ЖЭТФ, 1998, том 114, вып. 2(8), стр. 448–457

ТОЧНОЕ КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ 1/2 И ДВИЖЕНИЯ СПИНА В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*А. Я. Силенко**

Научно-исследовательский институт ядерных проблем при Белорусском государственном университете 220080, Минск, Беларусь

Поступила в редакцию 13 августа 1997 г.

В рамках уравнения Дирака–Паули получено точное уравнение движения спина частиц со спином 1/2 и аномальным магнитным моментом в постоянном и однородном магнитном поле. Найдены точные формулы для угловой скорости их вращения по круговым орбитам и для поворота спина частиц относительно импульса. Выведено квантовомеханическое уравнение движения частиц в сильном магнитном поле.

1. ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени известно ограниченное число точных решений уравнений Дирака и Дирака-Паули [1], учитывающих наличие у частиц аномального магнитного момента. Наиболее полно эти решения представлены в монографии [2]. Почти все ранее полученные точные решения заключались в нахождении уровней энергии и волновых функций частиц со спином 1/2 во внешнем поле. Такие задачи решались как в представлении Дирака, так и в представлении Фолди–Ваутхаузена (ФВ) [3].

Отличительной особенностью представления ФВ является квазидиагональный вид оператора Гамильтона, что приводит к разделению уравнений для двух спиноров. Поэтому для полного описания состояния частиц в представлении ФВ достаточно одного из спиноров. Существенно, что в представлении ФВ операторы имеют четный вид, и, следовательно, нет необходимости в выделении их четной части. Особая роль представления ФВ заключается еще и в том, что операторам, заданным именно в этом представлении (например, операторам координаты $\mathbf{r}$ и импульса $\mathbf{p}$) могут быть сопоставлены соответствующие классические величины, в то время как в результате унитарных преобразований к другим представлениям, в том числе к представлению Дирака, вид данных операторов может существенно измениться [3].

Однако нахождение точных выражений для оператора Гамильтона в представлении ФВ наталкивается на значительные трудности, и такие выражения найдены лишь для нескольких случаев [4–7]. К числу точно решаемых в представлении ФВ задач относится и задача о частице с аномальным магнитным моментом μ' в однородном магнитном поле произвольной напряженности [6, 7]. Точное уравнение движения спина для более частного случая дираковской частицы ($\mu' = 0$) в однородном магнитном поле было найдено в работе Кейса [4]. В последующих работах для исследования движения спина частицы в сильном магнитном поле использовалось представление Дирака [8, 9].

* E-mail: silenko@inp.minsk.by

В этом представлении был обнаружен и эффект зависимости величины аномального магнитного момента от напряженности поля (динамическая природа аномального магнитного момента) [10]. Однако описание поляризации в представлении ФВ имеет свое преимущество — более простой вид оператора поляризации.

В настоящей работе получено точное уравнение движения спина частиц с аномальным магнитным моментом в однородном магнитном поле, базирующееся на уравнении Дирака–Паули в представлении Фолди–Ваутхаузена. Путем сравнения движения частиц и их спина проведено точное описание движения частиц, а также обусловленного аномальным магнитным моментом поворота спина относительно импульса.

В работе используется релятивистская система единиц $\hbar = c = 1$.

2. ОПИСАНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФОЛДИ–ВАУТХАУЗЕНА

Описание поляризационных эффектов в представлении ФВ упрощается благодаря тому обстоятельству, что оператор поляризации в этом представлении сводится к матрице $\mathbf{\Pi} = \beta\mathbf{\Sigma}$ [11, 12], где

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{\sigma}$ – матрица Паули, 0, ± 1 обозначают соответствующие матрицы 2×2. Если для описания состояния частицы используется только один из спиноров, то оператором поляризации в этом случае является $\boldsymbol{\sigma}$. В представлении Дирака оператор поляризации частиц определяется более громоздким выражением (см. [9, 11–16]).

