ЖЭТФ, 1998, том 114, вып. 2(8), стр. 398–405 ©1998

ВАРИАЦИОННЫЕ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИИ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ В СЛУЧАЙНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*В. Н. Зиракашвили**

Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн
Российской академии наук
142092, Троицк, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 2 декабря 1997 г.

Вариационный подход используется для получения оценок эффективных коэффициентов переноса частиц в случайном статическом магнитном поле. Распространение частиц описывается уравнением анизотропной диффузии. Коэффициент диффузии вдоль локального магнитного поля много больше поперечного коэффициента диффузии. В масштабах больших размеров неоднородностей магнитного поля диффузия описывается эффективными коэффициентами. Вариационный подход позволяет получить пределы изменения эффективных параллельного и перпендикулярного коэффициентов диффузии. Показано, что инкремент неустойчивости силовых линий магнитного поля определяет верхнюю оценку эффективного поперечного коэффициента диффузии.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о движении заряженных частиц в случайном магнитном поле неоднократно рассматривалась в связи с проблемами распространения космических лучей в межпланетной и межзвездной средах [1–4]. Рассеяние частиц на мелкомасштабных (с масштабами порядка гирорадиуса частиц) неоднородностях магнитного поля приводит к их изотропизации и диффузии, которая обычно резко анизотропна: коэффициент диффузии вдоль поля много больше перпендикулярного коэффициента диффузии. Наличие крупномасштабной случайной компоненты магнитного поля приводит к усилению поперечной диффузии (так называемая аномальная диффузия) и делает диффузию в целом более изотропной. Более конкретно: пусть имеется нестационарное уравнение диффузии

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nabla_i D_{ij} \nabla f, \tag{1}$$

где D_{ij} — симметричный тензор диффузии. В данной работе рассматривается тензор диффузии следующего вида:

$$D_{ij} = (D_\parallel - D_\perp) b_i b_j + D_\perp \delta_{ij}, \quad D_{ij}^{-1} = (D_\parallel^{-1} - D_\perp^{-1}) b_i b_j + D_\perp^{-1} \delta_{ij}. \tag{2}$$

Здесь $D_\parallel$ и $D_\perp$ — коэффициенты диффузии вдоль и поперек магнитного поля (ниже будем считать их не зависящими от координат), $\mathbf{b}$ — единичный вектор, направленный вдоль магнитного поля: $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$. Флуктуации магнитного поля приводят к флуктуациям тензора диффузии. Задача состоит в том, чтобы усреднить уравнение (1) по

* E-mail: vp@cosray.izmiran.troitsk.su

этим флуктуациям. Ниже будем считать магнитное поле статичным и рассматривать стационарный вариант уравнения (1). Это правильно, если коэффициент диффузии достаточно велик, так что за характерное время изменения поля частица проходит за счет диффузии расстояние, большее корреляционного размера поля (более строго, время изменения поля должно быть больше времени «забывания» частицей силовой линии, см. Заключение). До настоящего времени задача об усреднении диффузии в статическом поле решена только для тривиальных случаев (например, если тензор диффузии зависит только от одной координаты). Исключением является результат, полученный Дыхне [5]. Для двумерной задачи и тензора диффузии (2) с изотропным случайным магнитным полем имеется точный результат: эффективный коэффициент диффузии имеет вид

$$D^* = \sqrt{D_\parallel D_\perp}.$$

В теории распространения космических лучей представляет интерес случай со средним магнитным полем. Усреднение уравнения (1), выполненное с использованием теории возмущений (см., например, [4]), показывает, что малым параметром задачи является величина $\langle A^2\rangle\sqrt{D_\parallel/D_\perp}$. Здесь вектор амплитуды случайного магнитного поля определен как $\mathbf{A} = (\mathbf{B} - \mathbf{B}_0)/B_0$, $\mathbf{B}_0 = \langle\mathbf{B}\rangle$, а угловые скобки означают усреднение по объему. Эффективный поперечный коэффициент диффузии можно представить в виде ряда:

$$D_\perp^* = D_\perp\left(1 + C_1\langle A^2\rangle\sqrt{\frac{D_\parallel}{D_\perp}} + C_2\langle A^2\rangle^2\frac{D_\parallel}{D_\perp} + \ldots\right), \tag{3}$$

где $C_1, C_2\ldots$ — численные коэффициенты. В практически интересном случае $\langle A^2\rangle \le 1$ теория возмущений непригодна, так как $D_\parallel \gg D_\perp$ и упомянутый выше параметр велик. В этих условиях может оказаться интересным определение пределов изменения эффективного поперечного коэффициента диффузии. Для этого в данной работе используется вариационный подход.

