ЖЭТФ, 1998, том 114, вып. 2(8), стр. 437–447

ТОМОГРАФИЯ ДВУХЧАСТИЧНЫХ СПИНОВЫХ СОСТОЯНИЙ

*В. А. Андреев, В. И. Манько**

Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
117924, Москва, Россия

Поступила в редакцию 10 марта 1998 г.

В рамках новой «классической» формулировки обычной квантовой механики построено описание квантовых состояний со спином $j = 1/2$, использующее вместо комплексной матрицы плотности только положительные классические вероятности наблюдаемых величин. Эти вероятности являются функциями точек единичной сферы, определяющими направления, по отношению к которым и проводится измерение проекций спина. Предложенная конструкция служит обобщением схемы томографии спиновых состояний одной частицы и может быть использована как новый способ измерения двухчастичных спиновых состояний. Для чистых спиновых состояний развитый метод полностью аналогичен случаю одной частицы. Для описания смешанных состояний требуется задание дополнительных вероятностей.

1. ВВЕДЕНИЕ

С самого начала развития квантовой механики и формулировки уравнения Шредингера [1] для комплексной волновой функции координаты предпринимались попытки дать классическую трактовку квантовомеханическим закономерностям [2–5]. Особую роль, отличающую внутренний момент количества движения от координаты, играет спин частицы, введенный Паули [6], внутренняя степень свободы, не имеющая классического аналога. В случае чистых состояний состояние спина описывается комплексными спинорами. Для учета квантовых флуктуаций при описании как координат, так и спинов было введено понятие матрицы плотности [7, 8]. Внедиагональные элементы матрицы плотности могут быть комплексными числами, диагональные же ее элементы всегда положительны и имеют смысл вероятностей значений некоторых наблюдаемых величин.

В работах [9,10], основывавшихся на результатах работы [11], было обращено внимание на существование обратимого преобразования, связывающего функцию Вигнера [12] координат и импульсов с положительным распределением вероятностей, заданных диагональными элементами той матрицы плотности, по которой и строилась функция Вигнера. С помощью этого преобразования в работе [13] был предложен новый способ измерения квантового состояния — метод оптической томографии. В работах [14, 15] было показано, что это обстоятельство может быть положено в основу новой формулировки квантовой механики, использующей не волновые функции и матрицы плотности, а распределение положительных вероятностей. Действительно, поскольку имеются два обратимых преобразования, одно из которых связывает матрицу плотности с функцией Вигнера, а другое — функцию Вигнера с вероятностями измеряемых

*E-mail: manko@astrna.na.astro.it

величин, то эти вероятности содержат в себе ту же самую информацию, что и матрица плотности, и могут быть использованы для описания состояния квантовой системы. Или, иначе говоря, матрица плотности может быть восстановлена по своим диагональным элементам, измеренным во всех системах отсчета [14, 15].

Данный подход был развит в работах [16–18]. Было получено уравнение типа Фоккера–Планка, описывающее эволюцию положительных классических вероятностей, а также его стационарный аналог, позволяющий находить уровни энергии системы по ее «классической» функции распределения. Они служат альтернативой нестационарному и стационарному уравнениям Шредингера. С их помощью в новой формулировке квантовой механики был рассмотрен пример осциллятора с трением [19, 20].

Указанные уравнения описывают системы скалярных частиц, у которых функция Вигнера зависит от координат и импульсов. Если же частицы обладают внутренними степенями свободы, например спином, то развитый в работах [14, 15] формализм требует существенной модификации. Проблема обобщения вероятностной формулировки на спиновые состояния одной частицы рассмотрена в [21, 22, 26]. Было показано, что состояние спина можно задать распределением вероятностей проекции спина на выделенную ось, направление которой фиксируется двумя углами, определяющими точку на единичной сфере, через которую она проходит. Непосредственное обобщение такого описания на две частицы со спином, при котором используются два набора независимых вероятностей, являющихся функциями координат точек на двух разных сферах, рассматривалось в [23, 24].

Однако задачу об измерении спинового состояния двух и более частиц со спином желательно решить на основе такого же подхода, как и для одной частицы. Для одной частицы состояние можно полностью измерить, если определить экспериментально вероятность проекции спина на выделенную ось во всех системах отсчета. Поэтому необходимо уметь так описывать состояние двух частиц со спином, чтобы состояния отдельных спинов задавались не независимыми вероятностями проекций спинов на разные оси при независимых поворотах систем отсчета для каждого спина, а общим распределением вероятностей, зависящем от одного, общего для обоих спинов поворота.

Именно эта задача и решается в данной работе. Будет показано, что чистое состояние двух частиц со спином $j = 1/2$ может быть полностью задано распределением вероятностей проекций спина на свои оси, рассматриваемые в ансамбле повернутых одним общим вращением систем, а также проанализирована разница между смешанными и чистыми состояниями, возникающая для многочастичных спиновых систем. Эта разница состоит в том, что в случае многочастичных систем для полного описания смешанного спинового состояния необходимо знать не только вероятности проекций спина как функций координат точек на единичной сфере, но и вероятности, задающие вклады чистых состояний в смешанные. Математической основой данного метода является построение обратимого преобразования («замены переменных») между спиновой матрицей плотности и положительными вероятностями. Интерес к такой постановке связан, наряду с другими задачами, и с возможностью нового подхода к проблеме парадокса Эйнштейна–Подольского–Розена и скрытых переменных в случае спиновых степеней свободы, а также с возможностью нового «томографического» способа измерения спинового состояния многих частиц.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ДВУХЧАСТИЧНОЙ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ

Рассмотрим матрицу плотности двухчастичных состояний с произвольными спинами и покажем, как ее недиагональные элементы могут быть выражены через диагональные, измеренные во всех системах отсчета.