Операторное уравнение движения спина находится путем вычисления коммутатора оператора Гамильтона $\mathscr{H}$ с оператором поляризации:

$$\frac{d\mathbf{\Pi}}{dt} = i\,[\mathscr{H}, \mathbf{\Pi}]. \tag{1}$$

Поскольку абсолютная величина вектора поляризации не меняется со временем, уравнение (1) представимо в виде

$$\frac{d\mathbf{\Pi}}{dt} = \frac{1}{2}\left([\mathbf{\Omega\Pi}] - [\mathbf{\Pi\Omega}]\right), \qquad \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}' & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\omega}'' \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $\mathbf{\Omega}, \boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\omega}''$ — операторы угловой скорости прецессии спина для биспинора $\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \zeta \end{pmatrix}$ и спиноров ψ и ζ соответственно. Оператор $\mathbf{\Omega}$ квазидиагонален вследствие разделения уравнений для двух спиноров. Отметим, что оператор $d\mathbf{\Pi}/dt$ эрмитов.

Существует определенный произвол при определении оператора $\mathbf{\Omega}$ из уравнения (2). В частности, вид этого уравнения не меняется при преобразовании вида

$$\mathbf{\Omega} \to \mathbf{\Omega}' = \mathbf{\Omega} + \Lambda\mathbf{G}(\mathbf{\Sigma G}), \tag{3}$$

где Λ — скалярный оператор, $[\Lambda, \mathbf{\Sigma}] = [\Lambda, \mathbf{\Omega}] = 0$, $\mathbf{G}$ — постоянный вектор.

Оператор $\mathbf{\Omega}$ можно использовать для строгого квантовомеханического описания движения спина [17], поскольку средние значения проекций этого оператора

$$\langle\Omega_i\rangle = \int \Psi^\dagger \Omega_i \Psi dV, \qquad i = x, y, z, \tag{4}$$

определяют углы поворота спина Φ_i вокруг осей i: $\langle\Omega_i\rangle = d\Phi_i/dt$. Практически, конечно, удобнее использовать только верхний спинор, и тогда (4) приобретает вид

$$\langle\omega_i'\rangle = d\Phi_i/dt = \int \psi^\dagger \omega_i' \psi dV, \tag{5}$$

причем здесь функции ψ нормированы на единицу.

3. ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФОЛДИ–ВАУТХАУЗЕНА

Для частицы с аномальным магнитным моментом в постоянном и однородном магнитном поле энергетический спектр и собственные волновые функции были впервые найдены для представления Дирака [18]. Эта же задача успешно решалась и в представлении ФВ [6, 7]. Путем унитарного преобразования оператор Гамильтона преобразуется к виду [7]

$$\mathscr{H} = \beta\sqrt{\boldsymbol{\pi}_\perp^2 + m^2 - e\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{H}} - \mu'\Pi\mathbf{H} + \alpha_z p_z, \quad \alpha_z = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $\mathbf{p} \equiv -i\nabla$ и $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}$ — операторы импульса и кинетического импульса, $\mathbf{A}$ — векторный потенциал внешнего поля, который для однородного поля может быть представлен в виде $\mathbf{A} = [\mathbf{Hr}]/2$.

Предполагается, что магнитное поле направлено вдоль оси z. Гамильтониан $\mathscr{H}$ не вполне диагонален, поскольку матрица α_z недиагональна. Однако он диагонален для случая поперечного движения частицы, когда собственное значение оператора p_z равно нулю. Поскольку $\partial\mathbf{A}/\partial z = 0$, оператор p_z коммутирует с $\mathscr{H}$, и рассмотрение указанного частного случая является вполне корректным. Случай поперечного движения частицы представляет наибольший практический интерес, а при ее произвольном движении всегда существует система отсчета, в которой $\pi_z\Psi = p_z\Psi = 0$. В этом случае $\boldsymbol{\pi}_\perp = \boldsymbol{\pi}$, оператор Гамильтона диагонален и имеет вид

$$\mathscr{H} = \beta\sqrt{\boldsymbol{\pi}^2 + m^2 - e\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{H}} - \mu'\Pi\mathbf{H}. \tag{7}$$