2. ВАРИАЦИОННЫЕ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Для получения вариационных оценок эффективного коэффициента диффузии для уравнения

$$\nabla_i D_{ij}\nabla f = 0 \tag{1'}$$

рассмотрим функционалы

$$L^{(1)} = \langle D_{ij}g_ig_j\rangle, \quad L^{(2)} = \langle D_{ij}^{-1}j_ij_j\rangle. \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{g}$ и $\mathbf{j}$ — векторы, зависящие от координат. Можно показать, что эти функционалы при дополнительных условиях

$$\mathbf{G} = \langle\mathbf{g}\rangle, \quad \operatorname{rot}\mathbf{g} = 0, \quad \mathbf{J} = \langle\mathbf{j}\rangle, \quad \operatorname{div}\mathbf{j} = 0 \tag{5}$$

(здесь **G** и **J** — постоянные векторы, первые два равенства относятся к первому функционалу, третье и четвертое — ко второму) принимают экстремальные значения, если

$$g_i = \nabla_i f, \quad j_i = -D_{ij}\nabla_j f, \tag{6}$$

а функция f удовлетворяет уравнению (1′) (см. [6, 7]). Другими словами, уравнение (1′) может быть получено при варьировании первого функционала в (4) со вторым дополнительным условием (5). Эти экстремумы являются минимумами, если компоненты тензора диффузии являются коэффициентами положительно определенной квадратичной формы и значение функционалов в минимуме равно

$$L^{(1)}_{min} = D^*_{ij}G_iG_j, \quad L^{(2)}_{min} = (D^*_{ij})^{-1}J_iJ_j. \tag{7}$$

Здесь эффективный тензор диффузии D^*_{ij} дает соотношение между средним током и градиентом:

$$J_i = -D^*_{ij}G_j. \tag{8}$$

Равенства (7) подразумевают выполнение неравенств

$$D^*_{ij}G_iG_j \leq \langle D_{ij}g_ig_j\rangle, \quad (D^*_{ij})^{-1}J_iJ_j \leq \langle D^{-1}_{ij}j_ij_j\rangle, \tag{9}$$

где g_i и j_i — любые функции, удовлетворяющие условиям (5). Подбирая пробные функции, можно с помощью неравенств (9) получать ограничения на эффективный коэффициент диффузии сверху и снизу. Если пробная функция зависит от некоторой неслучайной функции, то эта функция может быть найдена при решении вариационной задачи (следует минимизировать правые части неравенств (9)). Чем меньше правые части неравенств (9), тем ближе пределы изменения коэффициента диффузии к точному решению задачи.

При использовании неравенств (9) будем считать, что среднее по объему равно среднему по ансамблю реализаций случайного поля (по поводу этого предположения и относительно математических аспектов усреднения уравнения (1′) см. [8]).

3. ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОГО ПАРАЛЛЕЛЬНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИИ

Для получения оценок эффективного параллельного коэффициента диффузии используем следующие пробные функции:

$$\mathbf{g} = \mathbf{G}, \quad \mathbf{j} = \mathbf{B}J/B_0. \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что условия (5) выполнены (средний градиент **G** и средний ток **J** направлены вдоль среднего магнитного поля). Подставляя эти пробные функции в неравенства (9) с тензором диффузии (2), получаем

$$D_{\|}B_0^2/\langle B^2\rangle \leq D^*_{\|} \leq D_{\|}\langle b^2_{\|}\rangle + D_{\perp}\langle b^2_{\perp}\rangle. \tag{11}$$

Здесь $\mathbf{b}_{\|}$ и $\mathbf{b}_{\perp}$ — параллельная и перпендикулярная среднему полю компоненты единичного вектора.

4. ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОГО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИИ

Если задача двумерна (вектор магнитного поля лежит в плоскости xz и не зависит от y), пробную функцию для градиента возьмем в следующем виде ($\mathbf{e}_y$ — орт оси y):

$$\mathbf{g} = [\mathbf{e}_y \mathbf{B}] \frac{G}{B_0}. \tag{12}$$

В этом случае первая пара условий (5) выполнена (средний градиент направлен вдоль оси x, среднее поле — вдоль оси z). Подстановка пробной функции (12) в первое неравенство (9) приводит к оценке

$$D_\perp^* \le D_\perp \langle B^2 \rangle / B_0^2. \tag{13}$$

Для трехмерной задачи ограничимся случаем возмущений магнитного поля, перпендикулярных среднему полю (такая ситуация имеет, например, место для турбулентности альфвеновских волн), направленному вдоль оси z. Возьмем пробную функцию для градиента в следующем виде:

$$\mathbf{g} = \mathbf{G} + \nabla \int d^3r' d^2r_{1\perp} N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') G_k A_k(z', \mathbf{r}_{1\perp}) q(z - z', \mathbf{r}_{1\perp} - \mathbf{r}'_\perp). \tag{14}$$

Здесь $q(z, \mathbf{r}_\perp)$ — неслучайная функция координат, $N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — функция распределения силовых линий, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial N}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_\perp} \left(\mathbf{A}(z', \mathbf{r}'_\perp) N \right) = 0, \quad N\big|_{z=z'} = \delta(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp). \tag{15}$$

Выражение (14) соответствует тому, что при $D_\parallel \gg D_\perp$ частица долго движется вдоль силовой линии магнитного поля. Зависимость функции q от $\mathbf{r}_\perp$ описывает уход частицы с силовой линии (ниже для этой функции будет получено уравнение).

При подстановке пробной функции (14) в первое неравенство (9) воспользуемся очевидным неравенством $(\mathbf{bg})^2 \le g_z^2 + (\mathbf{gA})^2$. Новый функционал, полученный при этой замене, обозначим буквой L. Для вычисления значения этого функционала необходимо уметь вычислять средние от произведения компонент вектора $\mathbf{A}$ и функций N. Для этого можно пользоваться теорией возмущений, если выполнено следующее условие:

$$AL_\parallel / L_\perp \ll 1. \tag{16}$$

Здесь A — амплитуда случайного поля, а $L_\parallel$ и $L_\perp$ — корреляционные размеры случайного поля параллельно и перпендикулярно среднему полю. Оставляя в выражении для L члены до второго порядка по A включительно, получаем

$$\begin{aligned} L = {} & (D_\parallel - D_\perp) A_{ij}(0,0) G_i G_j + D_\perp G^2 + 4(D_\parallel - D_\perp) \int d^3r' d^2r_{1\perp} G_i G_j \delta(z - z') \times \\ & \times B_{ij}(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{1\perp}) \langle N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle \frac{\partial q(z - z', \mathbf{r}'_\perp - \mathbf{r}_{1\perp})}{\partial z} + 2 \int dz' d^2r'_\perp d^2r''_\perp d^2r_{1\perp} d^2r_{2\perp} B_{ij}(\mathbf{r}_{1\perp} - \mathbf{r}_{2\perp}) \times \\ & \times G_i G_j \left[D_\parallel \langle N(z, z', \mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp) N(z, z', \mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}''_\perp) \rangle \frac{\partial q(z - z', \mathbf{r}'_\perp - \mathbf{r}_{1\perp})}{\partial z} \frac{\partial q(z - z', \mathbf{r}''_\perp - \mathbf{r}_{2\perp})}{\partial z} + \right. \\ & \left. + D_\perp \left\langle \frac{\partial N(z, z', \mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp)}{\partial \mathbf{r}_\perp} \frac{\partial N(z, z', \mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}''_\perp)}{\partial \mathbf{r}_\perp} \right\rangle q(z - z', \mathbf{r}'_\perp - \mathbf{r}_{1\perp}) q(z - z', \mathbf{r}''_\perp - \mathbf{r}_{2\perp}) \right]. \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь

$$B_{ij}(\mathbf{r}_\perp) = \frac{1}{2}\int dz\, A_{ij}(z,\mathbf{r}_\perp)$$

— проинтегрированный по z коррелятор статистически-однородного случайного магнитного поля $A_{ij}(z,\mathbf{r}_\perp) = \langle A_i(z,\mathbf{r}_\perp)A_j(0,0)\rangle$. При получении выражения (17) предполагалось, что характерный размер изменения по z функций N и q много больше корреляционного размера $L_{\|}$, что позволило выполнить одно интегрирование по z'' во втором интеграле. Отметим, что выражение (17) является точным, если поле $A_k(z,\mathbf{r}_\perp)$ дельта-коррелировано по z и его статистика гауссова.

Для вычисления средних во втором интеграле в (17) рассмотрим функцию $F(z,z',\mathbf{r}_\perp,\mathbf{r}'_\perp,\mathbf{r}''_\perp) = N(z,z',\mathbf{r}_\perp,\mathbf{r}'_\perp)N(z,z',\mathbf{r}_\perp,\mathbf{r}''_\perp)$, уравнение для которой следует из уравнения (15):

$$\frac{\partial F}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_\perp}\left(\mathbf{A}(z',\mathbf{r}'_\perp)F\right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}''_\perp}\left(\mathbf{A}(z',\mathbf{r}''_\perp)F\right) = 0. \tag{18}$$

Первому и второму средним во втором интеграле выражения (17) соответствуют следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} F(z,z',\mathbf{r},\mathbf{r}'_\perp,\mathbf{r}''_\perp)\big|_{z=z'} &= \delta(\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}'_\perp)\delta(\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}''_\perp),\\ F(z,z',\mathbf{r},\mathbf{r}'_\perp,\mathbf{r}''_\perp)\big|_{z=z'} &= \frac{\partial\delta(\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}'_\perp)}{\partial\mathbf{r}_\perp}\,\frac{\partial\delta(\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}''_\perp)}{\partial\mathbf{r}_\perp}. \end{aligned} \tag{19}$$

Уравнение для усредненной функции $F_0 = \langle F\rangle$ можно получить, используя теорию возмущений (подробнее см., например, [9]):

$$\operatorname{sign}(z'-z)\frac{\partial F_0}{\partial z'} = B_{ij}(0)\left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial r'_{\perp i}\partial r'_{\perp j}} + \frac{\partial^2 F_0}{\partial r''_{\perp i}\partial r''_{\perp j}}\right) + 2\frac{\partial^2}{\partial r'_{\perp i}\partial r''_{\perp j}}B_{ij}(\mathbf{r}'_\perp-\mathbf{r}''_\perp)F_0. \tag{20}$$

Это уравнение является точным, если поле $A_k(z,\mathbf{r}_\perp)$ дельта-коррелировано по z и его статистика гауссова. Его решения с начальными условиями (19) можно получить при помощи фурье-преобразования по $\mathbf{r}'_\perp$ и $\mathbf{r}''_\perp$:

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}(z'-z)\frac{\partial F_{\mathbf{k}'_\perp,\mathbf{k}''_\perp}}{\partial z'} = -\int\frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2}H_{ij}(\mathbf{k}_\perp)\,\times&\\ \times\left[\left(k'_{\perp i}k'_{\perp j} + k''_{\perp i}k''_{\perp j}\right)F_{\mathbf{k}'_\perp,\mathbf{k}''_\perp} + 2k'_{\perp i}k''_{\perp j}F_{\mathbf{k}'_\perp-\mathbf{k}_\perp,\mathbf{k}''_\perp+\mathbf{k}_\perp}\right]&, \end{aligned} \tag{21}$$

где тензор $H_{ij}(\mathbf{k}_\perp)$ связан с коррелятором случайного магнитного поля выражением

$$H_{mn}(\mathbf{k}_\perp) = H(k_\perp)\left(\delta_{mn} - \frac{k_{\perp m}k_{\perp n}}{k_\perp^2}\right) = \int d^2r_\perp B_{mn}(\mathbf{r}_\perp)\exp(-i\mathbf{k}_\perp\mathbf{r}_\perp), \quad m,n=1,2. \tag{22}$$

