

ДИНАМИКА ХОЛОДНЫХ АТОМОВ В КВАДРУПОЛЬНОЙ МАГНИТНОЙ ЛОВУШКЕ С ВРАЩАЮЩИМСЯ ПОТЕНЦИАЛОМ

В. Г. Миногин, М. В. Субботин, П. Н. Мелентьев*

*Институт спектроскопии Российской академии наук
141092, Троицк, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 10 ноября 1997 г.

Рассмотрена динамика атомов в квадрупольной магнитной ловушке с вращающимся потенциалом. Показано, что при типичных экспериментальных параметрах ловушки вращающееся магнитное поле вызывает высокочастотную модуляцию импульсов атомов с амплитудой, сравнимой с ширинами импульсных распределений для низших колебательных состояний атомов в усредненном по времени потенциале. Найдены квантово-статистические распределения атомов по импульсам и координатам. Установлено, что при температурах, значительно превышающих эффективную температуру колебаний атомов в ловушке, квантово-статистические распределения координат и импульсов являются гауссовскими. Вместе с тем найдено, что при температурах атомов, сравнимых с эффективной температурой колебаний, квантово-статистическое импульсное распределение имеет кольцевую форму в плоскости симметрии ловушки, обусловленную глубокой модуляцией импульсов атомов вращающимся магнитным полем.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы наблюдается значительный интерес к развитию экспериментальных методов пленения и глубокого охлаждения атомов в магнитных ловушках с целью наблюдения квантово-статистических эффектов, в том числе бозе-эйнштейновской конденсации [1–15]. Среди различных типов магнитных ловушек, используемых для получения ультрахолодных ансамблей атомов, одной из первых и практически важных является квадрупольная магнитная ловушка с орбитирующим (вращающимся) потенциалом (МЛОП). В данном типе магнитной ловушки удерживающее атомы магнитное поле состоит из двух частей. Стационарное квадрупольное магнитное поле создает потенциал, локализующий в центральной части ловушки атомы, имеющие отрицательную проекцию магнитного момента на локальное направление вектора напряженности магнитного поля. Созданная квадрупольным магнитным полем потенциальная яма не является, однако, совершенной. Вблизи дна потенциальной ямы напряженность квадрупольного магнитного поля равна нулю, и движущиеся в этой области атомы могут изменить знак проекции магнитного момента на вектор магнитного поля в результате неадиабатических переходов Майорана и покинуть ловушку [16]. Чтобы исключить данный канал потери атомов, используется второе, однородное, магнитное поле, которое вращается с достаточно высокой частотой в плоскости, перпендикулярной оси симметрии квадрупольного поля. Наличие этого вращающегося поля приводит к тому, что потенциальная яма вращается вокруг оси симметрии ловушки, представляя собой

* E-mail: subbotin@lss.isan.troitsk.ru

орбитирующий потенциал. Среднее по времени значение орбитирующего потенциала в центре ловушки оказывается отличным от нуля, что препятствует потере атомов из ловушки за счет переходов Майорана [9].

До сих пор движение отдельных атомов в МЛОП описывалось в литературе с помощью усредненного по времени стационарного гармонического потенциала [9]. Однако при таком подходе пренебрегается быстрыми, по сравнению с собственными колебательными частотами ловушки, осцилляциями импульса атома, связанными с вращающимся магнитным полем.

В настоящей статье мы рассматриваем динамику невзаимодействующих атомов в МЛОП на основе нестационарного уравнения Шредингера, учитывающего наличие осциллирующего во времени магнитного потенциала.

Анализ динамики невзаимодействующих атомов в МЛОП показывает, что вращающееся магнитное поле вызывает осцилляции импульсов атомов с частотой вращающегося поля и амплитудой, которая при типичных значениях параметров ловушки сравнима с ширинами импульсных распределений атомов в усредненном по времени гармоническом потенциале. В то время как квантово-статистическое распределение координат атомов остается гауссовским при любых температурах, импульсное распределение приобретает при низких температурах кольцевую структуру в плоскости симметрии ловушки. Кольцевая структура импульсного распределения становится заметной при температурах ансамбля атомов порядка эффективной температуры колебаний атомов в усредненном по времени гармоническом потенциале.

2. МАГНИТНЫЙ ДИПОЛЬНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

В центральной области МЛОП полное магнитное поле \mathbf{V}_t состоит из двух частей:

$$\mathbf{V}_t = \mathbf{b} + \mathbf{V}, \quad (1)$$

где \mathbf{b} есть собственно квадрупольное стационарное поле [16],

$$\mathbf{b} = -\frac{1}{2}a(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y) + az\mathbf{e}_z, \quad (2)$$

выраженное в (2) через градиент a квадрупольного поля в точке $x = y = z = 0$, \mathbf{e}_i — единичные векторы вдоль осей $i = x, y, z$, а \mathbf{V} — однородное магнитное поле, вращающееся с частотой Ω в плоскости xy [16]:

$$\mathbf{V} = B_0(\mathbf{e}_x \cos \Omega t + \mathbf{e}_y \sin \Omega t), \quad (3)$$

B_0 — амплитуда вращающегося поля.