Диагональность гамильтониана указывает на его соответствие представлению ФВ. Гамильтониан (7) можно получить и другим способом — путем умножения уравнения Дирака-Паули для частицы в магнитном поле

$$\left[\gamma^\mu \pi_\mu - m + \mu'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{H}\right]\Psi = 0, \quad \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu,$$

слева на оператор $\gamma^\mu\pi_\mu + m + \mu'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{H}$. Таким путем, аналогичным использованному в [19], можно привести данное уравнение к форме, квадратичной по оператору $\mathscr{E} \equiv i(\partial/\partial t)$, а затем произвести операторное извлечение квадратного корня.

При использовании приближения слабого поля ($|e|H \ll m^2$) гамильтониан (7) соответствует найденному Сатторпом и де Гроотом [20] (см. также [21]), а при $\mu' = 0$ — гамильтониану дираковской частицы, полученному в работе Кейса [4]. Собственная волновая функция Ψ гамильтониана (7), в отличие от дираковской волновой функции, является собственной функцией оператора Π_z (см. [19]). Приведенные аргументы подтверждают, что уравнение (7) определяет оператор Гамильтона в представлении ФВ.

4. ТОЧНОЕ КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ СПИНА

Точное уравнение движения спина дираковских частиц в постоянном и однородном магнитном поле было впервые получено Кейсом [4][1]:

$$\frac{d\mathbf{\Sigma}}{dt} = \beta(E_+ - E_-)[\mathbf{\Sigma H}]/H, \quad E_\pm = \sqrt{\boldsymbol{\pi}^2 + m^2 \pm eH}. \tag{8}$$

Использование оператора $\mathbf{\Sigma}$ вместо $\mathbf{\Pi}$ для описания поляризации частиц возможно вследствие коммутации матриц β и $\mathbf{\Sigma}$. Угловая скорость прецессии спина дираковских частиц определяется формулой

$$\mathbf{\Omega}_D = -\beta(E_+ - E_-)\mathbf{H}/H. \tag{9}$$

Аналогично можно найти уравнение движения спина для частиц с аномальным магнитным моментом. Линеаризуя выражение (7) для гамильтониана способом, указанным в [22], и вычисляя коммутатор гамильтониана с оператором поляризации, находим, что точное операторное уравнение движения спина имеет вид (2), где оператор угловой скорости прецессии определяется соотношением

$$\mathbf{\Omega} = -\beta\left[(E_+ - E_-)/H + 2\mu'\right]\mathbf{H} = \mathbf{\Omega}_D - 2\beta\mu'\mathbf{H}. \tag{10}$$

Оператор $\mathbf{\Omega}$ коммутирует с гамильтонианом (7), и его собственные значения в стационарных состояниях равны

$$\mathbf{\Omega} = -\beta\left[\left(\sqrt{m^2 + (2n+1)|e|H + eH} - \sqrt{m^2 + (2n+1)|e|H - eH}\right)\frac{1}{H} + 2\mu'\right]\mathbf{H}. \tag{11}$$

В рамках уравнения Дирака–Паули формула (11) дает точное выражение для частоты прецессии (и, следовательно, углов поворота) спина частиц со спином 1/2 в сильном магнитном поле. Формулы (10), (11) являются обобщением уравнения Баргманна–Мишеля–Телегди (БМТ) [23] на случай учета эффектов сильного поля.

Как было отмечено в разд. 2, к оператору $\mathbf{\Omega}$ можно добавить слагаемое вида $\Lambda\mathbf{G}(\mathbf{\Sigma G})$, не изменяющее вида уравнения движения спина. При $\mathbf{G} = \mathbf{H}$ наличие такого слагаемого может создать иллюзию зависимости угловой скорости прецессии спина от знака проекции спина на направление магнитного поля, поскольку оператор $\mathbf{\Sigma H} = \Sigma_z H$ коммутирует с гамильтонианом. В действительности, однако, основной характеристикой движения спина является уравнение движения спина, т. е. выражение для оператора $d\mathbf{\Pi}/dt$, а не для определяемого неоднозначно оператора $\mathbf{\Omega}$. Отсюда можно сделать вывод, что среднее значение оператора $\mathbf{\Omega}$, вычисляемое по формулам (2), (4), определяет среднюю скорость поворота спина в том и только том случае, когда этот оператор коммутирует с $\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi}$ и, следовательно, не содержит спиновых матриц. В противном случае при переходе к квазиклассическому приближению путем усреднения операторов в уравнении движения спина (2) оператор $\mathbf{\Omega}$ в соответствии с этим уравнением нельзя

