

ИССЛЕДОВАНИЕ РОЛИ ПОЛЯРИЗАЦИОННОГО МЕХАНИЗМА ИЗЛУЧЕНИЯ АТОМОВ В ШИРОКОМ ДИАПАЗОНЕ ЧАСТОТ ФОТОНОВ

А. В. Король

*Российский морской технический университет
198262, Санкт-Петербург, Россия*

*А. Г. Лялин**

*Научно-исследовательский институт физики
Санкт-Петербургского государственного университета
198904, Санкт-Петербург, Петродворец, Россия*

О. И. Оболенский, А. В. Соловьев

*Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе
Российской академии наук
194021, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 12 июля 1997 г.

Разработан эффективный метод расчета сечения тормозного излучения с учетом поляризационного механизма. Рассчитаны сечения тормозного излучения при столкновениях электронов и позитронов с атомами Н и Кг. Продемонстрирована важная роль механизма поляризационного тормозного излучения при формировании полного спектра излучения во всем частотном диапазоне. В работе используется атомная система единиц ($|e| = \hbar = m_e = 1$).

1. ВВЕДЕНИЕ

При столкновении заряженных частиц с мишенью, обладающей внутренней электронной структурой, тормозное излучение возникает в результате проявления двух различных механизмов. Первый из них — механизм обычного тормозного излучения — обусловлен торможением налетающей частицы в статическом поле мишени (см., например, [1, 2]), а второй — механизм поляризационного тормозного излучения — динамической поляризацией мишени электрическим полем налетающей частицы (см., например, [3–5]).

В настоящей работе исследуется роль поляризационного механизма тормозного излучения, формирующегося при рассеянии электронов и позитронов на атомах в широком спектральном диапазоне. Анализ относительной роли двух механизмов излучения проводится на примере атомов водорода и криптона.

Атом водорода представляет собой одноэлектронную систему, для которой возможно получение замкнутых аналитических выражений. Процесс поляризационного тормозного излучения при столкновениях электронов, позитронов и протонов с атомом

* E-mail: lyalin@gnl.usr.pu.ru

водорода, находящимся в основном состоянии, рассматривался в [6–8]. Было продемонстрировано, что механизм поляризационного излучения играет важную роль при формировании полного спектра тормозного излучения. В настоящей работе подробно проанализирована роль поляризационного механизма излучения при столкновениях заряженных частиц с атомом водорода, находящимся в возбужденном состоянии. В работе показано, что имеются существенные различия в поведении сечений тормозного излучения при переходе от основного состояния мишени к возбужденным. Наши расчеты демонстрируют, что с увеличением главного квантового числа состояния электрона в атоме водорода относительная роль поляризационного механизма становится менее значительной в связи с уменьшением экранирования заряда ядра электроном. Однако в спектральной зависимости сечения тормозного излучения, формирующегося при рассеянии заряженных частиц на атоме водорода, находящемся в возбужденном состоянии, возникают особенности, отсутствующие в случае основного состояния. Конкретные численные расчеты сечений процесса выполнены для состояний $1s$, $2s$ и $3s$.

Ранее, до недавно опубликованной работы [9], расчеты сечения поляризационного тормозного излучения, формирующегося на многоэлектронных атомах, проводились лишь в сравнительно узком диапазоне частот фотонов, характерном для возбуждения в атомах гигантских резонансов. Интерес к этой области спектра обусловлен коллективной многоэлектронной природой гигантских резонансов и связанной с этим большой величиной поляризуемости атомов, приводящей к доминированию поляризационного механизма в полном спектре излучения.

Расчеты спектра тормозного излучения, образующегося при электрон-атомных столкновениях, были выполнены в нерелятивистском борновском приближении (BA) для атома Ag [10–13]. В этих работах было рассчитано полное сечение тормозного излучения в области частот фотонов, характерных для возбуждений электронов $3p$ -подоболочки Ag ($\omega = 10\text{--}50$ эВ). Аналогичные вычисления были проведены в спектральном диапазоне вблизи потенциала ионизации $4d$ -подоболочки ($\omega = 100\text{--}200$ эВ) атомов Xe и La [14–16] в борновском приближении и для Xe, Ba, La и Eu [17–22] в рамках приближения искаженных парциальных волн (DPWA). Было продемонстрировано, что поляризационный механизм приводит к появлению в спектрах тормозного излучения резонансной структуры вблизи $3p$ -потенциала ионизации Ag и $4d$ -потенциала ионизации Xe, Ba, La и Eu. Существование подобных максимумов было доказано экспериментально измерениями эмиссионных спектров при рассеянии электронов на La и редкоземельных элементах [23], Xe [15, 24], Ba [25].

В настоящей работе рассмотрен процесс тормозного излучения при рассеянии электронов с энергиями $\varepsilon_1 = 1\text{--}25$ кэВ на атоме Kг. Спектральная зависимость полного сечения тормозного излучения (т. е. сечения, включающего вклады обычного и поляризационного тормозного излучения, а также их интерференцию) рассчитана во всей области частот фотонов от $\omega = 10$ эВ до ε_1 . Показано, что поляризационный механизм играет важную роль при формировании полного спектра тормозного излучения не только вблизи потенциалов ионизации многоэлектронных атомных подоболочек, но и во всем диапазоне частот испущенного фотона. Учет поляризационного механизма тормозного излучения кардинальным образом меняет традиционное представление о его сечении как о величине, монотонно зависящей от энергии испущенного кванта. Зависимость полного сечения тормозного излучения от энергии фотона становится немонотонной функцией, обладающей характерными резонансными особенностями. Немонотонность полного сечения тормозного излучения при учете поляризационного механизма возни-

кает даже в случае одноэлектронной системы (атом водорода или водородоподобный ион), когда отсутствуют многочастичные эффекты.

В работе используется атомная система единиц ($|e| = \hbar = m_e = 1$).