В поле (1) атом, имеющий отрицательную проекцию μ_t магнитного момента μ на направление поля, $\mu_t = -\mu$ ($\mu > 0$), обладает дополнительной потенциальной энергией $U = U(\mathbf{r}, t)$:

$$U = -\mu\mathbf{V}_t = \mu B_t = \mu \sqrt{\left(B_0 \cos \Omega t - \frac{1}{2}ax\right)^2 + \left(B_0 \sin \Omega t - \frac{1}{2}ay\right)^2 + a^2z^2}. \quad (4)$$

Как следует из (4), зависящий от времени потенциал магнитодипольного взаимодействия вращается вокруг оси z так, что его минимум движется в плоскости xy по окружности радиуса $r_0 = 2B_0/a$.

Для анализа движения атомов в потенциале (4) удобно ввести цилиндрические координаты $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, z и записать потенциал в форме, отвечающей стандартному виду подынтегрального выражения для эллиптических интегралов второго рода:

$$U = U_m \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \xi}, \quad (5)$$

где U_m — максимальное значение осциллирующего во времени потенциала, величина e , имеющая в теории эллиптических интегралов название «модуль», определяет глубину модуляции осциллирующего потенциала, ξ есть эффективная фаза:

$$U_m = U_L \sqrt{(1 + \rho/r_0)^2 + 4z^2/r_0^2}, \quad (6)$$

$$e^2 = \frac{4\rho/r_0}{(1 + \rho/r_0)^2 + 4z^2/r_0^2}, \quad (7)$$

$$\xi = \frac{1}{2}(\Omega t - \varphi - \pi). \quad (8)$$

В (6) $U_L = \mu B_0$ — энергия магнитного взаимодействия в центральной точке ловушки $\mathbf{r} = 0$, определяющая частоту ларморовской прецессии

$$\omega_L = \mu B_0 / \hbar. \quad (9)$$

Отметим, что квадрат модуля не превышает единицы. Максимальное значение квадрата модуля

$$(e^2)_{max} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4z^2/r_0^2}} \leq 1 \quad (10)$$

достигается при заданном z на окружности радиуса $\rho = \rho_m$:

$$\rho_m = r_0 \sqrt{1 + 4z^2/r_0^2}. \quad (11)$$

Потенциал (5) удобно представить в виде ряда Фурье:

$$U = U_m \left[\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \cos n(\Omega t - \varphi) \right], \quad (12)$$

где коэффициенты Фурье ($s = 0, 1, 2, \dots$)

$$a_s = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \xi} \cos(2s\xi) d\xi \quad (13)$$

выражаются через эллиптические интегралы первого и второго рода $K(e)$ и $E(e)$. Первые три коэффициента Фурье есть

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{4}{\pi} E(e), \\ a_1 &= \frac{4}{3\pi e^2} [(2 - e^2)E(e) - 2(1 - e^2)K(e)], \\ a_2 &= -\frac{4}{15\pi e^4} [(16 - 16e^2 + e^4)E(e) - 8(2 - 3e^2 + e^4)K(e)]. \end{aligned} \quad (14)$$