[1] Следует отметить, что формула (8), как и другие формулы этого раздела, является точной в том смысле, что она эквивалентна исходному уравнению Дирака. Однако сами уравнения Дирака и Дирака–Паули, полученные в одночастичном приближении, не дают исчерпывающего описания состояния частицы. Они, в частности, не учитывают радиационных поправок.

рассматривать как действующий непосредственно на волновую функцию Ψ, и для него формула (4) становится неприменимой. Поэтому только определяемый соотношениями (10), (11) оператор $\mathbf{\Omega}$, коммутирующий с $\mathbf{\Sigma}$ и $\mathbf{\Pi}$, позволяет найти выражение для средней угловой скорости вращения спина.

5. ТОЧНОЕ КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ

Исследование движения частицы является более сложной задачей по сравнению с исследованием движения спина вследствие некоммутации оператора угловой скорости вращения частицы по окружности в магнитном поле и оператора кинетического импульса. В [16] было найдено уравнение движения для скалярной частицы в магнитном поле, решаемое методом последовательных приближений, а в [20] — уравнение для частицы со спином 1/2 в приближении слабого поля. Покажем, что возможно точное квантовомеханическое описание движения частицы со спином 1/2, базирующееся на сравнении движения частицы и спина.

Оператор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ естественно определить с помощью уравнения, аналогичного (2):

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} = \frac{1}{2}([\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\pi}] - [\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\omega}]). \tag{12}$$

Однако $\boldsymbol{\omega}$ не является оператором, среднее значение которого характеризует угловую скорость вращательного движения частицы. Поскольку операторы $\boldsymbol{\pi}$ и $\boldsymbol{\omega}$ не коммутируют, при переходе к квазиклассическому приближению путем усреднения операторов $\boldsymbol{\omega}$ нельзя рассматривать как оператор, действующий непосредственно на волновую функцию Ψ. Поэтому $\langle\omega_i\rangle \neq d\phi_i/dt$, где ϕ_i — углы поворота вектора импульса вокруг осей $i = x, y, z$. Следовательно, хотя уравнения типа (12), разумеется, адекватно описывают движение частицы в пределах той точности, с которой они получены, однако сами по себе они не дают выражений для угловой скорости ее движения. В то же время при движении частицы в постоянном и однородном магнитном поле ее угловая скорость имеет фиксированное значение, что доказывается следующими аргументами. Оператор Гамильтона (7) удобно представить в виде

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2, \quad \mathscr{H}_1 = \beta\sqrt{\boldsymbol{\pi}^2 + m^2 - e\mathbf{\Sigma}\mathbf{H}} = \beta\sqrt{m^2 + (\mathbf{\Sigma}\boldsymbol{\pi})^2}, \quad \mathscr{H}_2 = -\mu'\mathbf{\Pi}\mathbf{H}. \tag{13}$$

Здесь $\mathscr{H}_1$ — дираковский гамильтониан. Он коммутирует с оператором $\mathbf{\Pi}\boldsymbol{\pi} = \beta\mathbf{\Sigma}\boldsymbol{\pi}$, поскольку $\beta\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}\beta$, а также с оператором $|\boldsymbol{\pi}| = \sqrt{\boldsymbol{\pi}^2}$. Учитывая соотношение $\mathbf{\Pi}\boldsymbol{\pi} = \Pi_\pi|\boldsymbol{\pi}|$, находим, что

$$\left[\mathscr{H}_1, \Pi_\pi|\boldsymbol{\pi}|\right] = \left[\mathscr{H}_1, \Pi_\pi\right]|\boldsymbol{\pi}| = 0, \qquad [\mathscr{H}_1, \Pi_\pi] = 0,$$

и для дираковских частиц сохраняется проекция оператора поляризации на направление кинетического импульса Π_π. Этот результат был ранее получен в [13, 16] путем использования представления Дирака. Сохранение проекции оператора поляризации на направление кинетического импульса приводит к точному совпадению угловых скоростей вращения дираковской частицы по круговой орбите и прецессии ее спина.