2. ПОЛНАЯ АМПЛИТУДА И СЕЧЕНИЕ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Полная амплитуда тормозного излучения f_{tot} представляет собой сумму амплитуд обычного f_{ord} и поляризационного f_{pol} тормозного излучения:

$$f_{tot} = f_{ord} + f_{pol}. \quad (1)$$

В низшем порядке нерелятивистской теории возмущений по электрон-фотонному взаимодействию, а также по кулоновскому взаимодействию $V = 1/|r - r_a|$ между налетающим r и атомными r_a электронами, приводящему к виртуальному возбуждению атома, амплитуды f_{ord} и f_{pol} имеют вид

$$f_{ord} = \langle p_2^{(-)} | e\mathbf{r} | p_1^{(+)} \rangle, \quad (2)$$

$$f_{pol} = - \sum_n \left\{ \frac{\langle 0 | e\mathbf{D} | n \rangle \langle p_2^{(-)}, n | V | p_1^{(+)}, 0 \rangle}{\omega_{n0} - \omega - i0} + \frac{\langle p_2^{(-)}, 0 | V | p_1^{(+)}, n \rangle \langle n | e\mathbf{D} | 0 \rangle}{\omega_{n0} + \omega} \right\}. \quad (3)$$

Здесь $|p_1^{(+)}\rangle$ и $|p_2^{(-)}\rangle$ — волновые функции налетающего и рассеянного электрона с импульсами p_1 и p_2 соответственно. Индексы плюс и минус обозначают решения уравнения Шредингера, на бесконечности имеющие в качестве асимптотик расходящиеся (плюс) и сходящиеся (минус) сферические волны. Разложение волновой функции налетающей частицы в начальном ($j = 1$) и конечном ($j = 2$) состояниях по парциальным волнам имеет вид

$$|p_j^{(\pm)}\rangle = 4\pi \sqrt{\frac{\pi}{p_j}} \sum_{l,m} i^l \exp[\pm i\delta_l(p_j)] \frac{P_{\nu_l}(r)}{r} Y_{lm}^*(\hat{p}_j) Y_{lm}(\hat{r}). \quad (4)$$

Здесь $\hat{a} \equiv \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$, где \mathbf{a} — любое из p_j и r , $\delta_l(p)$ — фазовый сдвиг, а символ ν обозначает набор квантовых чисел (p, l) . Радиальная волновая функция $P_\nu(r)$ удовлетворяет уравнению Шредингера с «замороженным» атомным остовом и имеет нормировку на энергию в ридбергах.

Оператор $e\mathbf{D}$ в (3) является оператором дипольного взаимодействия атома с электромагнитным полем, ω и \mathbf{e} — энергия и вектор поляризации фотона, $\omega_{n0} = E_n - E_0$ — энергия атомного перехода из начального состояния $|0\rangle$ в возбужденное состояние $|n\rangle$ дискретного или непрерывного спектра.

Амплитуда (3) не учитывает обмена между налетающим и атомными электронами. В настоящей работе предполагается, что энергия налетающего электрона до и после процесса излучения достаточно велика по сравнению с потенциалами ионизации тех атомных оболочек, которые для данной частоты фотона ω дают основной вклад в сумму по возбужденным состояниям.

Следуя [18], выразим амплитуду (3) для сферически-симметричного атома через дипольную обобщенную динамическую поляризуемость $\alpha(\omega, Q)$. Для этого используем представление оператора кулоновского взаимодействия V в виде интеграла Фурье:

$$V \equiv \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{d\mathbf{Q}}{Q^2} \exp\{-i\mathbf{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)\}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (3), получаем

$$f_{pol} = -\frac{i}{2\pi^2} \int d\mathbf{Q} \frac{\mathbf{eQ}}{Q^2} \langle \mathbf{p}_2^{(-)} | e^{-i\mathbf{Qr}} | \mathbf{p}_1^{(+)} \rangle \alpha(\omega, Q), \quad (6)$$

где

$$i(\mathbf{eQ}) \alpha(\omega, Q) = \sum_n \left\{ \frac{\langle 0 | \mathbf{eD} | n \rangle \langle n | e^{i\mathbf{Qr}_a} | 0 \rangle}{\omega_{n0} - \omega - i0} + \frac{\langle 0 | e^{i\mathbf{Qr}_a} | n \rangle \langle n | \mathbf{eD} | 0 \rangle}{\omega_{n0} + \omega} \right\}. \quad (7)$$

Интегрирование в (6) ведется по всему пространству векторов \mathbf{Q} . При $Q = 0$ обобщенная динамическая поляризуемость $\alpha(\omega, Q)$ переходит в обычную динамическую поляризуемость $\alpha(\omega)$.

Представление f_{pol} в виде (6) позволяет легко перейти к борновскому пределу для амплитуды поляризационного тормозного излучения. В самом деле, подставляя в (6) вместо искаженных волн $|\mathbf{p}_{1,2}^{(\pm)}\rangle$ волновые функции свободной частицы $|\tilde{\mathbf{p}}_{1,2}^{(\pm)}\rangle = \exp(i\mathbf{p}_{1,2}\mathbf{r})$ и принимая во внимание соотношение

$$\langle \tilde{\mathbf{p}}_2^{(-)} | \exp(-i\mathbf{Qr}) | \tilde{\mathbf{p}}_1^{(+)} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} - \mathbf{Q}),$$

получаем выражение для f_{pol} в рамках борновского приближения:

$$f_{pol}^B = -4\pi i \frac{\mathbf{e}\mathbf{q}}{q^2} \alpha(\omega, q), \quad (8)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$ — импульс, переданный атому в процессе столкновения.

Формула (8) для амплитуды поляризационного тормозного излучения в борновском приближении и соответствующее ему выражение для сечения тормозного излучения впервые были получены в [10].

Подставляя (4) в (2) и (6), получаем выражения для f_{ord} и f_{pol} в виде суммы парциальных вкладов. Структура обоих рядов одинакова и дается следующим выражением:

$$f = \frac{16\pi^3}{\sqrt{p_1 p_2}} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sum_{l_1, l_2} i^{l_1 - l_2} \exp[i(\delta_{l_1}(p_1) + \delta_{l_2}(p_2))] (-1)^{l_>} \sqrt{l_>} T_{l_2 l_1}(\hat{\mathbf{e}}, \hat{\mathbf{p}}_1, \hat{\mathbf{p}}_2) R_{l_2 l_1}. \quad (9)$$

Здесь $l_2 = l_1 \pm 1$ в соответствии с дипольными правилами отбора, а $l_> = \max\{l_1, l_2\}$. Множитель $T_{l_2 l_1}(\hat{\mathbf{e}}, \hat{\mathbf{p}}_1, \hat{\mathbf{p}}_2)$, зависящий от угловых переменных векторов \mathbf{e} , \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 , равен

$$T_{l_2 l_1}(\hat{\mathbf{e}}, \hat{\mathbf{p}}_1, \hat{\mathbf{p}}_2) = \sum_{m_1, m_2, \mu} (-1)^{m_2} \begin{pmatrix} l_2 & 1 & l_1 \\ -m_2 & \mu & m_1 \end{pmatrix} Y_{1\mu}^*(\hat{\mathbf{e}}) Y_{l_1 m_1}^*(\hat{\mathbf{p}}_1) Y_{l_2 m_2}(\hat{\mathbf{p}}_2). \quad (10)$$