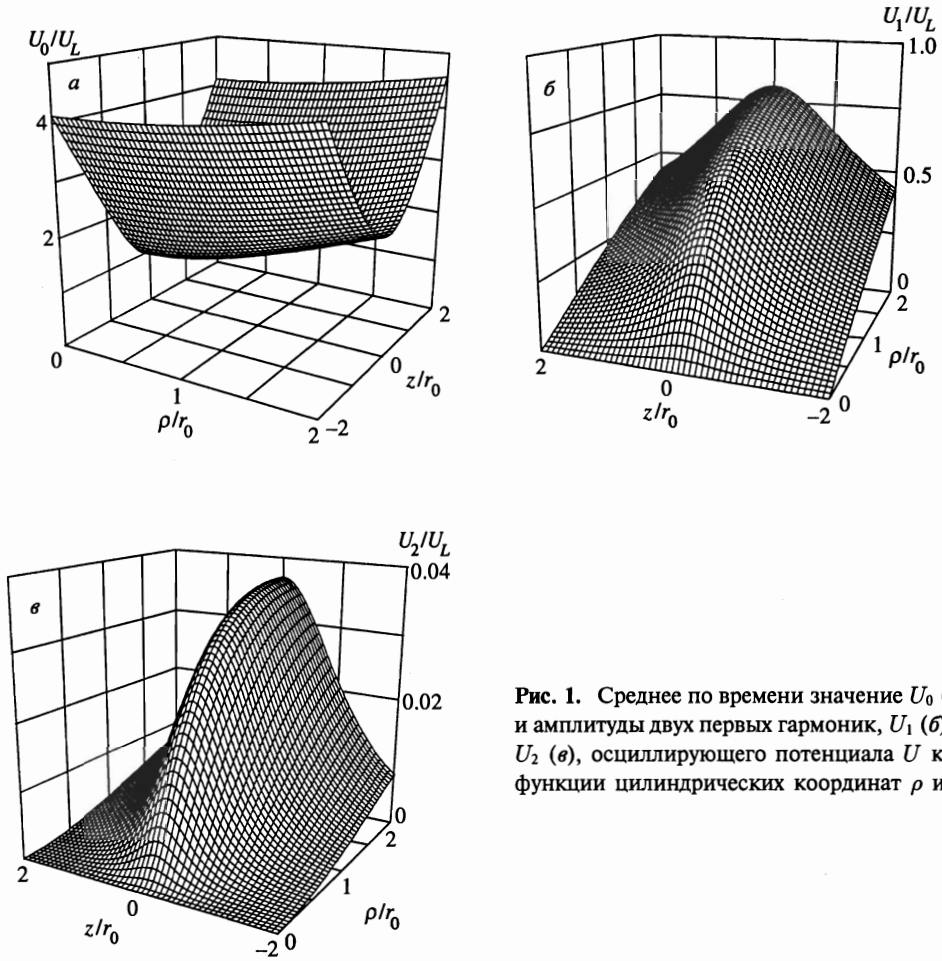


Рис. 1. Среднее по времени значение U_0 (а) и амплитуды двух первых гармоник, U_1 (б) и U_2 (в), осциллирующего потенциала U как функции цилиндрических координат ρ и z

Заметим теперь, что в силу ограниченности модуля e , согласно выражению (10), для коэффициентов Фурье достаточно ограничиться выражениями для небольших значений модуля, $e \leq 1$. Используя известные разложения полных эллиптических интегралов $E(e)$, $K(e)$ в ряд по степеням e^2 и ограничиваясь четвертыми степенями e можно записать для потенциала (5) приближенное выражение

$$U = U_0 - U_1 \cos(\Omega t - \varphi) - U_2 \cos 2(\Omega t - \varphi), \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{2} U_m a_0 = U_m \left(1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{64} e^4 \right), \\ U_1 &= U_m a_1 = \frac{1}{4} U_m e^2 \left(1 + \frac{1}{4} e^2 \right), \\ U_2 &= -U_m a_2 = \frac{1}{64} U_m e^4. \end{aligned} \tag{16}$$

Зависимость функций U_0, U_1, U_2 от координат ρ и z показана на рис. 1.

Ниже мы воспользуемся магнитодипольным потенциалом в форме (15) для установления уравнений движения атома в МЛОП.

3. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Динамика атома в потенциале (15) описывается уравнением Шредингера, которое в выбранной системе координат имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \Phi + U_0 \Phi - [U_1 \cos(\Omega t - \varphi) + U_2 \cos 2(\Omega t - \varphi)] \Phi, \quad (17)$$

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Напомним, что амплитуды U_0, U_1, U_2 гармоник магнитного потенциала являются функциями координат ρ и z .

В уравнении (17) две части магнитного потенциала играют разные роли. Постоянный во времени потенциал U_0 вызывает медленные движения атома с характерными временами $\tau_{slow} \simeq 1/\omega$, где величина ω определяет характерные собственные частоты осцилляций атома в потенциале U_0 . Наличие осциллирующих частей U_1 и U_2 потенциала приводит к быстрым осцилляциям импульса и координаты атома с характерным масштабом времени $\tau_{fast} \simeq 1/\Omega$.

Для того чтобы явно выделить быстрые движения атома, удобно перейти в представление, аналогичное стандартному представлению взаимодействия для не зависящих от времени потенциалов. Для уравнения (17) соответствующий переход осуществляется следующей заменой волновой функции:

$$\Phi = \Phi \exp \left[\frac{i}{\hbar \Omega} \left(U_1 \sin(\Omega t - \varphi) + \frac{1}{2} U_2 \sin 2(\Omega t - \varphi) \right) \right]. \quad (18)$$

После подстановки (18) в (17) в уравнении движения в явном виде возникают члены, отвечающие быстрым осцилляциям импульса и координаты атома. Одновременно возникает добавка U_{ad} к не зависящему от времени потенциалу U_0 , связанная со средней энергией быстрых колебаний атома:

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \Phi + (U_0 + U_{ad}) \Phi -$$

$$-\frac{i\hbar}{2M\Omega} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U_1}{\partial \rho} \right) - \frac{U_1}{\rho^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} \right] \sin(\Omega t - \varphi) \Phi +$$

$$+\frac{i\hbar}{4M\Omega^2} \left[\frac{\partial U_1}{\partial \rho} \frac{\partial U_2}{\partial \rho} + \frac{2U_1 U_2}{\rho^2} + \frac{U_1}{\partial z} \frac{\partial U_2}{\partial z} \right] \cos(\Omega t - \varphi) \Phi -$$

$$-\frac{i\hbar}{4M\Omega} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U_2}{\partial \rho} \right) - \frac{4U_2}{\rho^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} \right] \sin 2(\Omega t - \varphi) \Phi -$$

$$-\frac{1}{4M\Omega^2} \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial \rho} \right)^2 - \frac{U_1}{\rho^2} + \left(\frac{\partial U_1}{\partial z} \right)^2 \right] \cos 2(\Omega t - \varphi) \Phi -$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{i\hbar}{M\Omega} \left[\frac{\partial U_1}{\partial \rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\partial U_1}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] \sin(\Omega t - \varphi) + \frac{i\hbar U_1}{M\Omega \rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \cos(\Omega t - \varphi) - \\
 & - \frac{i\hbar}{2M\Omega} \left[\frac{\partial U_2}{\partial \rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\partial U_2}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] \sin 2(\Omega t - \varphi) + \frac{i\hbar U_2}{M\Omega \rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \cos 2(\Omega t - \varphi), \quad (19)
 \end{aligned}$$