Пусть мы имеем одночастичные состояния со спинами j_1 и j_2, характеризующиеся волновыми функциями $\Psi^{j_1}_{m_1}$ и $\Psi^{j_2}_{m_2}$. Из них можно построить двухчастичное состояние, его волновая функция выражается через произведения $\Psi^{j_1}_{m_1}\Psi^{j_2}_{m_2}$. В случае чистых двухчастичных состояний элементы матрицы плотности выражаются через волновую функцию:

$$\rho^{j_1 j_2}_{(m_1 m_2)(m'_1 m'_2)} = \left(\Psi^{j_1}_{m_1}\Psi^{j_2}_{m_2}\right)\left(\Psi^{j_1}_{m'_1}\Psi^{j_2}_{m'_2}\right)^*. \tag{1}$$

Учитывая, что волновые функции одночастичных спиновых состояний преобразуются по представлениям группы вращений $O(3)$, выражение (1) можно преобразовать к виду

$$\rho^{j_1 j_2}_{(m_1 m_2)(m'_1 m'_2)} = \sum_{l,k=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} C^{j_1\, j_2\, l}_{m_1 m_2 m}\, C^{j_1\, j_2\, k}_{m'_1 m'_2 m'}\, \Psi^l_m \Psi^{k\,*}_{m'}, \tag{2}$$

где $C^{j_1\, j_2\, j}_{m_1 m_2 m}$ — коэффициенты Клебша–Гордана группы $O(3)$.

При переходе к другой системе координат произведение $\Psi^l_m\Psi^{k\,*}_{m'}$ преобразуется следующим образом:

$$\tilde{\Psi}^l_{\tilde{m}}\tilde{\Psi}^{k\,*}_{\tilde{m}'} = \sum_{m=-l}^{l}\sum_{m'=-k}^{k} D^l_{\tilde{m}m}\Psi^l_m\,\Psi^{k*}_{m'}\,D^{k\,*}_{\tilde{m}'m'}, \tag{3}$$

где D^l_{mn} — D-функции Вигнера [25].

Отсюда следует, что весь матричный элемент $\rho^{j_1,j_2}_{(m_1 m_2)(m'_1 m'_2)}$ при переходе в другую систему координат преобразуется по правилу

$$\tilde{\rho}^{j_1\, j_2}_{(\tilde{m}_1\tilde{m}_2)(\tilde{m}'_1\tilde{m}'_2)} = \sum_{l,k} C^{j_1\, j_2\, l}_{\tilde{m}_1\tilde{m}_2\tilde{m}}\, C^{j_1\, j_2\, k}_{\tilde{m}_1\tilde{m}_2\tilde{m}} \sum_{m,m'} D^l_{\tilde{m}m}\rho^{l\,k}_{mm'}D^{k\,*}_{\tilde{m}'m'}, \tag{4}$$

где $\rho^{l\,k}_{mm'} = \Psi^l_m\Psi^{k\,*}_{m'}$. Этот же закон преобразования (4) справедлив и в общем случае, когда состояние не является чистым и элементы матрицы плотности не имеют вида (1). В этом случае величины $\rho^{l\,k}_{mm'}$ определяются с помощью соотношения

$$\rho^{l\,k}_{mm'} = \sum_{m_1,m_2,m'_1,m'_2} C^{j_1\, j_2\, l}_{m_1 m_2 m}\, C^{j_1\, j_2\, k}_{m'_1 m'_2 m'}\, \rho^{j_1\, j_2}_{(m_1 m_2)(m'_1 m'_2)}. \tag{5}$$

Зная величины $\rho^{l\,k}_{mm'}$, можно восстановить матричные элементы $\rho^{j_1 j_2}_{(m_1 m_2)(m'_1 m'_2)}$:

$$\rho^{j_1 j_2}_{(m_1 m_2)(m'_1 m'_2)} = \sum_{l,k} C^{j_1\, j_2\, l}_{m_1 m_2 m}\, C^{j_1\, j_2\, k}_{m'_1 m'_2 m'}\, \rho^{l\,k}_{mm'}. \tag{6}$$

При переходе в другую систему координат величины $\rho^{l\,k}_{mm'}$ преобразуются по закону

$$\tilde{\rho}^{l\,k}_{\tilde{m}\tilde{m}'} = \sum_{m,m'} D^l_{\tilde{m}m}(\phi,\theta,\psi)\,\rho^{l\,k}_{mm'}\,D^{k\,*}_{\tilde{m}'m'}(\phi,\theta,\psi), \tag{7}$$

а сами матричные элементы $\rho^{j_1 j_2}_{(m_1 m_2)(m_1' m_2')}$ преобразуются согласно формуле (4).