В (9) функция

$$R_{l_2 l_1} = \begin{cases} +R_{l_2 l_1}^{ord} & \text{для обычного тормозного излучения,} \\ -R_{l_2 l_1}^{pol} & \text{для поляризационного тормозного излучения,} \end{cases}$$

выражается через следующие интегралы:

$$R_{l_2 l_1}^{ord} = \langle \nu_2 || r || \nu_1 \rangle, \tag{11}$$

$$R_{l_2 l_1}^{pol} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dQ Q \langle \nu_2 || j_1(Qr) || \nu_1 \rangle \alpha(\omega, Q), \tag{12}$$

где $j_1(Qr)$ — сферическая функция Бесселя.

Дифференциальное сечение полного тормозного излучения, характеризующее спектральное распределение излучения, записывается следующим образом:

$$\omega \left(\frac{d\sigma}{d\omega} \right) = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\omega^4}{c^3} \frac{p_2}{p_1} \int d\Omega_{p_2} d\Omega_\gamma \sum_\lambda |f_{tot}|^2. \tag{13}$$

Здесь c — скорость света. В выражении (13) проводится интегрирование по направлениям вылета рассеянного электрона ($d\Omega_{p_2}$) и испущенного кванта ($d\Omega_\gamma$), а также суммирование по поляризациям фотона (λ).

Подставляя (9)–(12) в (13), получаем выражение для полного сечения тормозного излучения:

$$\omega \left(\frac{d\sigma}{d\omega} \right) = \frac{32\pi^2}{3} \frac{\omega^4}{c^3 p_1^2} \sum_{l_1, l_2} l > |R_{l_2 l_1}^{ord} - R_{l_2 l_1}^{pol}|^2. \tag{14}$$

Поскольку тормозное излучение формируется за счет проявления двух различных механизмов, полное сечение (13) естественно представить в виде суммы сечений обычного и поляризационного тормозного излучения, а также их интерференции:

$$\omega \left(\frac{d\sigma}{d\omega} \right) = \omega \left(\frac{d\sigma}{d\omega} \right)_{ord} + \omega \left(\frac{d\sigma}{d\omega} \right)_{pol} + \omega \left(\frac{d\sigma}{d\omega} \right)_{int}. \tag{15}$$

Выражение для сечения обычного тормозного излучения $\omega \left(\frac{d\sigma}{d\omega} \right)_{ord}$ может быть получено из формулы (14), если положить $R_{l_2 l_1}^{pol} = 0$. Положив в (14) $R_{l_2 l_1}^{ord} = 0$, получаем сечение поляризационного тормозного излучения $\omega \left(\frac{d\sigma}{d\omega} \right)_{pol}$.

Расчет обобщенной динамической дипольной поляризуемости атома водорода в возбужденном состоянии методом кулоновской функции Грина

Приведенные выше формулы (9)–(13) показывают, что поведение полного сечения тормозного излучения определяется обобщенной динамической поляризуемостью атома-мишени. Обобщенная поляризуемость описывает динамический отклик мишени на внешнее поле налетающей частицы. Для многоэлектронных атомов, как правило, такой отклик определяется многоэлектронными корреляционными эффектами, для учета которых необходимо использовать методы многочастичной теории возмущений [26]. Поэтому в общем случае вычисление обобщенной поляризуемости является сложной задачей, требующей трудоемкого численного расчета (см. [18, 5]). Однако для водородоподобных систем решение этой задачи может быть получено аналитически.

В настоящей работе для расчета обобщенной динамической поляризуемости атома водорода мы использовали метод кулоновской функции Грина в координатном представлении. Для вычисления $\alpha(\omega, q)$ могут быть применены и другие методы, например

метод Штернхаймера [27]. Использование кулоновских единиц позволяет распространить полученные результаты на случай водородоподобных ионов.

Предлагаемый способ вычисления обобщенной динамической поляризуемости водорода позволяет получить замкнутые аналитические выражения для обобщенной поляризуемости состояния с любым главным квантовым числом. Идея метода состоит в представлении радиальных волновых функций атома водорода R_{nl} через дифференцирование производящей функции полиномов Лагерра [28]:

$$R_{nl}(r) = \frac{2^{l+1}}{n^{l+2}\sqrt{\Gamma(n-l)\Gamma(n+l+1)}} \frac{d^{n-l-1}}{dt^{n-l-1}} \left[\frac{r^l e^{-\lambda r}}{(1-t)^{2l+2}} \right] \Bigg|_{t=0}, \quad (16)$$

где $\lambda = (1/n)(1+t)/(1-t)$.

Такое представление волновых функций удобно для вычисления матричных элементов, а следовательно, и поляризуемости (7), поскольку операция дифференцирования проводится после вычисления радиального интеграла в матричных элементах, что существенно упрощает весь расчет. Фактически необходимо вычислить матричные элементы, в которые вместо радиальных волновых функций атома водорода входит произведение $r^l e^{-\lambda r}$. Окончательный результат для различных состояний получается затем дифференцированием различной кратности полученного выражения. Этот метод особенно удобен, если дифференцирование по параметру реализуется программным способом (в наших расчетах был использован пакет Mathematica 2.2 фирмы Wolfram Research).

Покажем, что сумму матричных элементов, образующих поляризуемость, можно выразить через набор гипергеометрических функций. Используя дисперсионное представление функции Грина, запишем поляризуемость в виде суммы двух слагаемых:

$$\alpha(\omega, q) = X(E_0 + \omega, q) + X(E_0 - \omega, q), \quad (17)$$

где

$$X(E, q) = -\frac{i}{q} \langle 0 | \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}_1) G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; E) \mathbf{r}_2 \hat{\mathbf{q}} | 0 \rangle.$$

Здесь используется обозначение $\hat{\mathbf{a}} \equiv \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$, где \mathbf{a} — произвольный вектор. Применим далее разложение функции Грина по сферическим волнам:

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; E) = \sum_{l m} G_l(r_1, r_2; E) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}_1) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}_2), \quad (18)$$

где для функции Грина радиального уравнения Шредингера мы используем представление [29]

$$G_l(r_1, r_2; E) = \frac{2i}{\sqrt{r_1 r_2}} (-1)^{l+1} \int_1^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \times \\ \times \left(\frac{\xi + 1}{\xi - 1} \right)^{i\nu} J_{2l+1}(2k\sqrt{r_1 r_2} \sqrt{\xi^2 - 1}) \exp[ik\xi(r_1 + r_2)], \quad (19)$$

$$k = \sqrt{2E}, \quad \nu = 1/k.$$

Формально это представление справедливо при $E > 0$. Однако оно может быть аналитически продолжено в область $E < 0$. Мы проводим аналитическое продолжение в окончательных выражениях, выразив $X(E, q)$ через гипергеометрические функции.