где дополнительный не зависящий от времени потенциал

$$U_{ad} = \frac{1}{4M\Omega^2} \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial U_2}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{U_1^2 + U_2^2}{\rho^2} + \left(\frac{\partial U_1}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial U_2}{\partial z} \right)^2 \right]. \quad (20)$$

4. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ХОЛОДНЫХ АТОМОВ

Рассмотрим на основе выведенного выше уравнения движения динамику холодных атомов, т.е. атомов, находящихся вблизи дна потенциальной ямы $U_0 + U_{ad}$. Для холодных атомов координаты ρ и z удовлетворяют условию $\rho, z \ll r_0$.

При малых смещениях атома от центра ловушки можно разложить амплитуды гармоник U_0, U_1, U_2 в ряды по степеням малых координат ρ и z . Ограничиваясь разложением до второго порядка по степеням ρ и z , получаем

$$\begin{aligned}
 U_0 &= U_L + \frac{1}{2}k(\rho^2 + 8z^2), \\
 U_1 &= 2kr_0\rho, \\
 U_2 &= \frac{1}{2}k\rho^2.
 \end{aligned} \quad (21)$$

Константа упругости для гармонической части не зависящего от времени потенциала есть

$$k = U_L/2r_0^2. \quad (22)$$

Согласно (21), потенциал U_0 вызывает гармонические колебания атома вдоль осей x, y, z с частотами

$$\begin{aligned}
 \omega_x &= \omega_y = \omega_\rho = \sqrt{k/M}, \\
 \omega_z &= 2\sqrt{2}\omega_\rho.
 \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь следует отметить, что в соответствии с основной идеей магнитной ловушки с орбитирующим потенциалом три основные частоты, ω_ρ, Ω и ω_L предполагаются связанными неравенствами

$$\omega_\rho \ll \Omega \ll \omega_L. \quad (24)$$

Согласно уравнению (19), левое неравенство в (24) необходимо, чтобы действие среднего по времени потенциала $U_0 + U_{ad}$ преобладало над действием гармоник потенциала, U_1 и U_2 . Правое неравенство в (24) исключает неадиабатические переходы Майорана за счет вращения магнитного поля \mathbf{B} . В типичных экспериментальных условиях

$\omega_p/2\pi \sim 10\text{--}100$ Гц, $\Omega/2\pi \sim 10^4$ Гц, $\omega_L/2\pi \sim 10^7$ Гц, так что $\omega_p/\Omega \sim 10^{-2}\text{--}10^{-3}$, $\Omega/\omega_L \sim 10^{-3}$ [15].

Подставим теперь значения гармоник потенциала (21) в (19), (20). Дополнительный потенциал в случае холодных атомов оказывается весьма малым по сравнению с потенциалом U_0 :

$$U_{ad} = \frac{2k^2 r_0^2}{M\Omega^2} \left(1 + \frac{\rho^2}{r_0^2}\right) = \left(U_L + \frac{1}{8}k\rho^2\right) \left(\frac{\omega_p}{\Omega}\right)^2 \ll U_0. \quad (25)$$

Пренебрегая данной малой поправкой к основному потенциалу U_0 , из (19) получим уравнение движения холодных атомов:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = & -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \Phi + U_0 \Phi + \frac{k^2 r_0}{M\Omega^2} \rho \Phi \cos(\Omega t - \varphi) - \\ & - i \frac{2\hbar k r_0}{M\Omega} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \sin(\Omega t - \varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \cos(\Omega t - \varphi) \right] - \\ & - i \frac{\hbar k \rho}{2M\Omega} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \sin 2(\Omega t - \varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \cos 2(\Omega t - \varphi) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Обратим далее внимание на два обстоятельства. Третий член в уравнении (26), определяющий осциллирующий потенциал атома в представлении взаимодействия, имеет такую же структуру, как третий член в уравнении (17). В связи с этим он мог бы быть исключен из уравнения (26) вторичным переходом в представление взаимодействия, т. е. заменой вида (18):

$$\Phi = \bar{\Phi} \exp \left[-i \frac{k^2 r_0}{\hbar M \Omega^3} \rho \sin(\Omega t - \varphi) \right]. \quad (27)$$