Нашей целью является вывод формулы, выражающей недиагональные элементы матрицы плотности через диагональные, измеренные во всех системах координат. Непосредственно связать между собой матричные элементы оказывается затруднительным, поэтому мы сначала выразим через диагональные матричные элементы величины $\rho^{l\ k}_{mm'}$, а потом, пользуясь формулой (6), восстановим по ним все $\rho^{j_1 j_2}_{(m_1 m_2)(m_1' m_2')}$. С этой целью возьмем диагональный $\rho^{j_1\ j_2}_{(\tilde m_1 \tilde m_2)(\tilde m_1 \tilde m_2)}(\phi,\theta,\psi)$ и выразим его через $\rho^{l\ k}_{mm'}$, относящиеся к некоторой фиксированной системе координат:

$$\tilde\rho^{j_1\ j_2}_{(\tilde m_1 \tilde m_2)(\tilde m_1 \tilde m_2)} = \sum_{l,k} C^{j_1\ j_2\ l}_{\tilde m_1 \tilde m_2 \tilde m}\, C^{j_1\ j_2\ k}_{\tilde m_1 \tilde m_2 \tilde m} \tilde\rho^{l\ k}_{\tilde m \tilde m} =$$

$$= \sum_{l,k} C^{j_1\ j_2\ l}_{\tilde m_1 \tilde m_2 \tilde m}\, C^{j_1\ j_2\ k}_{\tilde m_1 \tilde m_2 \tilde m} \sum_{m,m'} D^{l}_{\tilde m' m}(\phi,\theta,\psi)\ \rho^{l\ k}_{mm'}\ D^{k\,*}_{\tilde m' m'}(\phi,\theta,\psi) =$$

$$= \sum_{l,k} C^{j_1\ j_2\ l}_{\tilde m_1 \tilde m_2 \tilde m}\, C^{j_1\ j_2\ k}_{\tilde m_1 \tilde m_2 \tilde m} \sum_{m,m',S} C^{l\ \ k\ \ S}_{\tilde m\ -\tilde m\ 0}\, C^{l\ \ \ k\ \ \ S}_{m\ -m'\ m-m'} (-1)^{\tilde m - m'} D^{S}_{0,m-m'}(\phi,\theta,\psi)\ \rho^{l\ k}_{m\ m'}. \quad (8)$$

Умножим правую и левую части равенства (8) на $D^{S}_{0,m-m'}$ и проинтегрируем по всем углам:

$$\frac{1}{\pi^2}\int d\Omega\, \tilde\rho^{j_1\ j_2}_{(\tilde m_1 \tilde m_2)(\tilde m_1 \tilde m_2)} D^{S}_{0,m-m'}(\phi,\theta,\psi)\,(2S+1)(-1)^{-\tilde m} =$$

$$= \sum_{l,k} C^{j_1\ j_2\ l}_{\tilde m_1 \tilde m_2 \tilde m}\, C^{j_1\ j_2\ k}_{\tilde m_1 \tilde m_2 \tilde m} \sum_{m,m'} C^{l\ \ k\ \ S}_{\tilde m\ -\tilde m\ 0}\, C^{l\ \ \ k\ \ \ S}_{m\ -m'\ m-m'} (-1)^{-m'} \rho^{l\ k}_{m\ m'} = P^{j_1,\ j_2,\ \ S}_{\tilde m_1, \tilde m_2, m-m'}\ . \quad (9)$$

Для того чтобы с помощью формулы (6) восстановить все элементы матрицы плотности, мы должны решить систему (9) и выразить $\rho^{l\ k}_{m\ m'}$ через диагональные элементы $\rho^{j_1\ j_2}_{(\tilde m_1 \tilde m_2)(\tilde m_1 \tilde m_2)}$. Однако оказывается, что, в отличие от одночастичных состояний, матрица плотности многочастичных состояний не всегда полностью восстанавливается по своим диагональным элементам. Мы подробно разберем эту проблему для случая $j_1 = j_2 = 1/2$, а в общем случае вычислим те элементы $\rho^{l\ k}_{m\ m'}$, для которых удается найти явное выражение без каких-либо дополнительных предположений. Это величины $\rho^{l\ l}_{m\ m'}$. Чтобы вычислить их, просуммируем (9) по $\tilde m_1, \tilde m_2$, сохраняя постоянной $\tilde m$. Учитывая равенство

$$\sum_{m_1,m_2} C^{j_1\ j_2\ l}_{m_1 m_2 m}\, C^{j_1\ j_2\ k}_{m_1 m_2 m} = \delta_{lk}\ , \quad (10)$$

получим

$$\sum_{\tilde m_1, \tilde m_2} P^{j_1\ j_2\ S}_{\tilde m_1 \tilde m_2 m-m'} = \sum_{l} \sum_{m,m'} (-1)^{-m'} C^{l\ \ \ l\ \ S}_{\tilde m - \tilde m\ 0}\, C^{l\ \ \ l\ \ \ S}_{m\ -m'\ m-m'}\ \rho^{l\ l}_{m\ m'} = Q^{j_1,\ j_2,\ S}_{\tilde m, m-m'}\ . \quad (11)$$

Пусть $\tilde m = \tilde m_1 + \tilde m_2 = j_1 + j_2$, тогда сумма по l в (11) содержит только одно слагаемое

$$Q^{j_1, j_2, S}_{j_1+j_2, m-m'} = C^{j_1+j_2\ \ j_1+j_2\ \ S}_{j_1+j_2\ -j_1-j_2\ 0} \sum_{m,m'} C^{j_1+j_2\ j_1+j_2\ \ S}_{m\ \ \ -m'\ \ m-m'} (-1)^{-m'} \rho^{j_1+j_2\ j_1+j_2}_{m\ \ m'}\ . \quad (12)$$

