $\overline{aaa\ldots}$ используется для обозначения неприводимости тензора, например,

$$\left(\overline{\mathbf{WW}}\right)_{ik} = W_i W_k - \frac{1}{3}\delta_{ik}W^2,$$

$$\left(\overline{\mathbf{WWW}}\right)_{ikl} = W_i W_k W_l - \frac{1}{5}W^2(\delta_{ik}W_l + \delta_{il}W_k + \delta_{kl}W_i).$$

Заметим, что из условия ортогональности полиномов $\mathbf{P}^{ps}$ с максвелловской весовой функцией следует

$$\mathbf{a}^{ps} = \frac{1}{n}\int \mathbf{P}^{ps} f^{(0)}\Phi d\mathbf{c} = (\mathbf{P}^{ps}, \Phi). \tag{12}$$

Благодаря условиям (5) имеем $a^{00} = \mathbf{a}^{10} = a^{01} = 0$, т.е. разложение (8) начинается фактически с полиномов $\mathbf{P}^{11}$, $\mathbf{P}^{20}$ с соответствующими им коэффициентами $\mathbf{a}^{11}$, $\mathbf{a}^{20}$.

Уравнения для коэффициентов $\mathbf{a}^{ps}$ (линеаризованные уравнения моментов) получаются после умножения кинетического уравнения (2) на $f^{(0)}\mathbf{P}^{ps}$ и интегрирования по скоростям.

Ниже мы ограничимся для простоты рассмотрением медленных течений газа, когда наряду с малостью градиентов основных термодинамических величин $(n, \mathbf{u}, T)$ выполнено условие

$$|\mathbf{u}| \ll \sqrt{kT/m}. \tag{13}$$

В этом случае можно пренебречь членами порядка $\mathbf{u}\nabla \ln f^{(0)}$ и $(\mathbf{u}\nabla)\Phi$ в уравнении (2). Последнее означает, что в уравнениях (2) и (3) можно в равной степени использовать переменную $\mathbf{c}$ или $\mathbf{v}$. Соответствующая система уравнений моментов принимает тогда вид

$$(\mathbf{P}^{ps}, (\mathbf{c}\nabla)\ln f^{(0)}) + \sum_{p's'}(\mathbf{P}^{ps}, \mathbf{c}\mathbf{P}^{p's'}) \otimes \nabla\mathbf{a}^{p's'} = \sum_{p's'}(\mathbf{P}^{ps}, L\mathbf{P}^{p's'}) \otimes \mathbf{a}^{p's'}. \tag{14}$$

Легко заметить, что $(\mathbf{c}\nabla)\ln f^{(0)}$ содержит линейную комбинацию полиномов $\mathbf{P}^{10}$, $\mathbf{P}^{11}$ и $\mathbf{P}^{20}$. Тогда с учетом условия ортогональности полиномов (10) имеем

$$\left(\mathbf{P}^{ps}, (\mathbf{c}\nabla)\ln f^{(0)}\right) = \left(\sqrt{2}/2\right)\beta^{-1/2}\nabla \ln p\,\delta_{p1}\delta_{s0} + \sqrt{5/4}\,\beta^{-1/2}\nabla \ln T\delta_{p1}\delta_{s1} + \sqrt{2}\,\overline{\nabla\mathbf{u}}\,\delta_{p2}\delta_{s0}. \tag{15}$$

Можно показать, что для симметричных неприводимых тензоров $\mathbf{P}^{ps}$ потоковый член в левой части (14) представляет собой линейную комбинацию производных по координатам от коэффициентов $p+1$-й и $p-1$-й тензорных размерностей [16, 17]

$$\sum_{p's'}(\mathbf{P}^{ps}, \mathbf{c}\mathbf{P}^{p's'}) \otimes \nabla \mathbf{a}^{p's'} = \sum_{s'=0}^{\infty}\left(A_{ps}^{p+1,s'}\nabla\mathbf{a}^{p+1,s'} + B_{ps}^{p-1,s'}\overline{\nabla\mathbf{a}}^{\,p-1,s'}\right), \tag{16}$$

где операторы A и B даются выражениями

$$\begin{aligned} A_{ps}^{p+1,s'} &= \frac{1}{2p+3}(\mathbf{P}^{ps}\otimes \mathbf{c}\mathbf{P}^{p+1,s'}),\\ B_{ps}^{p-1,s'} &= \frac{1}{2p+1}(\mathbf{P}^{ps}\otimes \mathbf{c}\mathbf{P}^{p-1,s'}). \end{aligned} \tag{17}$$

Обозначение $\overline{\nabla\mathbf{a}}^{\,p-1,s'}$ соответствует при этом симметричному неприводимому тензору. Так, если $\mathbf{a}^{p-1,s'}$ — вектор ($p=2$), то $\overline{\nabla\mathbf{a}}^{\,1s'}$ — неприводимый тензор второго ранга,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i^{1s'}}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j^{1s'}}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\frac{\partial a_l^{1s'}}{\partial x_l}.$$

Правую часть системы (14), или «момент относительно интеграла столкновений», удобно выразить с помощью так называемых интегральных скобок от соответствующих полиномов. Воспользуемся с этой целью соотношением [17]

$$(\mathbf{P}^{ps}, L\mathbf{P}^{p's'}) = -\delta_{pp'}n\left[\mathbf{P}^{ps}, \mathbf{P}^{p's'}\right]\Delta^{(p)}, \tag{18}$$