Введем оператор угловой скорости вращательного движения $\mathbf{o}$, среднее значение которого, в отличие от оператора $\boldsymbol{\omega}$, адекватно отражает реальное движение частицы ($\langle o_i \rangle = d\phi_i/dt$). Из предыдущего изложения следует, что $\mathbf{o} \doteq \boldsymbol{\Omega}_D$. Поскольку

$$[\mathscr{H}_2, \boldsymbol{\pi}] = 0, \qquad \frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} = i[\mathscr{H}, \boldsymbol{\pi}] = i[\mathscr{H}_1, \boldsymbol{\pi}],$$

уравнение движения частицы с аномальным магнитным моментом не отличается от уравнения движения дираковской частицы. Поэтому оператор $\mathbf{o}$ для такой частицы определяется следующим точным выражением:

$$\mathbf{o} = \boldsymbol{\Omega}_D = -\beta(E_+ - E_-)\mathbf{H}/H. \tag{14}$$

Поворот спина относительно вектора импульса характеризуется разностью угловых скоростей прецессии спина частицы $\boldsymbol{\Omega}$ и ее орбитального движения $\mathbf{o}$. Точное выражение для этой величины можно найти из формул (10), (14):

$$\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{o} = -2\beta\mu'\mathbf{H}. \tag{15}$$

6. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Хотя в предыдущем разделе было проведено точное описание движения частицы с аномальным магнитным моментом в однородном магнитном поле путем введения оператора $\mathbf{o}$, представляет интерес нахождение уравнения движения частицы в сильном магнитном поле. Построение теории эффектов сильного поля требует выхода за рамки уравнения Дирака–Паули. Однако для корректного расчета поправок, вносимых такими эффектами в уравнения движения частицы и спина, необходимо вначале вывести данные уравнения из уравнения Дирака–Паули. Поэтому в данном разделе будет найдено уравнение движения частицы, базирующееся на уравнении Дирака–Паули и справедливое с точностью до членов порядка H^4. Получение точного уравнения не представляется возможным в связи с некоммутацией оператора $\boldsymbol{\pi}$ с $\boldsymbol{\pi}^2$ и оператором кинетической энергии $\epsilon = \sqrt{\boldsymbol{\pi}^2 + m^2}$:

$$[\boldsymbol{\pi}^2, \boldsymbol{\pi}] = ie([\mathbf{H}\boldsymbol{\pi}] - [\boldsymbol{\pi}\mathbf{H}]) = 2ie[\mathbf{H}\boldsymbol{\pi}] \neq 0, \qquad [\epsilon, \boldsymbol{\pi}] \neq 0.$$

Уравнение движения частицы, записанное для оператора кинетического импульса $\boldsymbol{\pi}$, имеет вид (12). Покажем, что выражение для $\boldsymbol{\omega}$ не меняется при нахождении уравнений движения для других операторов: единичного оператора в направлении движения

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{\pi}|}\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{\pi}|}\right)$$

или оператора скорости, который можно записать в виде

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\epsilon}\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\pi}\frac{1}{\epsilon}\right).$$

Это обусловлено коммутацией операторов $|\boldsymbol{\pi}|$ и ϵ с гамильтонианом $\mathscr{H}$, а также, как будет показано ниже, с оператором $\boldsymbol{\omega}$. Для любого коммутирующего с $\mathscr{H}$, $\boldsymbol{\omega}$ оператора A находим

$$\frac{d}{dt}(A\boldsymbol{\pi}) = iA[\mathscr{H},\boldsymbol{\pi}] = \frac{1}{2}A([\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\pi}] - [\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\omega}]) = \frac{1}{2}([\boldsymbol{\omega}\, A\boldsymbol{\pi}] - [A\boldsymbol{\pi}\,\boldsymbol{\omega}]),$$

где $\boldsymbol{\omega}$ определяется уравнением (12). Аналогичное соотношение нетрудно получить и для величины $d(\boldsymbol{\pi}A)/dt$, что позволяет доказать сделанное утверждение.