Здесь $m - m'$ фиксировано. Используя равенство

$$\sum_{S} C^{j_1\ j_2\ S}_{m_1\ m_2\ m}\, C^{j_1\ \ j_2\ \ S}_{m_1'\ m_2'\ m'} = \delta_{m_1 m_1'}\, \delta_{m_2 m_2'}\ , \quad (13)$$

из (12) получим

$$\rho^{j_1+j_2\; j_1+j_2}_{m\;\;m'} = \sum_S (-1)^{m'} Q^{j_1,j_2,S}_{j_1+j_2,m-m'} \left(C^{j_1+j_2\;\;j_1+j_2\;S}_{j_1+j_2\;\;-j_1-j_2\;0} \right)^{-1} C^{j_1+j_2\,j_1+j_2\;\;S}_{m\;\;\;-m'\;\;m-m'} \,. \tag{14}$$

Аналогичным способом можно вычислить и все другие $\rho^{l\;l}_{m\;m'}$. Для этого следует шаг за шагом уменьшать параметр $\tilde{m}$ в соотношении (11). Возникающее равенство будет включать одну неизвестную величину $\rho^{l\;l}_{m\;m'}$ и несколько известных. С помощью соотношения ортогональности (13) неизвестную можно выразить через известные. Чтобы получить нужную формулу, введем обозначение

$$\Phi^S_n = \sum_{l=n+1}^{j_1+j_2} C^{l\;\;l\;\;S}_{n\;-n\;0} \sum_{m,m'} C^{l\;\;\;l\;\;\;\;S}_{m\;-m'\;m-m'} (-1)^{m'} \rho^{l\;l}_{m\;m'} \,. \tag{15}$$

Используя его, получаем

$$\rho^{n\;n}_{m\;m'} = \sum_S \left(Q^{j_1,\;j_2,\;S}_{n,\;m-m'} - \Phi^S_n \right) \left(C^{n\;\;n\;\;S}_{n\;-n\;0} \right)^{-1} C^{n\;\;\;n\;\;\;\;S}_{m\;-m'\;m-m'} (-1)^{m'} \,. \tag{16}$$

3. ТОМОГРАФИЯ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ $j = 1/2$

Рассмотрим теперь случай $j_1 = j_2 = 1/2$. Согласно формуле (16), мы можем вычислить 10 величин

$$\rho^{00}_{00}\,, \qquad \rho^{11}_{mm'}\,, \qquad m, m' = -1, 0, 1. \tag{17}$$

Остается найти 6 величин ρ^{10}_{m0}, ρ^{01}_{0m}.

Однако легко убедиться, что в формулы (9) они входят в виде линейных комбинаций. Так, в правой части $P^{1/2\;1/2\;1}_{1/2\;-1/2\;0}$ стоит сумма $(\rho^{10}_{00} + \rho^{01}_{00})$, в правой части $P^{1/2\;1/2\;1}_{1/2\;-1/2\;1}$ стоит разность $(\rho^{1\,0}_{1\,0} - \rho^{0\;1}_{0\,-1})$, а в правой части $P^{1/2\;1/2\;1}_{1/2\;-1/2\;-1}$ стоит разность $(\rho^{1\;0}_{-1\,0} - \rho^{0\,1}_{0\,1})$. В формулах (9) с величинами $P^{1/2\,1/2\;1}_{-1/2\,1/2\;0}$, $P^{1/2\,1/2\;1}_{-1/2\,1/2\;1}$, $P^{1/2\,1/2\;1}_{-1/2\,1/2\;-1}$, стоят те же самые линейные комбинации, но с противоположным знаком

$$(-\rho^{10}_{00} - \rho^{01}_{00}), (-\rho^{10}_{10} + \rho^{0\;1}_{0-1}), (-\rho^{\;\,10}_{-10} + \rho^{01}_{10}). \tag{18}$$

Таким образом, по диагональным элементам матрицы плотности восстанавливаются 10 величин (17) и три величины (18). Этого недостаточно, для того чтобы восстановить всю матрицу плотности.

Непосредственно проверяется, что если мы возьмем недиагональные матричные элементы $\rho^{1/2\;1/2}_{(1/2-1/2)(-1/2\;1/2)}$, $\rho^{1/2\;1/2}_{(-1/2\;1/2)(1/2-1/2)}$ и напишем для них формулу, аналогичную (9), то в правой части возникающих соотношений появятся линейные комбинации

$$\begin{gathered} (\rho^{10}_{00} - \rho^{01}_{00}),\; (\rho^{\;\,10}_{-10} + \rho^{01}_{01}),\; (\rho^{10}_{10} + \rho^{0\;1}_{0-1}), \\ -(\rho^{10}_{00} - \rho^{01}_{00}),\; -(\rho^{\;\,10}_{-10} + \rho^{01}_{01}),\; -(\rho^{10}_{10} + \rho^{0\;1}_{0-1}). \end{gathered} \tag{19}$$