где

$$\left[\mathbf{P}^{ps}, \mathbf{P}^{p's'}\right] = \frac{1}{4n^2}\int f^{(0)} f_1^{(0)} \Delta P^{ps}\Delta P^{p's'} g\sigma\, d\Omega\, \mathbf{dc}\, \mathbf{dc}_1. \tag{19}$$

При этом

$$\Delta F = F(\mathbf{c}') + F(\mathbf{c}_1') - F(\mathbf{c}) - F(\mathbf{c}_1).$$

Используя (18), находим

$$\sum_{p's'}(\mathbf{P}^{ps}, L\mathbf{P}^{p's'}) \otimes \mathbf{a}^{p's'} = -\sum_{s'=0}^{\infty} n\Lambda_{pss'}\mathbf{a}^{ps'}, \tag{20}$$

где $\Lambda_{pss'}$ выражаются через известные интегральные скобки от полиномов Сонина [7, 8]. С учетом явного вида (9) полиномов $\mathbf{P}^{ps}$ имеем

$$\Lambda_{pss'} = \frac{1}{2p+1}\gamma^{ps}\gamma^{ps'}\left[S_{p+1/2}^{(s)}(W^2)\mathbf{R}^{(p)}(\mathbf{W}), S_{p+1/2}^{(s')}(W^2)\mathbf{R}^{(p)}(\mathbf{W})\right]. \tag{21}$$

При записи (20) и (21) учитывается, что полный след проекционного тензора $\Delta^{(p)}$ равен $2p+1$.

Уравнения моментов принимают, таким образом, следующий окончательный вид:

$$\left(\mathbf{P}^{ps}, (\mathbf{c}\nabla \ln f^{(0)}\right) + \sum_{s'=0}^{\infty} \left(A_{ps}^{p+1,s'} \nabla \mathbf{a}^{p+1,s'} + B_{ps}^{p-1,s'} \overline{\nabla \mathbf{a}}^{p-1,s'} \right) = -\sum_{s'=0}^{\infty} n\Lambda_{pss'} \mathbf{a}^{ps'}, \qquad (22)$$

где первый член в левой части определен соотношением (15).

Непосредственное использование уравнений моментов в форме (22) представляет интерес в тех случаях, когда их правая часть отлична от нуля. Легко заметить, что для полиномов P^{00}, $\mathbf{P}^{10}$ и P^{01} правая часть исходных уравнений моментов (14) равна нулю в силу условия (7), поскольку эти полиномы являются инвариантами столкновений, соответствующими сохранению массы, импульса и энергии частиц при их столкновениях. В этом случае из (14) вытекают обычные уравнения сохранения (уравнения гидродинамики) для медленных течений газа:

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad \nabla p + \nabla \boldsymbol{\pi}, \quad \nabla \mathbf{q} = 0. \qquad (23)$$

Здесь $\boldsymbol{\pi}$ — тензор вязких напряжений, $\mathbf{q}$ — тепловой поток, определяемые выражениями

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi} &= mn \left(\overline{\mathbf{cc}}, \Phi \right) = \sqrt{2}\, p \mathbf{a}^{20}, \\ \mathbf{q} &= p \left((\beta c^2 - 5/2)\mathbf{c}, \Phi \right) = (5/4)^{1/2} \beta^{-1/2} p \mathbf{a}^{11}. \end{aligned} \qquad (24)$$

При этом $(\nabla \boldsymbol{\pi})_i = \partial \pi_{ik}/\partial x_k$.

3. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МОМЕНТОВ

Уравнения (22) образуют бесконечную систему зацепляющихся уравнений (благодаря присутствию потоковых членов в левой части для скалярных ($p=0$), векторных ($p=1$) и тензорных ($p=2,3,\ldots$) величин. Их решение становится возможным, если мы ограничиваемся конечным числом членов в разложении (8).

Рассмотрим приближение, когда в разложении оставлены члены, включающие тензорные полиномы не выше третьего ранга, т. е. положим $\mathbf{a}^{ps} = 0$ при $p \geq 4$. Соответствующие системы уравнений (22) для $p = 1, 2, 3\ldots$ принимают вид

$$(5/4)^{1/2} \beta^{-1/2} \nabla \ln T \delta_{s1} + \sum_{s'=0}^{\infty} \left(A_{1s}^{2s'} \nabla \mathbf{a}^{2s'} + B_{1s}^{0s'} \nabla \mathbf{a}^{0s'} \right) = -\sum_{s'=0}^{\infty} n\Lambda_{1ss'} \mathbf{a}^{1s'}, \qquad (25)$$

$$\sqrt{2}\, \overline{\nabla \mathbf{u}} \delta_{s0} + \sum_{s'=0}^{\infty} \left(A_{2s}^{3s'} \nabla \mathbf{a}^{3s'} + B_{2s}^{1s'} \overline{\nabla \mathbf{a}}^{1s'} \right) = -\sum_{s'=0}^{\infty} n\Lambda_{2ss'} \mathbf{a}^{2s'}, \qquad (26)$$

$$\sum_{s'=0}^{\infty} B_{3s}^{2s'} \overline{\nabla \mathbf{a}}^{2s'} = -\sum_{s'=0}^{\infty} n\Lambda_{3ss'} \mathbf{a}^{3s'}. \qquad (27)$$

Дальнейшие упрощения при решении уравнений возможны, если обрывать ряды при конечных значениях s и s'. В качестве примера рассмотрим известное приближение