Нетрудно найти точные соотношения, позволяющие выразить коммутатор двух произвольных операторов A и B через коммутатор операторов A^2 и B [2)]:

$$[A^{-1}, B] = A^{-1}[B, A]A^{-1}, \tag{16}$$

$$[A, B] = \frac{1}{4}\{A^{-1}, [A^2, B]\}_+ - \frac{1}{4}\left[[A, [A, B]], A^{-1}\right], \tag{17}$$

где $A^{-1} \equiv 1/A$, $\{\ldots,\ldots\}_+$ — антикоммутатор.

Формула (17) позволяет найти величину $[A, B]$ методом последовательных приближений, если коммутатор операторов по порядку величины мал по сравнению с их произведением. В первом приближении

$$[A, B] \approx \frac{1}{4}\{A^{-1}, [A^2, B]\}_+ - \frac{1}{16}\left[[A, \{A^{-1}, [A^2, B]\}_+], A^{-1}\right].$$

Поскольку $\left[A, \{A^{-1}, C\}_+\right] = A^{-1}[A^2, C]A^{-1}$ для любого оператора C, то

$$\begin{aligned}[A, B] &\approx \frac{1}{4}\{A^{-1}, C\}_+ - \frac{1}{16}\left[A^{-1}[A^2, C]A^{-1}, A^{-1}\right] \approx \\ &\approx \frac{1}{4}\{A^{-1}, C\}_+ - \frac{1}{64}A^{-2}\{A^{-1}, [A^2, [A^2, C]]\}_+ A^{-2}, \qquad C = [A^2, B].\end{aligned} \tag{18}$$

Использование соотношений (16)–(18) позволяет определить оператор $\boldsymbol{\omega}$ с точностью до членов порядка H^4. Введем обозначение $\mathscr{A} = \sqrt{\boldsymbol{\pi}^2 + m^2 - e\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{H}}$. Тогда для гамильтониана (7) $[\mathscr{H}, \boldsymbol{\pi}] = \beta[\mathscr{A}, \boldsymbol{\pi}]$. Входящие в уравнение (18) коммутаторы равны

$$[\mathscr{A}^2, \boldsymbol{\pi}] = [\boldsymbol{\pi}^2, \boldsymbol{\pi}] = 2ie[\mathbf{H}\boldsymbol{\pi}], \qquad \left[\mathscr{A}^2, \left[\mathscr{A}^2, [\mathscr{A}^2, \boldsymbol{\pi}]\right]\right] = 8ie^3H^2[\mathbf{H}\boldsymbol{\pi}]. \tag{19}$$

С помощью формул (12), (16)–(19) находим уравнение движения частицы:

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} = -\beta\frac{e}{2}\left\{\mathscr{A}^{-1}, [\mathbf{H}\boldsymbol{\pi}]\right\}_+ + \frac{1}{8}\beta e^3H^2\mathscr{A}^{-2}\left\{\mathscr{A}^{-1}, [\mathbf{H}\boldsymbol{\pi}]\right\}_+\mathscr{A}^{-2}.$$

С точностью до двойного коммутатора, имеющего порядок величины H^5,

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} = -\beta\frac{e}{2}\left\{\frac{1}{\mathscr{A}}\left(1 - \frac{e^2H^2}{4\mathscr{A}^4}\right), [\mathbf{H}\boldsymbol{\pi}]\right\}_+. \tag{20}$$

В соответствии с формулами (12), (20) выражение для оператора $\boldsymbol{\omega}$ имеет вид

---

2) Подобный метод исследования был применен в [16].