Мы видим, что одних только диагональных элементов матрицы плотности недостаточно, для того чтобы восстановить всю матрицу плотности, необходима еще некоторая дополнительная информация о состоянии. Пусть, например, известно, что состояние — чистое. Тогда элементы его матрицы плотности удовлетворяют соотношениям

$$\rho_{nn}\rho_{mm} = \rho_{nm}\rho_{mn}. \tag{20}$$

Подставим в соотношение (20) выражения для матричных элементов

$$\begin{aligned}
&\rho^{1/2\,1/2}_{(1/2\,1/2)(1/2\,1/2)}, \quad \rho^{1/2\,1/2}_{(1/2\,-1/2)(1/2\,-1/2)}, \quad \rho^{1/2\,1/2}_{(1/2\,-1/2)(1/2\,1/2)},\\
&\rho^{1/2\,1/2}_{(1/2\,1/2)(1/2\,-1/2)}, \quad \rho^{1/2\,1/2}_{(-1/2\,1/2)(-1/2\,1/2)}, \quad \rho^{1/2\,1/2}_{(1/2\,-1/2)(-1/2\,1/2)},\\
&\rho^{1/2\,1/2}_{(-1/2\,1/2)(1/2\,-1/2)}, \quad \rho^{1/2\,1/2}_{(1/2\,1/2)(-1/2\,1/2)}, \quad \rho^{1/2\,1/2}_{(-1/2\,1/2)(1/2\,1/2)}
\end{aligned} \tag{21}$$

через величины $\rho^{l\,k}_{m\,n}$, используя формулы Приложения 1. Получим уравнение

$$(\rho^{1\,0}_{0\,0} - \rho^{0\,1}_{0\,0})^2 = (\rho^{1\,0}_{0\,0} + \rho^{0\,1}_{0\,0})^2 - 4\rho^{0\,0}_{0\,0}\rho^{1\,1}_{0\,0}. \tag{22}$$

Поскольку величина $(\rho^{10}_{00} + \rho^{01}_{00})$ определяется диагональными членами матрицы плотности, уравнение (22) позволяет вычислить ρ^{10}_{00} и ρ^{01}_{00}. Кроме (22), соотношения (20) дают уравнения

$$\rho^{11}_{11}(\rho^{00}_{00} + \rho^{11}_{00} + \rho^{10}_{00} + \rho^{01}_{00}) = (\rho^{11}_{10} + \rho^{10}_{10})(\rho^{11}_{01} + \rho^{01}_{01}), \tag{23}$$

$$\rho^{11}_{11}(\rho^{00}_{00} + \rho^{11}_{00} - \rho^{10}_{00} - \rho^{01}_{00}) = (\rho^{11}_{10} - \rho^{10}_{10})(\rho^{11}_{01} - \rho^{01}_{01}). \tag{24}$$

Складывая и вычитая (23) и (24), получим

$$\rho^{10}_{10}\rho^{01}_{01} = \rho^{11}_{11}(\rho^{00}_{00} + \rho^{11}_{00}) - \rho^{11}_{10}\rho^{11}_{01}, \tag{25}$$

$$\rho^{10}_{10}\rho^{11}_{01} + \rho^{01}_{01}\rho^{11}_{10} = \rho^{11}_{11}(\rho^{10}_{00} + \rho^{01}_{00}). \tag{26}$$

Решая систему (25), (26), можно найти ρ^{10}_{10}, ρ^{01}_{01}. Это нам сразу дает и $\rho^{0\,1}_{0-1}$, $\rho^{\,10}_{-10}$.

Таким образом, соотношения (20), имеющие место для чистых состояний, позволяют восстановить всю матрицу плотности чистого состояния по ее диагонали.

Рассмотрим теперь смешанное состояние, образованное чистыми состояниями

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= \alpha|(1)+\rangle|(2)-\rangle + \beta|(1)-\rangle|(2)+\rangle,\\
\Psi_2 &= \beta^*|(1)+\rangle|(2)-\rangle - \alpha^*|(1)-\rangle|(2)+\rangle,
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1\ ,$$

входящими в него с вероятностями w_1, w_2.

Матрица плотности состояния Ψ_1 имеет вид

$$\rho(\Psi_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \alpha\alpha^* & \alpha\beta^* & 0\\ 0 & \beta\alpha^* & \beta\beta^* & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

В повернутой системе координат элементы матрицы плотности (28) выражаются следующими формулами:

$$
\begin{aligned}
\rho_{11}(\Psi_1) &= \rho^{\frac12\frac12}_{(\frac12\frac12)(\frac12\frac12)} = \frac14(\alpha+\beta)(\alpha^*+\beta^*)\sin^2\theta,\\
\rho_{12}(\Psi_1) &= \rho^{\frac12\frac12}_{(\frac12\frac12)(\frac12-\frac12)} = \frac{i}{2}e^{-i\varphi}(\alpha+\beta)\sin\theta\left(\alpha^*\cos^2\frac{\theta}{2}-\beta^*\sin^2\frac{\theta}{2}\right),\\
\rho_{13}(\Psi_1) &= \rho^{\frac12\frac12}_{(\frac12\frac12)(-\frac12\frac12)} = \frac{i}{2}e^{-i\varphi}(\alpha+\beta)\sin\theta\left(\beta^*\cos^2\frac{\theta}{2}-\alpha^*\sin^2\frac{\theta}{2}\right),\\
\rho_{14}(\Psi_1) &= \rho^{\frac12\frac12}_{(\frac12\frac12)(-\frac12-\frac12)} = \frac14 e^{-2i\varphi}(\alpha+\beta)(\alpha^*+\beta^*)\sin^2\theta,\\
\rho_{22}(\Psi_1) &= \rho^{\frac12\frac12}_{(\frac12-\frac12)(\frac12-\frac12)} = \left(\alpha\cos^2\frac{\theta}{2}-\beta\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\left(\alpha^*\cos^2\frac{\theta}{2}-\beta^*\sin^2\frac{\theta}{2}\right),\\
\rho_{23}(\Psi_1) &= \rho^{\frac12\frac12}_{(\frac12-\frac12)(-\frac12\frac12)} = \left(\alpha\cos^2\frac{\theta}{2}-\beta\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\left(\beta^*\cos^2\frac{\theta}{2}-\alpha^*\sin^2\frac{\theta}{2}\right),\\
\rho_{24}(\Psi_1) &= \rho^{\frac12\frac12}_{(\frac12-\frac12)(-\frac12-\frac12)} = -\frac{i}{2}e^{-i\varphi}(\alpha^*+\beta^*)\sin\theta\left(\alpha\cos^2\frac{\theta}{2}-\beta\sin^2\frac{\theta}{2}\right),\\
\rho_{34}(\Psi_1) &= \rho^{\frac12\frac12}_{(-\frac12\frac12)(-\frac12-\frac12)} = \frac{i}{2}e^{-i\varphi}(\alpha^*+\beta^*)\sin\theta\left(\alpha\sin^2\frac{\theta}{2}-\beta\cos^2\frac{\theta}{2}\right),\\
\rho_{44}(\Psi_1) &= \rho^{\frac12\frac12}_{(-\frac12-\frac12)(-\frac12-\frac12)} = \frac14(\alpha+\beta)(\alpha^*+\beta^*)\sin^2\theta,\\
\rho_{33}(\Psi_1) &= \rho^{\frac12\frac12}_{(-\frac12\frac12)(-\frac12\frac12)} = \left(\alpha\sin^2\frac{\theta}{2}-\beta\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\left(\alpha^*\sin^2\frac{\theta}{2}-\beta^*\cos^2\frac{\theta}{2}\right).
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Схожий вид имеют и элементы матрицы плотности состояния Ψ_2.

Элементы матрицы плотности смешанного состояния являются суммами элементов матриц плотности образующих его состояний, умноженных на соответствующие вероятности.

Введем обозначения

$$\alpha = \sin\omega e^{i\tau}, \qquad \beta = \cos\omega e^{-i\tau}. \tag{30}$$

Используя параметризацию (30), запишем диагональные элементы матрицы плотности смешанного состояния, образованного чистыми состояниями (27)

$$
\begin{aligned}
\rho_{11} &= \frac14(1+\Delta\sin2\omega\cos2\tau)\sin^2\theta,\\
\rho_{22} &= \frac12\left(1-\Delta\cos2\omega\cos\theta-\frac12\sin^2\theta(1+\Delta\sin2\omega\cos2\tau)\right),\\
\rho_{33} &= \frac12\left(1+\Delta\cos2\omega\cos\theta-\frac12\sin^2\theta(1+\Delta\sin2\omega\cos2\tau)\right),\\
\rho_{44} &= \frac14(1+\Delta\sin2\omega\cos2\tau)\sin^2\theta,
\end{aligned}
\tag{31}
$$

где $\Delta = w_1 - w_2$.

Мы видим, что в диагональные матричные элементы входят две величины $Q_1 = \Delta \sin 2\omega \cos 2\tau$, $Q_2 = \Delta \cos 2\omega$, зависящие от трех параметров. Через эти два параметра выражаются еще и элементы ρ_{14}, ρ_{41}, а все остальные зависят еще и от величины $R = \Delta \sin 2\omega \sin 2\tau$, которая не выражается через Q_1, Q_2. Легко получаются выражения

$$R = (\Delta^2 - Q_1^2 - Q_2^2)^{1/2}, \quad \cos 2\omega = Q_2/\Delta, \quad \cos 2\tau = Q_1(\Delta^2 - Q_2^2)^{-1/2}. \tag{32}$$

Формулы (32) описывают однопараметрическое семейство состояний (27), матрицы плотности которых имеют одинаковые диагональные элементы (31), но разные недиагональные. В общем случае, когда смешанное состояние состоит из четырех чистых, семейство состояний, имеющих одинаковые диагональные элементы матрицы плотности, является трехпараметрическим. В этом легко убедиться, посчитав число параметров, которые не определяются с помощью формулы (9). Мы не можем определить величины (19), это три комплексных числа, однако из формулы (5) легко получить, что

$$(\rho_{00}^{01})^* = \rho_{00}^{01}, \quad (\rho_{01}^{01})^* = -\rho_{-10}^{10}, \quad (\rho_{0-1}^{01})^* = \rho_{10}^{10}\,. \tag{33}$$

Из формул (33) следует, что неизвестные величины (19) содержат только три вещественных неизвестных параметра. Эти три параметра и определяют семейство состояний. Чтобы зафиксировать конкретное состояние внутри семейства, надо задать три вещественных числа, их характеризующих. В качестве таких чисел можно взять вероятности w_1, w_2, w_3, w_4, задающие структуру смешанного состояния.