20-ти моментов Грэда [9, 10], когда наряду с коэффициентами $\mathbf{a}^{11}$ и $\mathbf{a}^{20}$ в разложении оставлен $\mathbf{a}^{30}$ с соответствующим полиномом $\mathbf{P}^{30} = \sqrt{4/3}\,\overline{\mathbf{WWW}}$. Коэффициент $\mathbf{a}^{30}$ связан с моментом функции распределения третьего порядка $\hat{\mathbf{S}} = m\int \overline{\mathbf{ccc}}\, f d\mathbf{c}$, так что

$$\hat{\mathbf{S}} = \sqrt{3}\,\beta^{-1/2} p\mathbf{a}^{30}. \tag{28}$$

Уравнения (25)–(27) в этом случае принимают вид

$$\begin{aligned} &\sqrt{5/4}\,\beta^{-1/2}\nabla \ln T + A_{11}^{20}\nabla\mathbf{a}^{20} = -n\Lambda_{111}\mathbf{a}^{11}, \\ &\sqrt{2}\,\overline{\nabla\mathbf{u}} + A_{20}^{30}\nabla\mathbf{a}^{30} + B_{20}^{11}\overline{\nabla\mathbf{a}}^{11} = -n\Lambda_{200}\mathbf{a}^{20}, \\ &B_{30}^{20}\overline{\nabla\mathbf{a}}^{20} = -n\Lambda_{300}\mathbf{a}^{30}. \end{aligned} \tag{29}$$

Коэффициенты A и B, а также $\Lambda_{pss'}$ рассчитываются на основе выражений (17) и (21). Используя известные выражения для интегральных скобок, связывающие их с $\Omega^{(l,s)}$-интегралами [7, 8], и учитывая соотношения (24) и (28), приходим к следующим выражениям для $\mathbf{q}$, $\boldsymbol{\pi}$ и $\hat{\mathbf{S}}$:

$$\mathbf{q} = -L_{11}\left[\frac{\nabla T}{T} + \frac{2}{5}\frac{1}{p}\nabla\boldsymbol{\pi}\right], \tag{30}$$

$$\boldsymbol{\pi} = -L_{22}\left[\overline{\nabla\mathbf{u}} + \frac{2}{5}\frac{1}{p}\overline{\nabla\mathbf{q}} + \frac{1}{2p}\nabla\hat{\mathbf{S}}\right], \tag{31}$$

$$\hat{\mathbf{S}} = -L_{33}\frac{\overline{\nabla\boldsymbol{\pi}}}{2p}, \tag{32}$$

где

$$\left(\overline{\nabla\boldsymbol{\pi}}\right)_{ijk} = \left(\frac{\partial\pi_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial\pi_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial\pi_{ij}}{\partial x_k}\right) - \frac{2}{5}\left(\frac{\partial\pi_{il}}{\partial x_l}\delta_{jk} + \frac{\partial\pi_{jl}}{\partial x_l}\delta_{ik} + \frac{\partial\pi_{kl}}{\partial x_l}\delta_{ij}\right).$$

Коэффициенты L_{11}, L_{22} и L_{33} связаны с коэффициентами вязкости и теплопроводности $[\eta]_1$ и $[\lambda]_1$, возникающими в первом приближении (по числу полиномов Сонина в разложении Чепмена–Каулинга):

$$L_{11} = [\lambda]_1, \quad L_{22} = 2[\eta]_1, \quad L_{33} = (4kT/3m)[\eta]_1,$$

где

$$[\eta]_1 = \frac{5}{8}\frac{kT}{\Omega^{(2,2)}}, \quad [\lambda]_1 = \frac{75}{32}\frac{k^2T}{m\Omega^{(2,2)}}. \tag{33}$$

Вообще говоря, система уравнений (30), (31) для $\mathbf{q}$ и $\boldsymbol{\pi}$ требует самосогласованного решения, поскольку термодинамические силы содержат производные от потоков. Эта ситуация несколько отличается от привычного представления феноменологических уравнений неравновесной термодинамики, в которых слева фигурируют потоки, а справа — градиенты обычных гидродинамических переменных. Легко, однако, видеть, что эта система может быть формально приведена к классическому виду, но с кинетическими коэффициентами, представленными в операторной форме. Такое представление равноправно используется в канонической неравновесной термодинамике наряду с обычным [1].

Выражения для $\mathbf{q}$ и $\boldsymbol{\pi}$, отвечающие известному приближению 13-ти моментов [9], следуют из (30)–(32), если положить $\hat{\mathbf{S}} = 0$. В этом случае возможен другой способ представления уравнений (30), (31) в форме, близкой к канонической. Поток тепла $\mathbf{q}$ может быть выражен через градиенты давления и температуры (см. ниже формулу (45)). Тогда в выражении для $\boldsymbol{\pi}$ справа остаются только производные от обычных термодинамических переменных (включая вторые производные от температуры и давления).

Учет большего числа членов в разложении заметно усложняет структуру полученных решений, хотя формальное представление решений для коэффициентов $n\mathbf{a}^{ps}$ сводится в основном к нахождению обратной матрицы коэффициентов $(\Lambda_{pss'})^{-1}$. Для приближения 26-ти моментов подобные решения рассматривались, например, в [14, 15].

4. УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА ЭНТРОПИИ

В основе неравновесной термодинамики лежит, как известно, локальное уравнение баланса энтропии, которое может быть получено из полного (не линеаризованного) кинетического уравнения для f в результате умножения на $\ln f$ и интегрирования по скоростям. Локальная плотность энтропии ρs (ρ — плотность) определена при этом выражением [1, 19]

$$\rho s = -k \int f \ln f \mathbf{dc} + kn \tag{34}$$

(k — постоянная Больцмана, n — плотность частиц), а само уравнение баланса для стационарного случая имеет вид

$$\nabla \mathbf{J}_s = \sigma, \tag{35}$$

где

$$\mathbf{J}_s = -k \int \mathbf{v} f \ln f d\mathbf{c} + kn\mathbf{u} \tag{36}$$

— плотность полного потока энтропии и

$$\sigma = -k \int f^{(0)} \ln f L\Phi d\mathbf{c} \tag{37}$$

— локальное производство энтропии.