$$\omega = -\beta \frac{e}{\mathscr{A}} \left(1 - \frac{e^2 H^2}{4\mathscr{A}^4}\right) \mathbf{H}. \qquad (21)$$

Поправки к уравнениям (20), (21) имеют порядок величины H^5. Следовательно, соотношения (20), (21) дают уравнение движения частицы и угловую скорость ее орбитального движения с точностью до членов порядка H^4 включительно. Отметим, что эти соотношения демонстрируют справедливость сделанного выше предположения о том, что оператор $\boldsymbol{\omega}$ коммутирует с операторами $|\boldsymbol{\pi}| = \sqrt{\boldsymbol{\pi}^2}$ и ϵ.

Нетрудно показать, что для дираковских частиц уравнения движения частицы и ее спина имеют одинаковую структуру. Коммутаторы, соответствующие (19), равны

$$[\mathscr{A}^2, \mathbf{\Pi}] = -e[(\mathbf{\Sigma H}), \mathbf{\Pi}] = 2ie[\mathbf{H\Pi}], \qquad \left[\mathscr{A}^2, \left[\mathscr{A}^2, [\mathscr{A}^2, \mathbf{\Pi}]\right]\right] = 8ie^3 H^2 [\mathbf{H\Pi}].$$

В результате приближенное (с точностью до членов порядка H^4 включительно) уравнение движения спина дираковских частиц можно представить в виде

$$\frac{d\mathbf{\Pi}}{dt} = -\beta \frac{e}{2} \left\{ \frac{1}{\mathscr{A}} \left(1 - \frac{e^2 H^2}{4\mathscr{A}^4}\right), [\mathbf{H\Pi}] \right\}_+ . \qquad (22)$$

Полная аналогия уравнений (20) и (22) подтверждает вывод о совпадении угловых скоростей орбитального движения дираковской частицы и прецессии ее спина. Уравнение (22) можно преобразовать к виду, согласующемуся с точным уравнением (8).

7. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ВЫВОДЫ

В настоящей работе проведено точное квантовомеханическое описание движения частиц со спином 1/2, обладающих аномальным магнитным моментом, и движения спина в однородном магнитном поле. Поскольку использовалось уравнение Дирака–Паули в представлении Фолди–Ваутхаузена, возникает вопрос о виде найденных уравнений при переходе к другим представлениям. Из общих положений теории представлений следует, что в этом случае операторы подвергаются унитарному преобразованию, а вид уравнений не меняется. Легко видеть, однако, что при наличии внешнего поля такое преобразование приводит к изменению вида не только операторов поляризации $\mathbf{O}$ и координат x, y, z, но и операторов импульса $\mathbf{p} \equiv -i\nabla$ и кинетического импульса $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}$. Поэтому, в частности, зависимость уравнения движения спина в представлении Дирака от оператора $\boldsymbol{\pi}' = U^{-1}\boldsymbol{\pi} U$ (U — оператор унитарного преобразования) будет точно такой, как зависимость этого же уравнения в представлении ФВ от оператора $\boldsymbol{\pi}$. Однако эти два уравнения будут различным образом зависеть от оператора $\boldsymbol{\pi}$. В результате возникает иллюзия изменения характера движения спина или даже возникновения новых эффектов.

Известно, что представление ФВ является выделенным, поскольку в этом представлении операторы имеют четный вид и могут быть сопоставлены соответствующим классическим величинам. Другие представления таким свойством не обладают. Полученное в настоящей работе уравнение движения спина в однородном магнитном поле может быть преобразовано к представлению Дирака путем использования оператора унитарного преобразования, найденного для данного случая в [7].