Рассмотрим подробнее случай $l = 0$, что соответствует выбору s -состояний атома водорода в начальном и конечном состояниях процесса. Тогда матричный элемент $X(E, q)$ после интегрирования по угловым переменным можно записать в следующем виде:

$$X(E, q) = \frac{4}{n^5 \Gamma^2(n)} \widehat{D}_1 \widehat{D}_2 M, \tag{20}$$

здесь операторы дифференцирования определены согласно соотношению

$$\widehat{D}_m f(t_m) = \frac{d^{n-1}}{dt_m^{n-1}} \left[\frac{f(t_m)}{(1-t_m)^2} \right] \Big|_{t_m=0}, \quad m = 1, 2, \tag{21}$$

а радиальный интеграл после интегрирования по r_1 и r_2 и замены переменной может быть представлен в виде

$$M = 2^9 i k^3 \int_0^1 d\tau (1-\tau) \tau^{1-i\nu} \frac{by - ax\tau}{[(by - ax\tau)^2 + q^2(y - x\tau)^2]^3} - 2^9 i k^5 \int_0^1 d\tau \tau^{2-i\nu} \frac{5(by - ax\tau)^2 - q^2(y - x\tau)^2}{[(by - ax\tau)^2 + q^2(y - x\tau)^2]^4}, \tag{22}$$

где $a = \lambda_1 + ik$, $b = \lambda_1 - ik$, $x = \lambda_2 + ik$, $y = \lambda_2 - ik$, $\lambda_{1,2} = (1/n)(1 + t_{1,2})/(1 - t_{1,2})$.

Окончательное выражение для интеграла (22) может быть представлено в виде суммы гипергеометрических функций путем разложения подынтегральных выражений на простейшие дроби. Однако результат довольно громоздок, и поэтому его явный вид приведен в Приложении.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА СЕЧЕНИЯ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА АТОМЕ ВОДОРОДА

На рис. 1 представлены результаты расчета сечения тормозного излучения, формирующегося при рассеянии электронов (рис. 1а) и позитронов (рис. 1б) с энергией 220 эВ на атоме водорода. Расчеты выполнены в рамках борновского приближения. Сплошные кривые 1, 2 и 3 представляют спектральную зависимость полного, а штриховые кривые 1', 2', 3' — обычного сечения тормозного излучения на атоме водорода, находящегося в 1s-, 2s- и 3s-состояниях соответственно. Вертикальными линиями на рисунке отмечены значения потенциалов ионизации атомных оболочек.

Из рис. 1а, б видно, что поляризационный механизм играет важную роль в формировании полного спектра тормозного излучения атома водорода, находящегося как в основном, так и в возбужденных состояниях. Для частот фотона вблизи потенциала ионизации атома водорода полное сечение тормозного излучения по величине заметно превышает сечение обычного тормозного излучения. С увеличением частоты фотона полное сечение тормозного излучения монотонно убывает, причем по абсолютной

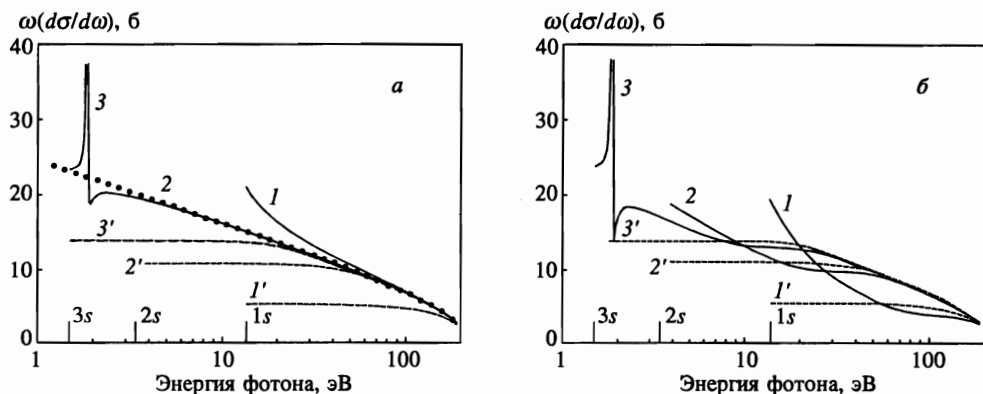


Рис. 1. Спектральные зависимости сечения тормозного излучения (борновское приближение) электронов (а) и позитронов (б) энергии 220 эВ на атоме водорода. Сплошные кривые 1, 2, 3 — полное сечение тормозного излучения на атоме водорода в $1s$ -, $2s$ - и $3s$ -состояниях соответственно. Штриховые кривые $1'$, $2'$, $3'$ — сечение обычного тормозного излучения на атоме водорода в $1s$ -, $2s$ - и $3s$ -состояниях соответственно. Точки — сечение тормозного излучения электрона на точечном кулоновском потенциале (см. объяснение в тексте)

величине для электрона полное сечение остается больше, а для позитрона становится меньше сечения обычного тормозного излучения. Такое поведение полного сечения (15) в основном связано с конструктивным (для электрона) и деструктивным (для позитрона) вкладом интерференции амплитуд обычного и поляризационного тормозного излучения $\omega(d\sigma/d\omega)_{int}$. Подобный эффект был описан ранее. Как было показано в работах [12, 30], полный спектр тормозного излучения в области частот фотонов $\omega \gg I_{1s}$ эффективно формируется за счет торможения налетающего электрона в кулоновском потенциале голого атомного ядра (эффект «деэкранировки»).

На рис. 1а точками представлен спектр тормозного излучения электрона, рассеивающегося в кулоновском потенциале с зарядом $Z = 1$. Как видно на рисунке, для энергий фотонов выше соответствующих потенциалов ионизации результаты расчетов полного сечения тормозного излучения практически совпадают с кулоновскими.