Начальные условия (19) в фурье-представлении имеют вид

$$F_{\mathbf{k}'_\perp,\mathbf{k}''_\perp}\big|_{z=z'} = \exp\left[-i\left(\mathbf{k}'_\perp+\mathbf{k}''_\perp\right)\mathbf{r}_\perp\right], \quad F_{\mathbf{k}'_\perp,\mathbf{k}''_\perp}\big|_{z=z'} = -\mathbf{k}'_\perp\mathbf{k}''_\perp\exp\left[-i\left(\mathbf{k}'_\perp+\mathbf{k}''_\perp\right)\mathbf{r}_\perp\right]. \tag{23}$$

Для случайного поля, статистически изотропного в плоскости, перпендикулярной среднему полю, решения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{k}'_\perp,\mathbf{k}''_\perp} &= \exp\left[-i(\mathbf{k}'_\perp + \mathbf{k}''_\perp)\mathbf{r}_\perp - D_m(\mathbf{k}'_\perp + \mathbf{k}''_\perp)^2|z-z'|\right], \\ F_{\mathbf{k}'_\perp,\mathbf{k}''_\perp} &= -\mathbf{k}'_\perp\mathbf{k}''_\perp \exp\left\{-i(\mathbf{k}'_\perp + \mathbf{k}''_\perp)\mathbf{r}_\perp - \left[D_m(\mathbf{k}'_\perp + \mathbf{k}''_\perp)^2 - 2\gamma\right]|z-z'|\right\}, \end{aligned} \tag{24}$$

или в координатном представлении

$$\begin{aligned} F_0(z,z',\mathbf{r},\mathbf{r}'_\perp,\mathbf{r}''_\perp) &= \langle N(z,z',\mathbf{r}_\perp,\mathbf{r}'_\perp)\rangle\delta(\mathbf{r}'_\perp - \mathbf{r}''_\perp), \\ F_0(z,z',\mathbf{r},\mathbf{r}'_\perp,\mathbf{r}''_\perp) &= \exp\left(2\gamma|z-z'|\right)\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{r}'_\perp\partial\mathbf{r}''_\perp}\langle N(z,z',\mathbf{r}_\perp,\mathbf{r}'_\perp)\rangle\delta(\mathbf{r}'_\perp - \mathbf{r}''_\perp), \\ \langle N(z,z',\mathbf{r}_\perp,\mathbf{r}'_\perp)\rangle &= \frac{1}{4\pi D_m|z-z'|}\exp\left[-\frac{(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)^2}{4D_m|z-z'|}\right]. \end{aligned} \tag{25}$$

Здесь D_m и γ — соответственно коэффициент диффузии и инкремент неустойчивости силовых линий, которые выражаются через спектр случайного магнитного поля:

$$D_m = \frac{1}{2}\int\frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2}H(k_\perp), \quad \gamma = \frac{1}{2}\int\frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2}k_\perp^2 H(k_\perp). \tag{26}$$

Эти коэффициенты описывают поведение магнитных силовых линий. Средний квадрат смещения силовой линии в поперечном направлении равен

$$\langle\mathbf{r}_\perp^2\rangle = 4D_m|z-z'|, \tag{27}$$

а для среднего квадрата расстояния в поперечном направлении между близкими силовыми линиями имеем

$$\langle(\mathbf{r}_{1\perp} - \mathbf{r}_{2\perp})^2\rangle = \langle(\mathbf{r}_{1\perp} - \mathbf{r}_{2\perp})^2\rangle\big|_{z=z'}\exp\left(2\gamma|z-z'|\right), \quad \langle(\mathbf{r}_{1\perp} - \mathbf{r}_{2\perp})^2\rangle \ll L_\perp^2. \tag{28}$$