Подставляя f в виде (1) в (34), (36) и (37) и используя условия (5), с точностью до членов, квадратичных относительно малой добавки Φ, получаем

$$\begin{aligned} &\rho s = (\rho s)_0 - \frac{kn}{2}(1, \Phi^2), \quad \mathbf{J}_s = \rho s \mathbf{u} + \frac{\mathbf{q}}{T} - \frac{kn}{2}(\mathbf{c}, \Phi^2), \\ &\sigma = -kn(\Phi, L\Phi). \end{aligned} \tag{38}$$

Здесь индекс «0» соответствует определению плотности энтропии в состоянии локального равновесия.

Используя разложение (8), можно представить (34) и (36) как

$$
\begin{aligned}
\rho s &= (\rho s)_0 - \frac{kn}{2}\sum_{p,s}\mathbf{a}^{ps}\mathbf{a}^{ps}, \\
\mathbf{J}_s &= \rho s\mathbf{u} + \frac{\mathbf{q}}{T} - \frac{kn}{2}\sum_{p,s}\sum_{p',s'}\mathbf{a}^{ps}(\mathbf{P}^{ps},\mathbf{c}\mathbf{P}^{p's'})\mathbf{a}^{p's'}.
\end{aligned}
\tag{39}
$$

В приближении 20-ти моментов эти выражения принимают вид [14]

$$
\begin{aligned}
\rho s &= (\rho s)_0 - \frac{1}{4pT}\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\pi} - \frac{m}{5pkT^2}\mathbf{q}\mathbf{q} - \frac{1}{12}\frac{m}{pkT^2}\hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{S}}, \\
J_{si} &= \rho s u_i + \frac{q_i}{T} - \frac{2}{5pT}q_j\pi_{ij} - \frac{5}{14pT}\hat{S}_{ijk}\pi_{jk}.
\end{aligned}
\tag{40}
$$

Далее нас будет интересовать, главным образом, выражение (38) для локального производства энтропии σ. Подставим в него разложение для Φ и заменим линеаризованный интеграл столкновений $L\Phi$ на левую часть кинетического уравнения (2). В результате имеем

$$
T\sigma = -kT\sum_{p,s} n\mathbf{a}^{ps}\otimes\left[(\mathbf{P}^{ps},(\mathbf{c}\nabla)\ln f^{(0)}) + \sum_{p',s'}(\mathbf{P}^{ps},\mathbf{c}\mathbf{P}^{p's'})\otimes\nabla\mathbf{a}^{p's'}\right], \tag{41}
$$

или с учетом определений (24) и (16)

$$
T\sigma = -\frac{1}{T}q\nabla T - \boldsymbol{\pi}\otimes\overline{\nabla\mathbf{u}} - kT\sum_{p,s}n\mathbf{a}^{ps}\otimes\left[\sum_{s'=0}^{\infty}A_{ps}^{p+1,s'}\nabla\mathbf{a}^{p+1,s'} + B_{ps}^{p-1,s'}\overline{\nabla\mathbf{a}}^{p-1,s'}\right]. \tag{42}
$$

Первые два члена в (42) соответствуют обычному представлению локального производства энтропии в виде билинейной комбинации потоков $\mathbf{q}$ и $\boldsymbol{\pi}$ и сопряженных им термодинамических сил, которое получается в рамках классической схемы неравновесной термодинамики для векторных и тензорных явлений [1]. Новым оказывается то обстоятельство, что эти же потоки ($p\mathbf{a}^{11} \sim \mathbf{q}$ и $p\mathbf{a}^{20} \sim \boldsymbol{\pi}$) фигурируют вместе с сопряженными к ним дополнительными силами в следующих членах выражения (42).

Для приближения 20-ти моментов вычисление производства энтропии в этом случае дает

$$
T\sigma = -\mathbf{q}\left(\frac{1}{T}\nabla T + \frac{2}{5p}\nabla\pi\right) - \boldsymbol{\pi}\otimes\left(\nabla\mathbf{u} + \frac{2}{5}\frac{1}{p}\nabla\mathbf{q} + \frac{1}{2p}\nabla\hat{\mathbf{S}}\right) - \frac{1}{2p}\hat{\mathbf{S}}\otimes\overline{\nabla\boldsymbol{\pi}}. \tag{43}
$$

Соответствующие представлению (43) линейные феноменологические соотношения неравновесной термодинамики полностью согласуются при этом с выражениями (30)–(32), которые следуют из непосредственного решения системы уравнений моментов.

Отметим, что усложнение вида термодинамических сил за счет производных от потоков в уравнениях (30) и (31) не вызвало необходимости в ревизии значений коэффициентов L_{11} и L_{22}, которые по-прежнему определяются значениями обычной вязкости и теплопроводности. Более того, как и в обычной классической схеме [1], производство энтропии оказывается линейной комбинацией квадратичных относительно потоков членов:

$$T\sigma = \frac{1}{L_{11}}\mathbf{qq} + \frac{1}{L_{22}}\boldsymbol{\pi}\otimes\boldsymbol{\pi} + \frac{1}{L_{33}}\hat{\mathbf{S}}\otimes\hat{\mathbf{S}}. \tag{44}$$

Условие $\sigma \geq 0$ (положительность производства энтропии), которое следует из свойства линеаризованного интеграла столкновений (7), гарантируется при этом положительностью коэффициентов L_{ii} или очевидными условиями $\eta > 0$, $\lambda > 0$.