Сравнение спектральных зависимостей сечения тормозного излучения, формирующегося при рассеянии электронов и позитронов на атоме водорода, показывает, что для одной и той же скорости столкновения вклад поляризационного механизма излучения в полное сечение процесса убывает с ростом главного квантового числа. Этот эффект связан с возрастанием радиуса орбиты и, следовательно, с уменьшением экранировки ядра при увеличении главного квантового числа. Действительно, при формировании тормозного излучения по обычному механизму важны малые прицельные параметры $r < R_{at}$, когда налетающая частица движется вблизи ядра атома-мишени. Поэтому увеличение радиуса атома-мишени приводит к возрастанию величины сечения обычного тормозного излучения. Наоборот, поляризационное тормозное излучение наиболее эффективно формируется при больших прицельных параметрах столкновения [14, 31], когда налетающая частица сильнее поляризует атом-мишень.

Следует отметить, что в спектральной зависимости полного сечения тормозного излучения электрона и позитрона на атоме водорода, находящемся в $3s$ -состоянии, наблюдается узкий максимум, расположенный выше потенциала ионизации $3s$ -оболочки.

Наличие этого максимума связано с полюсной особенностью поляризуемости в интервале частот фотона, соответствующем переходу $3s \rightarrow 2p$.

Рассмотрим более подробно особенности, возникающие в обобщенной динамической поляризуемости возбужденных состояний атома водорода. Для этого проанализируем формулу (7), называя для краткости первое слагаемое в фигурных скобках слагаемым A , а второе — слагаемым B .

Для промежуточных состояний $|n\rangle$, находящихся в дискретном спектре, имеем $E_n < 0$. Если энергия E_n больше энергии начального и конечного состояний E_0 , т. е. $\omega_{n0} > 0$, то слагаемое B с ростом частоты ω ведет себя монотонно, тогда как слагаемое A возрастает резонансным образом вблизи полюсов $\omega \rightarrow \omega_{n0}$. Полюсам поляризуемости соответствует реальный процесс, в котором атом водорода, взаимодействуя с налетающей частицей, возбуждается в состояние $|n\rangle$ и затем возвращается в начальное состояние $|0\rangle$ с испусканием фотона. Расходимость поляризуемости устраняется введением в энергетический знаменатель мнимой добавки $i\Gamma$, где Γ — ширина уровня. В настоящей работе мы будем рассматривать лишь такие частоты ω , для которых выполняется условие $\omega - \omega_{n0} \gg \Gamma$. Вследствие малости радиационной ширины Γ это условие выполняется вплоть до частот очень близких к полюсам поляризуемости.

Если начальное состояние атома водорода $|0\rangle$ не является основным, то для некоторых промежуточных состояний $|n\rangle$ верно неравенство $0 > E_0 > E_n$, т. е. $\omega_{n0} < 0$. При выполнении этого условия слагаемое A ведет себя монотонно с ростом частоты ω . Напротив, слагаемое B резонансно возрастает при $\omega \rightarrow -\omega_{n0}$. Этой расходимости также соответствует реальный процесс, в котором атом водорода, находившийся первоначально в возбужденном состоянии $|0\rangle$, девозбуждается с излучением фотона, а затем при взаимодействии с налетающей частицей возвращается в исходное возбужденное состояние. При этом для возбужденного состояния атома водорода выполняется условие $I \equiv -E_0 < -\omega_{n0}$, т. е. полюсы поляризуемости $\omega = -\omega_{n0}$ оказываются выше порога ионизации I данного возбужденного состояния $|0\rangle$.

Таким образом, в частотной зависимости поляризуемости существуют полюсы, соответствующие реальным процессам возбуждения и девозбуждения атома в промежуточном состоянии. Причем полюсы, соответствующие процессам девозбуждения, лежат выше потенциала ионизации соответствующих возбужденных состояний. Следовательно, в спектре поляризационного тормозного излучения, генерируемого при столкновении с возбужденным атомом водорода, должны наблюдаться узкие линии не только ниже, но и выше потенциала ионизации рассматриваемого возбужденного состояния. Исключение составляет только $2s$ -состояние, так как дипольные переходы с девозбуждением для этого состояния запрещены правилами отбора.

На рис. 2 представлена спектральная зависимость динамической поляризуемости $\alpha(\omega)$ атома водорода, находящегося в $3s$ -состоянии вблизи частоты, соответствующей переходу $3s \rightarrow 2p$. Видно, что действительная часть поляризуемости имеет явно выраженный полюсный характер. Мнимая же часть описывается только слагаемым A и монотонно убывает с увеличением частоты ω . Так, наличие полюса у обобщенной поляризуемости выше потенциала ионизации $3s$ -оболочки приводит к возникновению узкой линии в спектре тормозного излучения (см. рис. 1).

Следует отметить, что интерференционное слагаемое полного сечения процесса пропорционально действительной части поляризуемости, которая меняет знак при прохождении полюса. Изменение знака интерференции обычного и поляризационного механизмов излучения проявляется в том, что ниже полюса поляризуемости сечение тор-

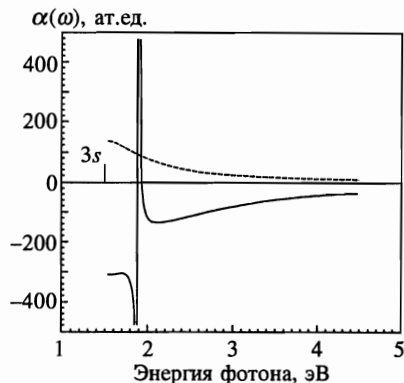


Рис. 2. Действительная (сплошная кривая) и мнимая (штриховая кривая) части дипольной динамической поляризуемости $\alpha(\omega)$ атома водорода в $3s$ -состоянии вблизи полюса поляризуемости $\omega = E_{3s} - E_{2p} = 1.89$ эВ

мозного излучения позитрона больше, чем электрона, а выше полюса, наоборот, сечение тормозного излучения электрона больше, чем позитрона.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ СЕЧЕНИЯ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА АТОМЕ КРИПТОНА

Результаты расчета сечений полного (сплошные кривые 1) и обычного (сплошные кривые 2) тормозного излучения, формирующегося при рассеянии электронов с энергиями 1, 5 и 10 кэВ на атоме Кг, представлены на рис. 3–5. Расчеты выполнены в рамках приближения DPWA согласно выражению (14). Вертикальными линиями на рисунках отмечены значения хартри-фоковских потенциалов ионизации атомных подоболочек.