Подставляя выражения (25) в равенство (17), выполняя одно интегрирование по $\mathbf{r}'_\perp$ и переходя к $\mathbf{k}_\perp$-представлению, получаем

$$\begin{aligned} L = (D_\| - D_\perp)A_{ij}(0,0)G_iG_j + D_\perp G^2 + \int dz'd^2k_\perp G_iG_jH_{ij}(\mathbf{k}_\perp)\times \\ \times\left[4(D_\| - D_\perp)\delta(z')\frac{\partial Q(z',\mathbf{k}_\perp)}{\partial z'} + 2D_\|\left(\frac{\partial Q(z',\mathbf{k}_\perp)}{\partial z'}\right)^2 + 2D_\perp k_\perp^2\exp\left(2\gamma|z'|\right)Q^2(z',\mathbf{k}_\perp)\right]. \end{aligned} \tag{29}$$

Здесь функция

$$Q(z,\mathbf{k}_\perp) = \int d^2r_\perp q(z,\mathbf{r}_\perp)\exp(-i\mathbf{k}_\perp\mathbf{r}_\perp)$$

— фурье-образ функции q. Варьируя этот функционал по Q, получаем следующее уравнение:

$$D_\|\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} - k_\perp^2 D_\perp Q\exp\left(2\gamma|z|\right) = -(D_\| - D_\perp)\delta'(z). \tag{30}$$

С помощью замены $\zeta = \exp(\gamma|z|)$ уравнение сводится к уравнению Бесселя мнимого аргумента. Его решение имеет следующий вид:

$$Q = -\frac{\operatorname{sign} z}{2}\left(1-\frac{D_\perp}{D_\parallel}\right)K_0\left(\frac{k_\perp}{\gamma}\sqrt{\frac{D_\perp}{D_\parallel}}\exp\left(\gamma|z|\right)\right)\Big/K_0\left(\frac{k_\perp}{\gamma}\sqrt{\frac{D_\perp}{D_\parallel}}\right). \qquad (31)$$

Подставляя полученную функцию в выражение (29) и учитывая, что в экстремуме значение интеграла равно половине величины, которую дает первое слагаемое в квадратных скобках, получаем верхнюю оценку эффективного поперечного коэффициента диффузии:

$$D_\perp^* \le D_\perp - \frac{1}{2}\int\frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2}\,k_\perp H(k_\perp)\sqrt{D_\parallel D_\perp}\,K_0'\left(\frac{k_\perp}{\gamma}\sqrt{\frac{D_\perp}{D_\parallel}}\right)\Big/K_0\left(\frac{k_\perp}{\gamma}\sqrt{\frac{D_\perp}{D_\parallel}}\right). \qquad (32)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по аргументу. Инкремент неустойчивости силовых линий по порядку величины равен $\gamma \approx (1/2)\langle A^2\rangle L_\parallel/L_\perp^2$ (считаем, что случайное поле сосредоточено в основном масштабе, который порядка корреляционного размера, так что интегралы (26) определяются амплитудой случайного поля в этом масштабе), поэтому в наиболее интересном случае $\langle A^2\rangle^2 L_\parallel^2 D_\parallel/L_\perp^2 D_\perp \gg 1$ аргумент функции K_0 мал в той части области интегрирования, в которой подынтегральное выражение заметно отлично от нуля. Используя асимптотику этой функции при $x \to 0$, $K_0(x) \approx -\ln x$, получаем

$$D_\perp^* \le D_\perp + \frac{1}{2}D_\parallel\gamma\int\frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2}\,H(k_\perp)\Big/\ln\left(\frac{\gamma}{k_\perp}\sqrt{\frac{D_\parallel}{D_\perp}}\right). \qquad (33)$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Во многих случаях вариационный подход позволяет оценить пределы изменения эффективного коэффициента диффузии. Если имеется информация о спектре случайного магнитного поля и $D_\parallel > D_\perp$, то из неравенства (11) следует, что эффективный параллельный коэффициент диффузии заключен в следующих пределах:

$$D_\parallel/(1+\langle A^2\rangle) \le D_\parallel^* \le D_\parallel. \qquad (34)$$