Заметим, что для медленных течений из уравнения движения (23) следует $\nabla\boldsymbol{\pi} = -\nabla p$, при этом выражение (30) для теплового потока принимает вид

$$\mathbf{q} = -L_{11}\left(\frac{\nabla T}{T} - \frac{2}{5}\frac{\nabla p}{p}\right). \tag{45}$$

Любопытно, что в известной монографии [20] при выводе выражения для производства энтропии используется существенное предположение о том, что тепловой поток может зависеть только от градиента температуры. Соответствующее обоснование выглядит следующим образом [20, стр. 274]: «Если бы в $\mathbf{q}$ входил член, пропорциональный ∇p, то в выражении для производства энтропии прибавился бы еще член, содержащий произведение $\nabla p\nabla T$. Поскольку последнее может быть как положительным, так и отрицательным, то и производство энтропии не было бы существенно положительным, что невозможно».

На самом деле, из полученных выше выражений (44) и (45) следует, что отвечающая тепловому потоку часть производства энтропии может быть представлена в виде

$$T\sigma_q = L_{11}\left(\frac{\nabla T}{T} - \frac{2}{5}\frac{\nabla p}{p}\right)^2, \tag{46}$$

т. е. остается существенно положительной несмотря на наличие в выражении для теплового потока члена с градиентом давления.

В системе уравнений (30)–(32) отсутствуют перекрестные члены, для коэффициентов которых обычно выполняются соотношения Онзагера. Это связано с тем, что этим уравнениям отвечает набор минимального числа полиномов в разложении для Φ одинаковой тензорной размерности (первого, второго и третьего порядков). Легко убедиться, что при учете большего числа коэффициентов разложения и соответствующих им потоков (не имеющих уже прямого физического смысла) можно получить набор линейных феноменологических соотношений для потоков, в которых будут существовать перекрестные члены. Так, если в качестве потоков $\mathbf{J}^{ps}$ выбрать коэффициенты $n\mathbf{a}^{ps}$, а в качестве термодинамических сил — выражения

$$\mathbf{F}^{ps} = kT\left[\left(\mathbf{P}^{ps}, (\mathbf{c}\nabla)\ln f^{(0)}\right) + \sum_{s'} A_{ps}^{p+1,s'}\nabla\mathbf{a}^{p+1,s'} + B_{ps}^{p-1,s'}\overbrace{\nabla\mathbf{a}^{p-1,s'}}\right], \tag{47}$$

то система линейных феноменологических уравнений различной тензорности, связывающих термодинамические потоки и силы, принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{0s} &= \sum_{s'} L^{(0)}_{ss'} \mathbf{F}^{0s'}, \\ \mathbf{J}^{1s} &= \sum_{s'} L^{(1)}_{ss'} \mathbf{F}^{1s'}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{J}^{ps} &= \sum_{s'} L^{(p)}_{ss'} \mathbf{F}^{ps'}, \end{aligned} \tag{48}$$

где перекрестные кинетические коэффициенты $L^{(p)}_{ss'}$ удовлетворяют соотношениям Онзагера ($L^{(p)}_{ss'} = L^{(p)}_{s's}$).

Уравнения (48) имеют ту же структуру, что и непосредственное решение уравнений (22) для коэффициентов $n\mathbf{a}^{ps}$. При этом матрица феноменологических коэффициентов L_{ij} совпадает с обратной матрицей коэффициентов Λ. Симметрия перекрестных коэффициентов следует тогда из симметрии коэффициентов $\Lambda_{pss'}$, определяемых выражением (21).

5. СВЯЗЬ С РЕЗУЛЬТАТАМИ МЕТОДА ЧЕПМЕНА–ЭНСКОГА

Полезно выяснить, при каких предположениях результаты, получаемые методом моментов, согласуются с выводами традиционного метода Чепмена–Энскога [7, 8]. Последний основывается, как известно, на применении теории возмущений, когда в качестве малого параметра используется число Кнудсена ($\mathrm{Kn} = l/L \ll 1$, где l — средняя длина свободного пробега частиц, L — характерный размер задачи). Параметр Kn^{-1} вводится в правую часть кинетического уравнения, и функция распределения разлагается в ряд по малому числу Кнудсена. Мы применим эту процедуру не к функции распределения, а к коэффициентам разложения $\mathbf{a}^{mn}$. Такая возможность связана с тем, что коэффициенты $\Lambda_{pss'}$ в правой части линеаризованных уравнений моментов имеют порядок обратного характерного времени τ^{-1} между столкновениями частиц, где $\tau = 1/\langle v\rangle = [\eta]_1/p$, $\langle v\rangle$ — средняя тепловая скорость частиц.