Расчеты показывают, что механизм поляризационного тормозного излучения играет важную роль в формировании полного спектра. Вместо гладкой кривой, характерной для спектрального распределения обычного тормозного излучения, сечение полного тормозного излучения проявляет сложную зависимость от частоты фотона, которая характеризуется широкими и интенсивными максимумами, а также достаточно узкими «провалами» вблизи потенциалов ионизации. Такой вид спектральной зависимости полного сечения тормозного излучения определяется вкладом как поляризационной составляющей сечения $(\omega d\sigma/d\omega)_{pol}$, так и интерференционным членом $(\omega d\sigma/d\omega)_{int}$.

В области частот фотонов $\omega = 10\text{--}100$ эВ в полном спектре тормозного излучения Кг наблюдается максимум, обусловленный вкладом в амплитуду f_{pol} виртуальных дипольных возбуждений электронов из наружных $4s$ - и $4p$ -подоболочек. Такие возбуждения имеют коллективную природу [26] и характеризуются сильным межоболочечным корреляционным взаимодействием электронов из ns - и np -подоболочек [34]. В работе [34] был выполнен численный расчет сечения фотопоглощения наружных ns -подоболочек атомов благородных газов в рамках метода приближения случайных фаз с обменом (RPAE) и продемонстрировано сильное влияние многоэлектронных корреляционных эффектов на сечение фотопоглощения. Выражение для полного сечения тормозного излучения (13) содержит единственную характеристику, $\alpha(\omega, q)$, определяющую динамический отклик мишени на внешнее поле налетающей частицы. Атомная поляризуемость тесно связана с сечением фотопоглощения, поэтому для расчетов $\alpha(\omega, q)$ атома Кг в настоящей работе используется метод RPAE с учетом дипольных пе-

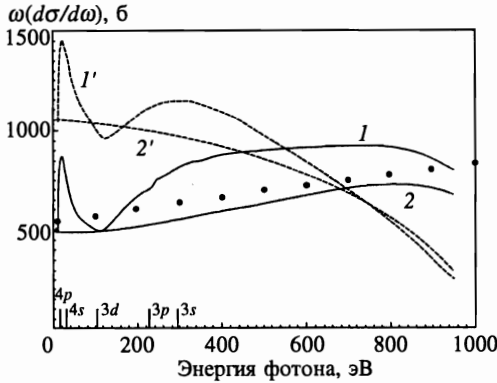


Рис. 3

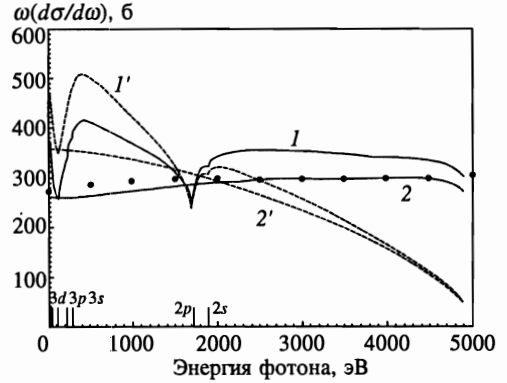


Рис. 4

Рис. 3. Сечения тормозного излучения электронов энергии 1 кэВ на атоме Кг: кривая 1 — полное сечение (DPWA), кривая 2 — сечение обычного тормозного излучения (DPWA), кривая 1' — полное сечение (борновское приближение), кривая 2' — сечение обычного тормозного излучения (борновское приближение), точки — сечение обычного тормозного излучения [32, 33]

Рис. 4. Сечения тормозного излучения электронов энергии 5 кэВ на атоме Кг: кривая 1 — полное сечение (DPWA), кривая 2 — сечение обычного тормозного излучения (DPWA), кривая 1' — полное сечение (борновское приближение), кривая 2' — сечение обычного тормозного излучения (борновское приближение), точки — сечение обычного тормозного излучения [32, 33]

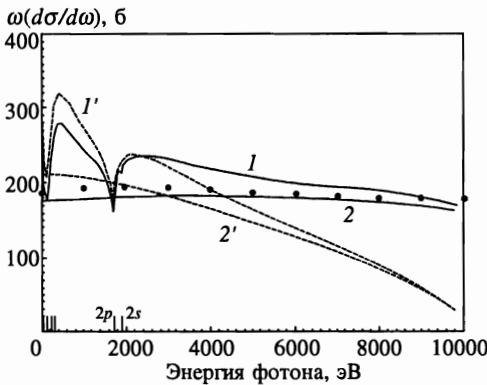


Рис. 5. Сечения тормозного излучения электронов энергии 10 кэВ на атоме Кг: кривая 1 — полное сечение (DPWA), кривая 2 — сечение обычного тормозного излучения (DPWA), кривая 1' — полное сечение (борновское приближение), кривая 2' — сечение обычного тормозного излучения (борновское приближение), точки — сечение обычного тормозного излучения [32, 33]

реходов из *всех* атомных подболочек.

Для частот фотона в диапазоне $\omega = 100\text{--}1000$ эВ в полном спектре тормозного излучения проявляется второй максимум, который связан с дипольными возбуждениями в непрерывный спектр электронов промежуточных $3s$ -, $3p$ - и $3d$ -подболочек атома Кг. Вблизи потенциалов ионизации этих подболочек многоэлектронные корреляционные эффекты оказывают заметное влияние на величину поляризуемости $\alpha(\omega, q)$. Учет этих эффектов проводился в рамках метода RPAE.

Для частот фотона, превышающих 2000 эВ, полное сечение тормозного излучения монотонно зависит от ω . Исключения составляют области вблизи потенциалов ионизации внутренних $1s$ -, $2s$ - и $2p$ -подоболочек Кг. Подобное поведение спектральной зависимости тормозного излучения проанализировано ниже.

Штриховыми кривыми 1 и 2 на рис. 3–5 представлены зависимости, полученные в рамках первого борновского приближения. Как видно из рисунков, борновское приближение плохо описывает полный спектр тормозного излучения, для всех ω за исключением низкочастотной области, $\omega/\varepsilon_1 \leq 0.2$ (см. также [35]).