Задавая вероятности $w_1 = 1$, $w_2 = w_3 = w_4 = 0$, получаем чистое состояние, в случае смешанного состояния, состоящего из чистых, имеем $w_1 \neq 0$, $w_2 \neq 0$, $w_3 = 0$, $w_4 = 0$, $w_1 + w_2 = 1$, мы приходим к формулам (32), позволяющим восстановить всю матрицу плотности. Аналогичные, но более сложные формулы можно получить и в том случае, когда все $w_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, 4$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работах [14–18] была развита концепция, согласно которой весь формализм квантовой механики переформулировался на языке, использующем только измеряемые величины. В качестве этих величин предлагалось использовать классические вероятности значений тех или иных наблюдаемых. Для систем, рассмотренных в [14–18], такие вероятности задаются диагональными элементами матрицы плотности соответствующих состояний.

Результаты данной работы показывают, что в случае смешанных двухчастичных состояний одних только диагональных элементов матрицы плотности, рассмотренной только с точки зрения одной, общей для обоих спинов, системы отсчета, оказывается недостаточно для полного описания состояния, к ним необходимо добавить еще вероятности w_i, $i = 1\ldots$, с которыми чистые состояния входят в смешанные. При этом по диагональным элементам строится семейство состояний, матрицы плотности которых имеют одинаковые диагональные матричные элементы, но разные недиагональные, а вероятности w_i определяют нужное состояние внутри семейства. Тем самым общая концепция задания состояний с помощью классических вероятностей реализуется и в нашем случае.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 96-02-17222, № 96-02-17987).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Приведем выражения для элементов двухчастичной матрицы плотности для спинов $j_1 = j_2 = 1/2$ через величины ρ^{kl}_{mn}:

$$\rho^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{(\frac{1}{2}\frac{1}{2})(\frac{1}{2}\frac{1}{2})} = \rho^{11}_{11},$$

$$\rho^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{(\frac{1}{2}\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho^{11}_{10} + \rho^{10}_{10}),$$

$$\rho^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{(\frac{1}{2}\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}\frac{1}{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho^{11}_{10} - \rho^{10}_{10}),$$

$$\rho^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{(\frac{1}{2}\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})} = \rho^{11}_{1-1},$$

$$\rho^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}\frac{1}{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho^{11}_{01} - \rho^{01}_{01}),$$

$$\rho^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}(\rho^{00}_{00} + \rho^{11}_{00} + \rho^{10}_{00} + \rho^{01}_{00}),$$

$$\rho^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}(-\rho^{00}_{00} + \rho^{11}_{00} - \rho^{10}_{00} + \rho^{01}_{00}),$$

$$\rho^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho^{11}_{0-1} + \rho^{01}_{0-1}),$$

$$\rho^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{(-\frac{1}{2}\frac{1}{2})(\frac{1}{2}\frac{1}{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho^{11}_{01} - \rho^{01}_{01}),$$

$$\rho^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{(-\frac{1}{2}\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}(-\rho^{00}_{00} + \rho^{11}_{00} + \rho^{10}_{00} - \rho^{01}_{00}),$$

$$\rho^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{(-\frac{1}{2}\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}(\rho^{00}_{00} + \rho^{11}_{00} - \rho^{10}_{00} - \rho^{01}_{00}),$$

$$\rho^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{(-\frac{1}{2}\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho^{11}_{0-1} - \rho^{01}_{0-1}),$$

$$\rho^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}\frac{1}{2})} = \rho^{11}_{-11},$$

$$\rho^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho^{11}_{-10} - \rho^{10}_{-10}),$$

$$\rho^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}\frac{1}{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho^{11}_{-10} + \rho^{10}_{-10}),$$

$$\rho^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})} = \rho^{11}_{-1-1}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Приведем явный вид элементов матриц плотности некоторых двухчастичных состояний. При их вычислении мы пользуемся формулой (3) и D-функциями

$$D^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = e^{-i\frac{1}{2}(\phi+\psi)}\cos\frac{\theta}{2}\ , \quad D^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = ie^{-i\frac{1}{2}(\phi-\psi)}\sin\frac{\theta}{2}\ ,$$

$$D^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = ie^{-i\frac{1}{2}(-\phi+\psi)}\cos\frac{\theta}{2}\ , \quad D^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = ie^{-i\frac{1}{2}(-\phi-\psi)}\sin\frac{\theta}{2}\ .$$

Синглетное состояние:

$$\Psi_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|(1)+\rangle|(2)-\rangle - |(1)-\rangle|(2)+\rangle),$$

$$\rho_{22} = \frac{1}{2}, \quad \rho_{23} = -\frac{1}{2}, \quad \rho_{32} = -\frac{1}{2}, \quad \rho_{33} = \frac{1}{2}.$$

Остальные матричные элементы равны нулю. Поскольку состояние Ψ_{00} является скаляром, элементы его матрицы плотности не меняются при переходе в другую систему координат, что подтверждается прямым вычислением по формуле (3).