Используя формальное разложение коэффициентов $\mathbf{a}^{ps}$ в ряды вида

$$\mathbf{a}^{ps} = \mathbf{a}^{ps}_{(1)} + \mathrm{Kn}\,\mathbf{a}^{ps}_{(2)} + \mathrm{Kn}^2\mathbf{a}^{ps}_{(3)} + \ldots,$$

подставляя эти ряды в (25)–(27) и приравнивая члены при одинаковых степенях Kn, приходим к системам уравнений первого, второго и т. д. порядков теории возмущений. Первому приближению соответствует система уравнений, в левой части которых опущены потоковые члены с производными от коэффициентов $\mathbf{a}^{ps}$ ($p = 0, 1, 2, 3\ldots$). Для векторных и тензорных коэффициентов $\mathbf{a}^{1k}_{(1)}$ и $\mathbf{a}^{2k}_{(1)}$ имеем, в частности, две независимые системы алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} -\sqrt{5/4}\,\beta^{-1/2}\nabla \ln T\delta_{p1} &= \sum_{s=1}^{\infty} n\Lambda_{1ps}\mathbf{a}^{1s}_{(1)}, \\ -\sqrt{2}\,\overline{\nabla\mathbf{u}}\,\delta_{p2} &= \sum_{s=0}^{\infty} n\Lambda_{2ps}\mathbf{a}^{2s}_{(1)}. \end{aligned} \tag{49}$$

Эти уравнения могут быть разрешены относительно потоков $\mathbf{J}_{1s} = n\mathbf{a}^{1s}_{(1)}$ и $\mathbf{J}_{2s} = n\mathbf{a}^{2s}_{(1)}$ для любого конечного значения $p = \xi$. В частности, в любом приближении по ξ находятся значения $n\mathbf{a}^{11}_{(1)}$ и $n\mathbf{a}^{20}_{(1)}$ или соответствующие им тепловой поток $\mathbf{q}$ и тензор вязких напряжений $\boldsymbol{\pi}$. Последние могут быть представлены как

$$\mathbf{q} = -\lambda\nabla T, \quad \boldsymbol{\pi} = -2\eta\overline{\nabla\mathbf{u}}. \tag{50}$$

Нетрудно показать, что эти решения полностью соответствуют результатам первого (небарнеттовского) приближения в методе Чепмена–Энскога [8].

Напомним, что поправка первого приближения к функции распределения в этом методе ищется в форме

$$\Phi_1 = \Phi_t(\mathbf{c}\nabla)\ln T + \Phi_p\overline{\mathbf{cc}} \otimes \overline{\nabla\mathbf{u}}, \tag{51}$$

причем для Φ_t и Φ_p используются разложения вида

$$\mathbf{c}\Phi_t = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} A_{1k}\mathbf{P}^{1k}, \quad \overline{\mathbf{cc}}\,\Phi_p = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}\mathbf{P}^{2k}. \tag{52}$$

Сравнение (51), (52) с разложением (8) для Φ показывает, что коэффициенты $\mathbf{a}^{ik}$ и A_{ik} связаны соотношениями

$$\mathbf{a}^{1k}_{(1)} = \frac{1}{n}A_{1k}\nabla\ln T, \quad \mathbf{a}^{2k}_{(1)} = \frac{1}{n}A_{2k}\overline{\nabla\mathbf{u}}. \tag{53}$$

Тогда из определений (24) следует

$$\lambda = -\sqrt{\frac{5}{4}}\,k\beta^{-1/2}A_{11}, \quad \eta = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,kTA_{20}.$$

Система алгебраических уравнений для отыскания коэффициентов A_{ik} в методе Чепмена–Энскога получается из интегральных уравнений для Φ_t и Φ_p [7, 8] умножением последних соответственно на $f^{(0)}\mathbf{P}^{1n}$ и $f^{(0)}\mathbf{P}^{2n}$ с последующим интегрированием по скоростям. Легко обнаружить, что эти уравнения полностью эквивалентны системе (49), если поставить в последнюю соотношение (53).

Таким образом, коэффициенты A_{11} и A_{20}, через которые выражаются λ и η, находятся (в любом приближении по ξ) и в том, и другом методах фактически из аналогичных систем алгебраических уравнений.

Обратимся теперь к следующему (барнеттовскому) приближению в методе Чепмена–Энскога. Поправка Φ_2 в линеаризованном барнеттовском приближении имеет, как известно, вид [5, 6]

$$\Phi_2 = \boldsymbol{\Phi}^T_B \otimes \frac{\overline{\nabla\nabla}T}{T} + \boldsymbol{\Phi}^u_B \otimes \overline{\nabla\nabla\mathbf{u}} + \Phi^v_B\mathbf{c}\nabla^2\mathbf{u}. \tag{54}$$

Выражение для производства энтропии, получаемое при использовании Φ_1 (51) и Φ_2 (54), записывается в форме [6]

$$T\sigma = -\left[(\mathbf{q}\nabla)\ln T + \boldsymbol{\pi}\otimes\overline{\nabla\mathbf{u}} + \mathbf{J}^T \otimes \frac{\overline{\nabla\nabla}T}{T} + \mathbf{J}^u \otimes \overline{\nabla\nabla\mathbf{u}} + \mathbf{J}^v\nabla^2\mathbf{u}\right], \tag{55}$$

где дополнительные «нефизические» потоки определены как

$$\mathbf{J}^T = nkT\left(\Phi_t \overbracket{\mathbf{cc}}, \Phi\right), \quad \mathbf{J}^v = nkT\left(\left(\Phi_p \frac{c^2}{5} + \frac{\eta}{p}\right)\mathbf{c}, \Phi\right),$$
$$\mathbf{J}^u = nkT\left(\Phi_p \overbracket{\mathbf{ccc}}, \Phi\right). \tag{56}$$

Представлению (55) соответствуют три независимых системы феноменологических уравнений вида

$$\mathbf{q} = -\Lambda_{11}\nabla \ln T - \Lambda_{12}\nabla^2\mathbf{u}, \tag{57а}$$
$$\mathbf{J}^v = -\Lambda_{21}\nabla \ln T - \Lambda_{22}\nabla^2\mathbf{u},$$
$$\boldsymbol{\pi} = -\lambda_{11}\overbracket{\nabla\mathbf{u}} - \lambda_{12}\frac{\overbracket{\nabla\nabla T}}{T}, \tag{57б}$$
$$\mathbf{J}^T = -\lambda_{21}\overbracket{\nabla\mathbf{u}} - \lambda_{22}\frac{\overbracket{\nabla\nabla T}}{T},$$
$$\mathbf{J}^u = -L_{11}\overbracket{\nabla\nabla\mathbf{u}}, \tag{57в}$$

причем перекрестные коэффициенты каждой пары уравнений (57а) и (57б) удовлетворяют соотношениям Онзагера ($\Lambda_{12} = \Lambda_{21}$ и $\lambda_{12} = \lambda_{21}$).