Фактически, однако, необходимости в замене (27) не возникает, поскольку исключение третьего члена в (26) приводит к поправкам, которые малы по сравнению с другими членами как $(\omega_p/\Omega)^2 \ll 1$. Данное обстоятельство непосредственно вытекает из того, что отношение показателя экспоненты в (27) к первому члену показателя экспоненты в (18) есть

$$\frac{k^2 r_0 \rho}{\hbar M \Omega^3} \frac{U_1}{\hbar \Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_p}{\Omega}\right)^2 \ll 1. \quad (28)$$

Таким образом, третий член в (26) может быть просто опущен как весьма малый по сравнению с другими членами. Учитывая далее, что амплитуда гармонических колебаний атома в потенциале U_0 из (21) имеет порядок амплитуды нулевых колебаний ρ_0 ,

$$\rho_0 = \sqrt{\hbar/M\omega_p}, \quad (29)$$

можно видеть, что члены в уравнении (26), осциллирующие с удвоенной частотой 2Ω , малы по сравнению с членами, осциллирующими с частотой Ω , в отношении

$$\frac{\rho}{2r_0} \simeq \frac{\rho_0}{2r_0} = \sqrt{\frac{\omega_p}{2\omega_L}} \ll 1. \quad (30)$$

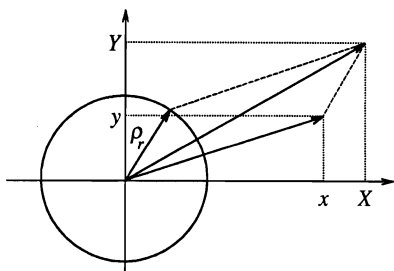


Рис. 2. Истинные координаты атома x и y и эффективные координаты X и Y в плоскости вращения потенциала

При экспериментальных значениях частот левая часть (30) имеет порядок 10^{-3} . Пренебрегая в (26) членами, осциллирующими с частотой 2Ω , и возвращаясь в декартову систему координат x, y, z , можно теперь записать весьма простое уравнение:

$$i\hbar \left[\frac{\partial\Phi}{\partial t} + v_r \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \sin\Omega t - \frac{\partial\Phi}{\partial y} \cos\Omega t \right) \right] = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta\Phi + U_0\Phi, \tag{31}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

где, как можно видеть, величина

$$v_r = \frac{p_r}{M} = \frac{2\omega_\rho^2 r_0}{\Omega} = \sqrt{2 \frac{\omega_L \omega_\rho}{\Omega^2}} v_0, \tag{32}$$

выраженная через скорость нулевых колебаний

$$v_0 = \frac{p_0}{M} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_\rho}{M}} \tag{33}$$

($p_0 = \sqrt{M\hbar\omega_\rho}$ — импульс нулевых колебаний), определяет скорость быстрых осцилляций атома, обусловленных быстрыми осцилляциями потенциала. Подчеркнем здесь, что поскольку в уравнении (31) опущен член, осциллирующий с удвоенной частотой вращения потенциала, то совместно с уравнением (31) должна использоваться полная волновая функция (18), в которой фаза осциллирует только на частоте Ω , т. е. функция

$$\Psi = \Phi \exp \left[i \frac{p_r}{\hbar} \rho \sin(\Omega t - \varphi) \right]. \tag{34}$$

Заметим теперь, что с формальной точки зрения левая часть уравнения (31) имеет вид полной (конвективной) производной по времени, учитывающей изменение волновой функции Φ как во времени, так и за счет осцилляций атома со скоростями $v_r \sin \Omega t$ и $-v_r \cos \Omega t$ соответственно по осям x и y . Принимая во внимание данные обстоятельства, можно ввести новые координаты X, Y и новое время T соотношениями

$$\begin{aligned} X &= x + \rho_r \cos \Omega t, \\ Y &= y + \rho_r \sin \Omega t, \\ T &= t, \end{aligned} \tag{35}$$

где величина ρ_r имеет смысл амплитуды быстрых изменений координаты атома (рис. 2),

$$\rho_r = \frac{v_r}{\Omega} = 2 \left(\frac{\omega_\rho}{\Omega} \right)^2 r_0 = \rho_0 \frac{\omega_\rho}{\Omega} \sqrt{2 \frac{\omega_L \omega_\rho}{\Omega^2}}. \quad (36)$$

В новых переменных уравнение движения (31) после пренебрежения в правой части поправками к потенциалу порядка $\rho_r/\rho_0, (\rho_r/\rho_0)^2 \ll 1$, сводится к уравнению асимметричного трехмерного осциллятора:

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial T} = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \Phi + U_0 \Phi, \quad (37)$$

где лапласиан определен по координатам X, Y, z :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Обратим теперь внимание на то, что при указанных выше типичных значениях частот безразмерный параметр

$$S = \sqrt{\frac{\omega_L \omega_\rho}{\Omega^2}} \quad (38)$$

имеет порядок единицы. В связи с этим быстрая пространственная модуляция волновой функции за счет осцилляций эффективных координат X, Y , согласно (35), имеет малую относительную глубину порядка $\rho_r/\rho_0 \sim \omega_\rho/\Omega \ll 1$. Пренебрегая данной весьма малой модуляцией, следует считать, что эффективные координаты X, Y совпадают с истинными координатами атома x, y и, соответственно, считать, что функция Φ определяется уравнением трехмерного осциллятора (37), в котором лапласиан уже определен, как обычно, по координатам x, y, z .