Различие полных сечений тормозного излучения, полученных в рамках борновского приближения и в DPWA, которое особенно хорошо заметно на рис. 3, в основном связано с различием величин сечений обычного тормозного излучения (кривые 2). Как уже отмечалось ранее, обычное тормозное излучение формируется в основном на малых расстояниях $r \leq R_{at}$, где искажающее воздействие атомного потенциала приводит к существенному отклонению волновой функции налетающего электрона от плоской волны. В то же время поляризационное тормозное излучение формируется на расстояниях много больше атомных [14, 31] и поэтому менее чувствительно к приближению, описывающему движение налетающего электрона.

Точками на рис. 3–5 представлены результаты расчета сечения обычного тормозного излучения, выполненного в рамках релятивистского приближения DPWA [32, 33]. Различие в 5–10% между этими данными и кривыми 2 может быть связано как с пренебрежением релятивистскими эффектами и отсутствием учета высших мультипольных моментов фотона в наших расчетах, так и с точностью расчетов в [32, 33], которая оценивается в этих работах на уровне 10%.

Для более детального изучения основных тенденций поведения полного сечения тормозного излучения рассмотрим процесс рассеяния электронов с энергиями 25 кэВ на атоме Кг. Кривая 1 на рис. 6 представляет полное сечение тормозного излучения, а кривая 2 соответствует сечению обычного тормозного излучения.

В области частот фотона $\omega = 10$ –1000 эВ полное сечение тормозного излучения характеризуется двумя максимумами. В рассматриваемом спектральном диапазоне полное сечение тормозного излучения (см. (15)) определяется суммой вкладов сечений обычного и поляризационного (кривая 3) тормозного излучения, в то время как вклад интерференционного члена $\omega(d\sigma/d\omega)_{int}$ (кривая 4) мал.

Вблизи потенциалов ионизации внутренних подоболочек $1s$, $2s$ и $2p$ в спектральном распределении полного сечения тормозного излучения Кг наблюдаются узкие и глубокие провалы. Величина полного сечения в минимуме каспа меньше, чем сечение обычного тормозного излучения. Аналогичные особенности проявляются в спектральных зависимостях полного сечения тормозного излучения атомов Ne и Ar в окрестности потенциалов ионизации $1s$ -подоболочки [9].

Подобные особенности в спектральной зависимости полного сечения тормозного излучения связаны с поведением действительной части обобщенной атомной динамической поляризуемости вблизи потенциалов ионизации внутренних атомных подоболочек.

Амплитуда поляризационного тормозного излучения (6) выражается через обобщенную атомную поляризуемость. Поведение $\alpha(\omega, Q)$ как функции ω оказывается похожим при любых Q . Поэтому качественно зависимость от ω поляризационного и интерференционного слагаемых в (15) может быть оценена как

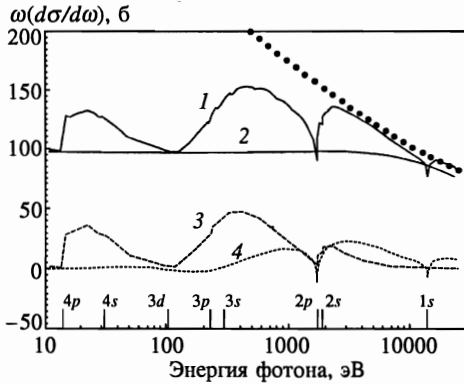


Рис. 6

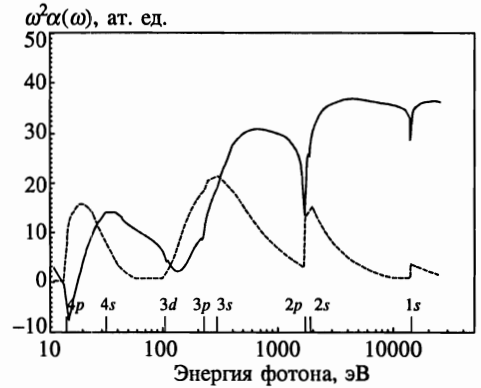


Рис. 7

Рис. 6. Сечения полного (кривая 1), обычного — (кривая 2), поляризационного — (кривая 3) тормозного излучения электронов энергии 25 кэВ на атоме Кг. Кривая 4 — интерференционная составляющая полного сечения. Точки — сечение тормозного излучения электрона на точечном кулоновском потенциале (см. объяснение в тексте)

Рис. 7. Действительная (сплошная кривая) и мнимая (штриховая кривая) части дипольной динамической поляризуемости $\omega^2\alpha(\omega)$ атома Кг в приближении РРАЕ

$$\omega \left(\frac{d\sigma}{d\omega} \right)_{pol} \sim \omega^4 [(\text{Re } \alpha(\omega))^2 + (\text{Im } \alpha(\omega))^2] g_1(\omega),$$

$$\omega \left(\frac{d\sigma}{d\omega} \right)_{int} \sim -\omega^2 \text{Re } \alpha(\omega) \cdot g_2(\omega).$$

Здесь $g_1(\omega)$ и $g_2(\omega)$ — гладкие, монотонно убывающие функции ω . Данная оценка показывает, что интерференционный член в зависимости от знака $\text{Re } \alpha(\omega)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

На рис. 7 представлена частотная зависимость дипольной динамической поляризуемости в спектральной области $\omega = 10$ эВ–25 кэВ. Сплошная кривая представляет зависимость $-\omega^2 \text{Re } \alpha(\omega)$, а штриховая кривая соответствует $\omega^2 \text{Im } \alpha(\omega)$. В настоящей работе атомная динамическая поляризуемость $\alpha(\omega)$ вычислена в рамках приближения РРАЕ с учетом дипольных переходов из всех атомных подоболочек.

Мнимая часть атомной поляризуемости Кг имеет скачки вблизи 1s-, 2s- и 2p-потенциалов ионизации внутренних подоболочек (см. рис. 7). Эти скачки приводят к появлению «провалов» в $\text{Re } \alpha(\omega)$, которые в свою очередь приводят к возникновению глубоких и узких минимумов в полном сечении тормозного излучения. Появление минимумов определяется отрицательным знаком интерференционной части сечения $\omega(d\sigma/d\omega)_{int}$ в рассматриваемой области частот.