Покажем на примере векторных потоков $\mathbf{q}$ и $\mathbf{J}^v$, что совершенно аналогичные по структуре выражения могут быть получены из приведенных выше результатов метода моментов. Заметим предварительно, что решение уравнения для Φ_B^v, как и для Φ_t, можно искать в виде разложения по полиномам $\mathbf{P}^{1k}$:

$$\mathbf{c}\Phi_B^v = \frac{1}{n}\sum_k B_{1k}\mathbf{P}^{1k}. \tag{58}$$

Как уже отмечалось, матрица коэффициентов L_{ij} в выражении (48) для $\mathbf{J}^{ps} = n\mathbf{a}^{ps}$ является обратной матрицей коэффициентов $\Lambda_{pss'}$. Используя интегральные уравнения метода Чепмена–Энскога для Φ_B^v и Φ_t [6–8], а также разложения (52) и (58), нетрудно получить следующие соотношения:

$$\sum_k \left(\mathbf{c}\left(\beta c^2 - \frac{5}{2}\right), \mathbf{P}^{1k}\right) L_{kn}^{(1)} = A_{1n},$$
$$\sum_k \left(\mathbf{c}\left(\frac{c^2}{5}\Phi_p + \frac{\eta}{p}\right), \mathbf{P}^{1k}\right) L_{kn}^{(1)} = B_{1n}. \tag{59}$$

Запишем теперь выражения для $\mathbf{q}$ и $\mathbf{J}^v$ в виде

$$\mathbf{q} = nkT\left(\mathbf{c}\left(\beta c^2 - \frac{5}{2}\right), \Phi\right) = kT\sum_s\left(\mathbf{c}\left(\beta c^2 - \frac{5}{2}\right), \mathbf{P}^{1s}(\mathbf{W})\right) n\mathbf{a}^{1s} =$$
$$= kT\sum_s\sum_{s'}\left(\mathbf{c}\left(\beta c^2 - \frac{5}{2}\right), \mathbf{P}^{1s}(\mathbf{W})\right) L^{(1)}_{ss'}\mathbf{F}^{1s'},$$
$$\mathbf{J}^v = nkT\left(\mathbf{c}\left(\Phi_p\frac{c^2}{5} + \frac{\eta}{p}\right), \Phi\right) = kT\sum_s\left(\mathbf{c}\left(\Phi_p\frac{c^2}{5} + \frac{\eta}{p}\right), \mathbf{P}^{1s}(\mathbf{W})\right) n\mathbf{a}^{1s} =$$
$$= kT\sum_s\sum_{s'}\left(\mathbf{c}\left(\Phi_p\frac{c^2}{5} + \frac{\eta}{p}\right), \mathbf{P}^{1s}(\mathbf{W})\right) L^{(1)}_{ss'}\mathbf{F}^{1s'}. \qquad (60)$$

С учетом (59) соотношения (60) могут быть переписаны как

$$\mathbf{q} = kT\sum_k A_{1k}\mathbf{F}^{1k}, \quad \mathbf{J}^v = kT\sum_k B_{1k}\mathbf{F}^{1k}. \qquad (61)$$

Используя (52), (58) и явный вид выражений для F^{1k} (47), имеем

$$\mathbf{q} = kTn\left\{\left(c\Phi_t, (\mathbf{c}\nabla)\ln f^{(0)}\right) + \frac{1}{5}\sum_k(\mathbf{c}\Phi_t, \mathbf{c}\mathbf{P}^{2k})\nabla\mathbf{a}^{2k}\right\},$$
$$\mathbf{J}^v = kTn\left\{\left(c\Phi^v_B, (\mathbf{c}\nabla)\ln f^{(0)}\right) + \frac{1}{5}\sum_k(\mathbf{c}\Phi^v_B, \mathbf{c}\mathbf{P}^{2k})\nabla\mathbf{a}^{2k}\right\}. \qquad (62)$$

Используя разложение $\mathbf{a}^{ps}$ по теории возмущений, мы можем теперь заменить члены с производными $\nabla\mathbf{a}^{ps}$ с помощью второго соотношения (53), соответствующего первому приближению. В результате имеем

$$\mathbf{q} = nkT\left\{\left(\mathbf{c}\Phi_t, (\mathbf{c}\nabla)\ln f^{(0)}\right) + \frac{1}{5}\left(\mathbf{c}\Phi_t, \mathbf{c}\,\overline{\mathbf{cc}}\,\Phi_p\right)\nabla\overline{\nabla\mathbf{u}}\right\},$$
$$\mathbf{J}^v = nkT\left\{\left(\mathbf{c}\Phi^v_B, (\mathbf{c}\nabla)\ln f^{(0)}\right) + \frac{1}{5}\left(\mathbf{c}\Phi^v_B, \mathbf{c}\,\overline{\mathbf{cc}}\,\Phi_p\right)\nabla\overline{\nabla\mathbf{u}}\right\}. \qquad (63)$$