Триплетное состояние:

$$\Psi_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|(1)+\rangle|(2)-\rangle + |(1)-\rangle|(2)+\rangle),$$

$$\Psi_{11} = |(1)+\rangle|(2)+\rangle\ , \quad \Psi_{1-1} = |(1)-\rangle|(2)-\rangle.$$

В лабораторной системе координат элементы матрицы плотности состояния Ψ_{10} имеют вид

$$\rho_{22} = \frac{1}{2}\ , \quad \rho_{23} = \frac{1}{2}\ , \quad \rho_{32} = \frac{1}{2}\ , \quad \rho_{33} = \frac{1}{2}\ ,$$

остальные равны нулю. При переходе в другую систему координат в соответствии с формулой (3) имеем

$$\tilde{\rho}_{11} = \frac{1}{2}\sin^2\theta, \quad \tilde{\rho}_{12} = \tilde{\rho}_{13} = \frac{i}{2}e^{-i\phi}\sin\theta\cos\theta, \quad \tilde{\rho}_{14} = \frac{1}{2}e^{-2i\phi}\sin^2\theta\ ,$$

$$\tilde{\rho}_{22} = \tilde{\rho}_{23} = \frac{1}{2}\cos^2\theta, \quad \tilde{\rho}_{24} = -\frac{i}{2}e^{-i\phi}\sin\theta\cos\theta,$$

$$\tilde{\rho}_{33} = \frac{1}{2}\cos^2\theta, \quad \tilde{\rho}_{34} = -\frac{i}{2}e^{-i\phi}\sin\theta\cos\theta,$$

$$\tilde{\rho}_{44} = \frac{1}{2}\sin^2\theta.$$

Состоянию Ψ_{11} соответствует матрица плотности с единственным ненулевым элементом $\rho_{11} = 1$. В произвольной системе координат имеем

$$\tilde{\rho}_{11} = \cos^4\frac{\theta}{2}, \quad \tilde{\rho}_{12} = \tilde{\rho}_{13} = -ie^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\cos^3\frac{\theta}{2}, \quad \tilde{\rho}_{14} = -ie^{-i\phi}\sin^2\theta\cos^2\theta,$$

$$\tilde{\rho}_{22} = \tilde{\rho}_{23} = \sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}, \quad \tilde{\rho}_{24} = -ie^{-i\phi}\sin^3\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2},$$

$$\tilde{\rho}_{33} = \sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}, \quad \tilde{\rho}_{34} = -ie^{-i\phi}\sin^3\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2},$$

$$\tilde{\rho}_{44} = \sin^4\frac{\theta}{2}.$$

В случае состояния Ψ_{1-1} также имеется только один ненулевой матричный элемент $\rho_{44} = 1$. При переходе к произвольной системе координат получим

$$\tilde{\rho}_{11} = \sin^4\frac{\theta}{2}, \quad \tilde{\rho}_{12} = \tilde{\rho}_{13} = ie^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\sin^3\frac{\theta}{2}, \quad \tilde{\rho}_{14} = -ie^{-i\phi}\sin^2\theta\cos^2\theta,$$

$$\tilde{\rho}_{22} = \tilde{\rho}_{23} = \sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}, \quad \tilde{\rho}_{24} = ie^{-i\phi}\cos^3\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2},$$

$$\tilde{\rho}_{33} = \sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}, \quad \tilde{\rho}_{34} = ie^{-i\phi}\cos^3\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2},$$

$$\tilde{\rho}_{44} = \cos^4\frac{\theta}{2}.$$

Литература

1. E. Schrödinger, Ann. d. Physik **79**, 489 (1926).
2. L. De Broglie, Compt. Rend. **183**, 447 (1926); **184**, 273 (1927); **185**, 380 (1927).
3. E. Madelung, Zeits. f. Physik **40**, 332 (1926).
4. D. Bohm, Phys. Rev. **85**, 166, 180 (1952).
5. E. Nelson, Phys. Rev. **150**, 1079 (1966).
6. W. Pauli, Z. Physik **31**, 765 (1925).
7. L. D. Landau, Z. Physik **45**, 430 (1927).
8. J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin (1932).
9. J. Bertrand and P. Bertrand, Found. Phys. **17**, 397 (1987).
10. K. Vogel and H. Risken, Phys. Rev. A **40**, 2847 (1989).
11. K. E. Cahill and R. J. Glauber, Phys. Rev. **177**, 1882 (1969).
12. E. Wigner, Phys. Rev. **40**, 749 (1932).
13. D. T. Smithey, M. Beck, M. G. Raymer, and A. Faridani, Phys. Rev. Lett. **70**, 1244 (1993).
14. S. Mancini, V. I. Man'ko, and P. Tombesi, Phys. Lett. A **213**, 1 (1996).
15. S. Mancini, V. I. Man'ko, and P. Tombesi, Found. Phys. **27**, 801 (1997).
16. V. I. Man'ko, J. Russ. Laser Research **17**, 579 (1996).
17. O. V. Man'ko and V. I. Man'ko, J. Russ. Laser Research **18**, 407 (1997).
18. V. I. Man'ko, in *Symmetries in Science IX*, ed. by B. Gruber and M. Ramer, Plenum Press, N.Y. (1997), p. 215.
19. V. I. Man'ko and S. S. Safonov, J. Russ. Laser Research **18**, 501 (1997).
20. В. И. Манько, С. С. Сафонов, ТМФ **112**, 467 (1997).
21. V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, Phys. Lett. A **229**, 335 (1997).
22. О. В. Манько, В. И. Манько, ЖЭТФ **112**, 796 (1997).
23. В. И. Манько, С. С. Сафонов, ЯФ **61**, 658 (1998).
24. В. И. Манько, С. С. Сафонов, ТМФ **115**, (1998).
25. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Релятивистская квантовая теория*, Наука, Москва (1974).
26. G. S. Agarwal, Phys. Rev. A **57**, 671 (1998).