В двумерном случае неравенство (13) дает следующие пределы изменения эффективного перпендикулярного коэффициента диффузии:

$$D_\perp \le D_\perp^* \le D_\perp(1+\langle A^2\rangle). \qquad (35)$$

Таким образом, если $\langle A^2\rangle \ll 1$, то в этих случаях эффективные коэффициенты диффузии близки к соответствующим локальным коэффициентам. В трехмерном случае неравенство (33) дает верхнюю оценку эффективного коэффициента диффузии:

$$D_\perp^* \le D_\perp + D_\parallel D_m\gamma\Big/\ln\left(\gamma L_\perp\sqrt{\frac{D_\parallel}{D_\perp}}\right) \approx D_\perp + \frac{D_\parallel\langle A^2\rangle^2 L_\parallel^2}{4L_\perp^2}\Big/\ln\left(\frac{\langle A^2\rangle L_\parallel}{L_\perp}\sqrt{\frac{D_\parallel}{D_\perp}}\right). \qquad (36)$$

Здесь равенство носит приближенный характер в силу сделанных при получении неравенства (36) предположений. Правая часть неравенства (36) совпадает по порядку величины с оценкой коэффициента поперечной диффузии, полученной в работах [10, 11]. Пусть τ — время «забывания» частицей силовой линии. Двигаясь вдоль силовой линии за счет диффузии, частица пройдет за это время расстояние $\sqrt{D_{\|}\tau}$, а поперечное смещение за счет «блуждания» силовой линии будет равно $D_m\sqrt{D_{\|}\tau}$. Следовательно, коэффициент поперечной диффузии по порядку величины равен

$$D_{\perp}^{*} \approx D_m\sqrt{D_{\|}/\tau}. \qquad (37)$$

За время τ частица сместится в поперечном направлении за счет поперечной диффузии на расстояние $\sqrt{D_{\perp}\tau}$. Это расстояние увеличится за счет неустойчивости близких силовых линий (см. формулу (28)). Приравнивая его поперечному корреляционному масштабу, получаем

$$D_{\perp}\tau\exp\left(2\gamma\sqrt{D_{\|}\tau}\right) \approx L_{\perp}^{2}. \qquad (38)$$

Решая это уравнение для τ приближенно, имеем

$$\tau \approx \frac{1}{D_{\|}\gamma^2}\ln^2\left(\gamma L_{\perp}\sqrt{\frac{D_{\|}}{D_{\perp}}}\right). \qquad (39)$$

Подставляя полученное выражение в формулу (37), приходим к выражению для поперечного коэффициента диффузии, совпадающему с правой частью неравенства (36). Следует отметить, что при $D_{\perp} \to 0$ эта величина оказывается меньше, чем коэффициент поперечной диффузии, вычисленный различными приближенными методами [12–14].

Работа выполнена при поддержке программы «Астрономия» (грант № 2-149).

Литература

1. J. R. Jokipii, Rev. Geophys. Spase Phys. **8**, 27 (1971).
2. J. J. Quenby, Spase Sci. Rev. **37**, 201 (1984).
3. И. Н. Топтыгин, *Космические лучи в межпланетных магнитных полях*, Наука, Москва (1983).
4. В. С. Березинский, С. В. Буланов, В. Л. Гинзбург, В. А. Догель, В. С. Птускин, *Астрофизика космических лучей*, Наука, Москва (1990).
5. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 641 (1970).
6. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **52**, 264 (1967).
7. М. И. Швидлер, *Статистическая гидродинамика пористых сред*, Недра, Москва (1981).
8. С. М. Козлов, УФН **40**, 61 (1985).
9. J. R. Jokipii, Astrophys. J. **183**, 1029 (1973).
10. A. B. Rechester and M. N. Rosenbluth, Phys. Rev. Lett. **40**, 38 (1978).
11. Е. Г. Клепач, В. С. Птускин, Л. Г. Чувильгин, Изв. РАН, серия физ. **57**, 86 (1993).
12. B. B. Kadomtsev and O. P. Pogutse, in: *Proc. of the 7th Int. Conf. on Plasma Phys. and Controlled Nuclear Fusion Res.*, Vol. 1, Vienna, 1978, p. 649.
13. A. A. Galeev and I. M. Zeleny, Physica **20**, 90 (1981).
14. L. G Chuvilgin and V. S. Ptuskin, Astron. Astrophys. **279**, 278 (1993).