Используя выражение (3), удерживая в $\nabla\ln f^{(0)}$ слагаемое с $\nabla p = \eta\Delta\mathbf{u}$ и выделяя в членах с $\overline{\nabla\nabla}\mathbf{u}$ векторную часть, приходим к следующему окончательному результату:

$$\mathbf{q} = nk\left[\left(\mathbf{c}\Phi_t, \mathbf{c}\left(\beta c^2 - \frac{5}{2}\right)\right)\nabla T + \left(\mathbf{c}\Phi_t, \mathbf{c}\left(\Phi_p\frac{c^2}{5} + \frac{\eta}{p}\right)\right)\nabla^2\mathbf{u}\right],$$
$$\mathbf{J}^v = nk\left[\left(\mathbf{c}\Phi^v_B, \mathbf{c}\left(\beta c^2 - \frac{5}{2}\right)\right)\nabla T + \left(\mathbf{c}\Phi_t, \mathbf{c}\left(\Phi^v_B\frac{c^2}{5} + \frac{\eta}{p}\right)\right)\nabla^2\mathbf{u}\right]. \qquad (64)$$

Легко заметить, что полученные выражения полностью согласуются с (57а). При этом в соответствии с определением λ [7, 8] имеем $\Lambda_{11} = \lambda T$. Докажем теперь симметрию кинетических коэффициентов. Действительно,

$$\left(\mathbf{c}\Phi^v_B, \mathbf{c}\left(\beta c^2 - \frac{5}{2}\right)\right) = \left(\mathbf{c}\Phi^v_B, L(\mathbf{c}\Phi_t)\right),$$

где использовано известное [7, 8] интегральное уравнение для Φ_t.

Благодаря условию симметрии (6), имеем

$$\left(\mathbf{c}\Phi_B^v, L(\mathbf{c}\Phi_t)\right) = \left(\mathbf{c}\Phi_t, L(\mathbf{c}\Phi_B^v)\right) = \left(\mathbf{c}\Phi_t, \mathbf{c}\left(\Phi_p \frac{c^2}{5} + \frac{\eta}{p}\right)\right),$$

где использовано также интегральное уравнение для $\mathbf{c}\Phi_B^v$ [6]. Из полученных соотношений следует, что $\Lambda_{12} = \Lambda_{21}$.

С помощью преобразований, аналогичных приведенным выше, нетрудно показать, что и выражения для тензорных потоков π и $\mathbf{J}^T$ могут быть представлены в виде линейных соотношений (57б). При этом для коэффициентов λ в этих соотношениях получаем $\lambda_{11} = 2\eta$ и

$$\begin{aligned} \lambda_{21} = \lambda_{12} &= \frac{mn}{5}\left(\mathbf{cc} \otimes \Phi_B^T\right) = \frac{kT}{5}\left(\Phi_t \mathbf{cc} \otimes \mathbf{cc}\Phi_p\right), \\ \lambda_{22} &= \frac{kT}{5}\left(\Phi_t \mathbf{cc} \otimes \Phi_B^T\right). \end{aligned} \tag{65}$$

Приведенные результаты полностью замыкают схему получения феноменологических соотношений неравновесной термодинамики на уровне метода Чепмена–Энскога из линеаризованных уравнений моментов метода Грэда.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №97-01-00611 и №95-03-08092).

Литература

1. С. де Гроот, П. Мазур, *Неравновесная термодинамика*, Мир, Москва (1964).
2. Дж. Кайзер, *Статистическая термодинамика неравновесных процессов*, Мир, Москва (1990).
3. В. И. Ролдугин, ДАН СССР **263**, 606 (1982).
4. V. I. Roldughin, J. Non- Equilibr. Thermodyn. **9**, 71 (1984).
5. I. Kuscer, Physica A **133**, 397 (1985).
6. В. М. Жданов, В. И. Ролдугин, ЖЭТФ **109**, 1267 (1996).
7. С. Чепмен, Т. Каулинг, *Математическая теория неоднородных газов*, ИИЛ, Москва (1960).
8. Дж. Ферцигер, Г. Капер, *Математическая теория процессов переноса в газах*, Мир, Москва (1976).
9. H. Grad, Comm. Pure and Appl. Math. **2**, 331 (1949).
10. H. Grad, in: *Handbuch der Physik*, Vol. 12, Springer-Verlag, Berlin (1958), p. 205.
11. I. Muller, Z. Phys. **198**, 329 (1967).
12. D. Jou, J. Casas-Vazquez, and G. Lebon, Rep. Progr. Phys. **51**, 1105 (1988).
13. D. Jou, J. Casas-Vazquez, and G. Lebon, *Extended Irreversible Thermodynamics*, Springer-Verlag, Berlin (1993).
14. R. M. Velasco and L. S. Garsia-Colin, J. Stat. Phys. **69**, 217 (1992).
15. R. M. Velasco and L. S. Garsia-Colin, J. Non-Equilibr. Thermodyn. **18**, 157 (1993).
16. L. Waldmann, in: *Handbuch der Physik*, Vol. 12, Springer-Verlag, Berlin (1958), p. 295.
17. F. R. W. McCourt, J. J. M. Beenakker, W. E. Kohler, and I. Kuscer, *Non-Equilibrium Phenomena in Polyatomic Gases*, Vol. 1, Clarendon Press, Oxford (1990).
18. H. Grad, Phys. Fluids **6**, 147 (1963).
19. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979).
20. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).