Уравнение (37) является окончательным уравнением движения холодных атомов. В данном уравнении не содержится информации о мелкой высокочастотной модуляции волновой функции в пространственном масштабе ρ_r . Вместе с тем, в выражении для полной волновой функции (34) сохранена информация о быстрой модуляции скорости (импульса) атома, относительная глубина которой имеет порядок единицы. Последнее обстоятельство, как мы увидим в следующем разделе, приводит к своеобразной кольцевой форме статистического распределения холодных атомов по скоростям (импульсам).

5. КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В декартовых координатах x, y, z уравнение (37) имеет известные стационарные решения:

$$\Phi = \Phi_{klq}(\mathbf{r}, t) = \chi_k(x) \chi_l(y) \chi_q(z) \exp[-i(\omega_L + E_{klq}/\hbar)t], \quad (39)$$

где $\chi_\alpha(\xi) = \chi_k(x), \chi_l(y)$ есть собственные функции линейных осцилляторов по осям $\xi = x, y, \alpha = k, l = 0, 1, 2, \dots$:

$$\chi_\alpha(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi} \rho_0}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\rho_0^2}\right) H_\alpha\left(\frac{\xi}{\rho_0}\right), \quad (40)$$

$H_\alpha(\eta)$ — полином Эрмита, а собственные функции $\chi_q(z)$ линейного осциллятора по оси z определяются выражением (40), в котором следует сделать замены $\xi \rightarrow z$ и $\rho_0 \rightarrow \rho_{0z} = \rho_0/\sqrt{2\sqrt{2}}$. Собственные значения энергии для трехмерного асимметричного осциллятора есть

$$E_{klq} = \hbar\omega_\rho(k + l + 1/2) + 2\sqrt{2}\hbar\omega_\rho(q + 1/2). \quad (41)$$

Полные волновые функции в координатном представлении, согласно (34), имеют смысл квазистационарных волновых функций:

$$\Psi_{klq}(\mathbf{r}, t) = \chi_k(x)\chi_l(y)\chi_q(z) \exp\left[i\frac{p_r}{\hbar}(x \sin \Omega t - y \cos \Omega t) - i\omega_L t - \frac{iE_{klq}t}{\hbar}\right]. \quad (42)$$

В импульсном представлении,

$$\Phi(\mathbf{p}, t) = (2\pi\hbar)^{-3/2} \int \Phi(\mathbf{r}, t) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{r}}{\hbar}\right) d^3r, \quad (43)$$

квазистационарные полные волновые функции есть

$$\Phi_{klq}(\mathbf{p}, t) = \chi_k(p_x - p_r \sin \Omega t)\chi_l(p_y + p_r \cos \Omega t)\chi_q(p_z) \exp[-i\omega_L t - iE_{klq}t/\hbar], \quad (44)$$

где $\chi_\alpha(p)$ есть собственные функции линейных осцилляторов по осям x и y в импульсном представлении. Данные функции явно отражают высокочастотную модуляцию импульса атома с относительной глубиной $p_r/p \simeq 1$.

Рассмотрим теперь на основе (42), (44) квантово-статистические распределения координаты и импульса атома. При заданной температуре T статистическое распределение координаты атома

$$w(\mathbf{r}) = w(x)w(y)w(z) \quad (45)$$

определяется известной формулой Блоха [17]. Распределение координаты атома по осям $\zeta = x, y$ есть [18]:

$$w(\zeta) = \frac{\sum_{\alpha=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{\hbar\omega_\rho(\alpha + 1/2)}{k_B T}\right] \chi_\alpha^2(\zeta)}{\sum_{\alpha=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{\hbar\omega_\rho(\alpha + 1/2)}{k_B T}\right]} = \frac{1}{\sqrt{\pi} a_0} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{a_0^2}\right), \quad (46)$$

где

$$a_0 = \rho_0 \sqrt{\text{cth}(\hbar\omega_\rho/2k_B T)} \quad (47)$$

есть полуширина распределения. Распределение координаты атома вдоль оси z определяется теми же формулами (46), (47), в которых следует сделать замены $\xi \rightarrow z$, $\rho_0 \rightarrow \rho_{0z} = \rho_0/\sqrt{2\sqrt{2}}$, $\omega_\rho \rightarrow 2\sqrt{2}\omega_\rho$.