Важное практическое значение имеет точное квантовомеханическое описание движения спина частицы относительно ее импульса в сильном магнитном поле. Поскольку частица движется по окружности, можно сравнивать угловые скорости вращения частицы и ее спина, разность которых определяет поворот спина относительно импульса. Для дираковских частиц такое движение не происходит ($\mathbf{\Omega}_D = \mathbf{o}$), а поворот спина относительно импульса имеет место только для частиц с аномальным магнитным моментом. С помощью формул (4), (15) можно точно определить угол поворота. Так, если в начальный момент времени пучок частиц поляризован вдоль направления импульса, то через время t вектор поляризации пучка составит с направлением импульса угол θ, равный

$$\theta = (\langle\Omega_z\rangle - \langle o_z\rangle)t = -2\mu' Ht. \tag{23}$$

Разумеется, следует учитывать, что формулы (15), (23) являются точными только в рамках уравнения Дирака–Паули. Как известно, учет эффектов сильного поля дает поправки как к аномальному магнитному моменту электрона, так и к уравнению Дирака–Паули (см. [9]). Существуют также радиационные поправки к уравнению движения спина, позволяющие учесть затухание [16]. Экспериментальное обнаружение наличия поправок к формулам (10), (15), (23) однозначно указало бы на выход за рамки уравнения Дирака–Паули[3)], а определение величины этих поправок позволило бы установить степень соответствия данных теории и эксперимента.

Согласно методу точных решений, сформулированному в [9, 13, 15], точные решения уравнений Дирака или Дирака–Паули рассматриваются в качестве нулевого приближения, а поправки к ним рассчитываются по теории возмущений при выходе за рамки одночастичного подхода. Это позволяет использовать полученные результаты при необходимости более полного учета эффектов сильного поля.

Литература

1. W. Pauli, Rev. Mod. Phys. **13**, 203 (1941).
2. В. Г. Багров, Д. М. Гитман, И. М. Тернов и др., *Точные решения релятивистских волновых уравнений*, Новосибирск, Наука (1982).
3. L. L. Foldy and S.A. Wouthuysen, Phys. Rev. **78**, 29 (1950).
4. K. M. Case, Phys. Rev. **95**, 1323 (1954).
5. E. Eriksen, Phys. Rev. **111**, 1011 (1958).
6. W. Tsai and A. Yildiz, Phys. Rev. D **4**, 3643 (1971).
7. W. Tsai, Phys. Rev. D **7**, 1945 (1973).
8. И. М. Тернов, ЖЭТФ **98**, 1169 (1990).
9. И. М. Тернов, О. Ф. Дорофеев, ЭЧАЯ **25**, 5 (1994).
10. И. М. Тернов, В. Г. Багров, В. А. Бордовицын, О. Ф. Дорофеев, ЖЭТФ **55**, 2273 (1968).
11. D. M. Fradkin and R.H. Good, Rev. Mod. Phys. **33**, 343 (1961).
12. И. М. Тернов, В. Р. Халилов, В. Н. Родионов, *Взаимодействие заряженных частиц с сильным электромагнитным полем*, МГУ, Москва (1982).
13. А. А. Соколов, И. М. Тернов, *Релятивистский электрон*, Наука, Москва (1983).
14. И. М. Тернов, В. В. Михайлин, *Синхротронное излучение. Теория и эксперимент*, Энергоатомиздат, Москва (1986).

[3)] В частности, из уравнения Дирака–Паули строго следует существование линейной зависимости между величинами θ и H.

15. И. М. Тернов, В. Ч. Жуковский, А. В. Борисов, *Квантовые процессы в сильном внешнем поле*, МГУ, Москва (1989).
16. В. Н. Байер, В. М. Катков, В. С. Фадин, *Излучение релятивистских электронов*, Атомиздат, Москва (1973).
17. А. Я. Силенко, ЖЭТФ **107**, 1240 (1995).
18. И. М. Тернов, В. Г. Багров, В. Ч. Жуковский, Вестник МГУ. Сер. физ., астр. № 1, 30 (1966).
19. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1989).
20. L. G. Suttorp and S. R. de Groot, Nuovo Cim. A **65**, 245 (1970); С. Р. де Гроот, Л. Г. Сатторп, *Электродинамика*, Наука, Москва (1982).
21. А. Я. Силенко, ТМФ **105**, 46 (1995).
22. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, Москва (1989), с. 250.
23. V. Bargmann, L. Michel, and V. L. Telegdi, Phys. Rev. Lett. **2**, 435 (1959).