Квантово-статистическое распределение импульса атома определяется выражением, содержащим дополнительное усреднение по высокочастотным осцилляциям импульса:

$$w(\mathbf{p}) = \langle w(p_x, t)w(p_y, t) \rangle_t w(p_z), \quad (48)$$

где парциальные распределения по осям x, y, z , согласно формуле Блоха, есть

$$\begin{aligned} w(p_x, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi} q_0} \exp \left[-\frac{(p_x - p_r \sin \Omega t)^2}{q^2} \right], \\ w(p_y, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi} q_0} \exp \left[-\frac{(p_y + p_r \cos \Omega t)^2}{q^2} \right], \\ w(p_z, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi} q_{0z}} \exp \left[-\frac{p_z^2}{q_{0z}^2} \right], \end{aligned} \quad (49)$$

где

$$\begin{aligned} q_0 &= p_0 \sqrt{\text{cth}(\hbar\omega_\rho/2k_B T)}, \\ q_{0z} &= 2\sqrt{2} p_0 \sqrt{\text{cth}(\sqrt{2} \hbar\omega_\rho/2k_B T)}. \end{aligned} \quad (50)$$

Для двумерного распределения импульса в плоскости xy с учетом усреднения по времени можно записать выражение

$$\begin{aligned} w(p_x, p_y) &= w(p) = \langle w(p_x, t)w(p_y, t) \rangle_t = \\ &= \frac{1}{\pi q_0^2} \exp \left[-\frac{p^2 + p_r^2}{q_0^2} \right] \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \text{ch} \left(2\frac{pp_r}{q_0^2} \sin \tau \right) d\tau, \end{aligned} \quad (51)$$

которое, как и все указанные выше распределения, нормировано на один атом:

$$\int w(p_x, p_y) dp_x dp_y = 2\pi \int w(p) p dp = 1. \quad (52)$$

Распределение координаты при этом, согласно (45), (46), имеет обычный гауссовский вид.

Распределения импульса атома в плоскости xy для трех значений температур показаны на рис. 3. Как можно видеть из данного рисунка, при низких температурах, когда глубина высокочастотной модуляции импульса становится близкой к единице, распределение приобретает кольцевую структуру в плоскости xy .

Согласно (52), кольцевая структура импульсного распределения возникает, когда при уменьшении температуры безразмерный параметр

$$d = \frac{p_r}{q_0} = S \sqrt{2 \text{th} \frac{\hbar\omega_\rho}{2k_B T}} \quad (53)$$

(S — безразмерный параметр) увеличивается до значений порядка единицы. Данное обстоятельство также прямо видно из представления статистического распределения в виде ряда по степеням импульсов:

$$w(p_x, p_y) = w(p) = \frac{1}{\pi q_0^2} \exp \left(-\frac{p^2 + p_r^2}{q_0^2} \right) \left(1 + \frac{p_r^2}{q_0^4} p^2 + \frac{p_r^4}{4q_0^8} p^4 + \dots \right). \quad (54)$$

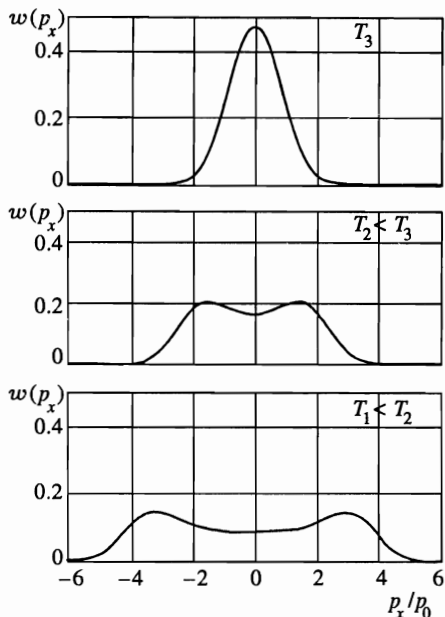


Рис. 3. Квантово-статистические распределения компоненты импульса для одного атома. Распределения отвечают температурам $T_1 = \hbar\omega_\rho/2k_B$, $T_2 = 2\hbar\omega_\rho/k_B$, $T_3 = 25\hbar\omega_\rho/k_B$ и параметру $S = 3$

6. СПЕКТР АНГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

До сих пор движение атомов в ловушке рассматривалось в гармоническом приближении (21). Рассмотрим теперь спектр собственных частот атома в ловушке с учетом ангармонизма.

Учитывая для потенциала U_0 в (16) разложение в ряд до восьмого порядка по e :

$$U_0 = U_m \left[1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 - 7 \left(\frac{5}{128} \right)^2 e^8 \right], \quad (55)$$

и раскладывая далее выражение (55) в ряд до четвертого порядка по малым смещениям $\rho/r_0, z/r_0$, получаем

$$U_0 = U_L + \frac{1}{2}k(\rho^2 + 8z^2) + \frac{k}{r_0^2} \left(\frac{1}{32}\rho^4 + \rho^2z^2 - 4z^4 \right). \quad (56)$$

Для осциллирующих частей потенциала, U_1 и U_2 , достаточно ограничиться, как и ранее, их выражениями (21).

Как можно видеть из предыдущих разделов, для учета ангармонизма колебаний атома достаточно решить уравнение (37) с потенциалом (56). Как обычно, используем для этих целей стандартную теорию возмущений. Поскольку ангармонический член в (56) зависит только от цилиндрических координат ρ и z , то в данном случае удобно рассматривать в качестве решения нулевого приближения решение уравнения (37) в цилиндрических координатах ρ, z, φ . Запишем, таким образом, вместо решений (39) решения

$$\Phi_{nmq}(\rho, \varphi, z) = u_{nm}(\rho)e^{im\varphi}\chi_q(z) \exp[-i(\omega_L + E_{nmq}/\hbar)t], \quad (57)$$

где радиальные волновые функции ($n = 0, 1, 2, \dots$; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$u_{nm}(\rho) = \sqrt{\frac{n!}{\pi(n+|m|)!}} \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{|m|} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\rho_0^2}\right) L_n^{|m|}\left(\frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right), \quad (58)$$

$L_n^{|m|}(\eta)$ — присоединенные полиномы Лагерра, а величина ρ_0 определена в (29). Собственные значения энергии для решений (57) есть

$$E_{nmq} = \hbar\omega_\rho(2n + |m| + 1) + 2\sqrt{2}\hbar\omega_\rho(q + 1/2). \quad (59)$$

Используя известные выражения для диагональных матричных элементов второй и четвертой степеней координат ρ и z , получим в первом порядке теории возмущений поправку к собственным значениям энергии (59) за счет ангармонизма:

$$\Delta E_{nmq} = \frac{k}{r_0^2} \langle nmq | \frac{1}{32} \rho^4 + \rho^2 z^2 - 4z^4 | nmq \rangle = 2\hbar\omega_\rho \left(\frac{\omega_\rho}{\omega_L}\right) \left\{ \frac{1}{32} \times \right. \\ \left. \times [(n+1)(n+2) + (n+|m|)(5n+|m|+3)] + \frac{1}{2\sqrt{2}}(2n+|m|+1) \left(q + \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4} \left(q^2 + q + \frac{1}{2}\right) \right\}. \quad (60)$$

Как можно видеть из приведенных выше соотношений, ангармоничность потенциала U_0 становится существенной при смещениях атома, значительно превышающих амплитуду нулевых колебаний, $\rho, z \sim \rho_0 \sqrt{\omega_L/\omega_\rho}$, а спектр энергии становится неэквидистантным при достаточно больших значениях квантовых чисел, $n, |m|, q \sim \sqrt{\omega_L/\omega_\rho} \simeq 10^3$.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенная выше аналитическая теория показывает, что движение атомов в магнитной ловушке с орбитирующим потенциалом складывается из двух основных движений: медленного колебательного движения в усредненном по времени потенциале и быстрых осцилляций с частотой, определяемой частотой вращения магнитного поля. При типичных экспериментальных значениях трех основных частот, ω_ρ, Ω и ω_L , амплитуда быстрых осцилляций координат атома является пренебрежимо малой по сравнению с амплитудой медленных колебаний в усредненном потенциале. Напротив, амплитуда высокочастотных осцилляций импульса атома, вообще говоря, сравнима с шириной импульсного распределения для основного колебательного состояния атомов в потенциале ловушки. Данная глубокая модуляция импульсов атомов становится весьма существенной при низких температурах атомов, когда средняя тепловая энергия становится сравнимой с энергией колебаний атомов в усредненном потенциале. Соответственно, при низких температурах импульсное распределение атомов, вообще говоря, приобретает кольцевую структуру в плоскости симметрии ловушки.

Данное исследование было выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-02-16211).

Литература

1. V. S. Bagnato, G. P. Lafyatis, A. G. Martin et al., Phys. Rev. Lett. **58**, 2194 (1987).
2. H. F. Hess, G. P. Kochanski, J. M. Doyle et al., Phys. Rev. Lett. **59**, 672 (1987).
3. E. L. Raab, M. Prentiss, A. Cable et al., Phys. Rev. Lett. **59**, 2631 (1987).
4. P. L. Gould, P. D. Lett, P. S. Julienne et al., Phys. Rev. Lett. **60**, 788 (1988).
5. A. G. Martin, R. Helmerson, V. S. Bagnato et al., Phys. Rev. Lett. **61**, 2431 (1988).
6. H. F. Hess, Phys. Rev. B **34**, 3476 (1986).
7. N. Masuhara, J. M. Doyle, J. C. Sandberg et al., Phys. Rev. Lett. **61**, 935 (1988).
8. K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. A. Joffe et al., Phys. Rev. Lett. **74**, 5202 (1995).
9. W. Petrich, M. H. Anderson, J. R. Ensher, and E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **74**, 3352 (1995).
10. M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews et al., Science **269**, 198 (1995).
11. C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet, Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995).
12. K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).
13. M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten et al., Phys. Rev. Lett. **77**, 416 (1996).
14. D. S. Jin, J. R. Ensher, M. R. Matthews et al., Phys. Rev. Lett. **77**, 420 (1996).
15. M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten et al., Phys. Rev. Lett. **77**, 988 (1996).
16. T. H. Bergeman, P. McNicholl, J. Kucia et al., J. Opt. Soc. Amer. B **6**, 2249 (1989).
17. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. 1, Наука, Москва (1976), с. 107.
18. З. Флюгге, *Задачи по квантовой механике*, т. I, Мир, Москва (1974), с. 118.