Природу возникновения подобных особенностей в полном спектре тормозного излучения можно понять исходя из следующих рассуждений. Мнимая часть дипольной поляризуемости связана с сечением фотопоглощения следующим образом: $\sigma_{\gamma}(\omega) = 4\pi\omega \text{Im } \alpha(\omega)/c$. Обычно сечение фотопоглощения внутренних атомных подоболочек

имеет водородоподобный характер. Это означает, что при частоте фотона $\omega = I_{inner}$ сечение $\sigma_\gamma(\omega)$ имеет скачок (см., например, таблицы, представленные в [36]). Поскольку действительная и мнимая части динамической поляризуемости связаны между собой дисперсионным соотношением, скачок в $\sigma_\gamma(\omega)$ приводит к появлению кэспа в зависимости $\text{Re } \alpha(\omega)$. Эти скачки и «провалы» проявляют себя в виде особенностей в спектральной зависимости полного сечения тормозного излучения в области частот $\omega \approx I_{inner}$. Вид особенностей в $\omega(d\sigma/d\omega)_{tot}$ зависит от соотношений между величинами $\text{Re } \alpha(\omega)$ и $\text{Im } \alpha(\omega)$, между $\omega(d\sigma/d\omega)_{int}$ и $\omega(d\sigma/d\omega)_{pol}$ и от знака $\omega(d\sigma/d\omega)_{int}$. В общем случае в полном спектре тормозного излучения могут наблюдаться как провалы, так и максимумы.

В заключение рассмотрим процесс тормозного излучения фотонов с энергиями, превышающими потенциал ионизации $1s$ -подоболочки. На рис. 6 видно, что для $\omega > I_{1s}$ полное сечение тормозного излучения уменьшается с увеличением энергии фотона, но превышает величину сечения обычного тормозного излучения. Такое поведение полного сечения тормозного излучения (15) в основном связано с эффектом «деэкранировки» [12, 30], приводящим к тому, что полный спектр тормозного излучения электрона в области частот фотонов $\omega \gg I_{1s}$ эффективно формируется за счет торможения налетающего электрона в кулоновском потенциале голого атомного ядра, тогда как вклад поляризационной части сечения пренебрежимо мал (см. рис. 6).

На рис. 6 точками представлен спектр тормозного излучения электрона, рассеивающегося в кулоновском потенциале с зарядом $Z = 36$. Как видно из рисунка, для энергий фотонов $\omega > I_{1s}$ результаты расчетов полного сечения тормозного излучения (кривая 1) практически совпадают с результатами расчета сечения тормозного излучения на кулоновском потенциале.

Данная работа стала возможной благодаря финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-02-17922-а) и Международного научно-технического центра (проект 076-95).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Ниже приводится явный вид выражения для вычисления обобщенной динамической поляризуемости атома водорода, находящегося в состоянии с главным квантовым числом, равным n , и нулевым орбитальным моментом $l = 0$.

Поляризуемость выражена через сумму двух слагаемых, содержащих дифференцирование гипергеометрических функций ${}_2F_1$. Отметим, что итоговое выражение может быть преобразовано к более компактному виду за счет уменьшения количества гипергеометрических функций. Однако данное представление, на наш взгляд, более удобно с точки зрения проведения численных расчетов:

$$\alpha_{ns}(\omega, q) = X(E_n + \omega, q) + X(E_n - \omega, q), \quad (\text{П.1})$$

где

$$X(E, q) = \frac{2^6}{n^5 \Gamma^2(n)} \hat{D}_1 \hat{D}_2 M. \quad (\text{П.2})$$

Дифференциальные операторы \hat{D} определяются согласно (21), а величина M имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 M = & -3 \frac{\chi^2 \alpha}{y^5 \gamma q^3 k (2 - i\nu) (3 - i\nu)} {}_2F_1(1, 2 - i\nu, 4 - i\nu, z_1) + \\
 & + 3 \frac{\chi \alpha^2}{y^5 \beta q^3 k (2 - i\nu) (3 - i\nu)} {}_2F_1(1, 2 - i\nu, 4 - i\nu, z_2) + \\
 & + 6i \frac{\chi^2 \alpha}{y^6 \gamma q^3 (3 - i\nu)} {}_2F_1(1, 3 - i\nu, 4 - i\nu, z_1) - \\
 & - 6i \frac{\chi \alpha^2}{y^6 \beta q^3 (3 - i\nu)} {}_2F_1(1, 3 - i\nu, 4 - i\nu, z_2) + \\
 & + 2i \frac{\chi^2 (\alpha + 2iq)}{y^5 \gamma^2 q^3 (2 - i\nu) (3 - i\nu)} {}_2F_1(2, 2 - i\nu, 4 - i\nu, z_1) - \\
 & - 2i \frac{\alpha^2 (\chi - 2iq)}{y^5 \beta^2 q^3 (2 - i\nu) (3 - i\nu)} {}_2F_1(2, 2 - i\nu, 4 - i\nu, z_2) + \\
 & + 6 \frac{\chi^2 k (\alpha + iq)}{y^6 \gamma^2 q^3 (3 - i\nu)} {}_2F_1(2, 3 - i\nu, 4 - i\nu, z_1) - \\
 & - 6 \frac{\alpha^2 k (\chi - iq)}{y^6 \beta^2 q^3 (3 - i\nu)} {}_2F_1(2, 3 - i\nu, 4 - i\nu, z_2) + \\
 & + 8i \frac{\chi^2 k}{y^5 \gamma^3 q^2 (2 - i\nu) (3 - i\nu)} {}_2F_1(3, 2 - i\nu, 4 - i\nu, z_1) + \\
 & + 8i \frac{\alpha^2 k}{y^5 \beta^3 q^2 (2 - i\nu) (3 - i\nu)} {}_2F_1(3, 2 - i\nu, 4 - i\nu, z_2) - \\
 & - 4i \frac{\chi^2 k^2 (\alpha + 4iq)}{y^6 \gamma^3 q^3 (3 - i\nu)} {}_2F_1(3, 3 - i\nu, 4 - i\nu, z_1) + \\
 & + 4i \frac{\alpha^2 k^2 (\chi - 4iq)}{y^6 \beta^3 q^3 (3 - i\nu)} {}_2F_1(3, 3 - i\nu, 4 - i\nu, z_2) - \\
 & - 24i \frac{\chi^2 k^3}{y^6 \gamma^4 q^2 (3 - i\nu)} {}_2F_1(4, 3 - i\nu, 4 - i\nu, z_1) - \\
 & - 24i \frac{\alpha^2 k^3}{y^6 \beta^4 q^2 (3 - i\nu)} {}_2F_1(4, 3 - i\nu, 4 - i\nu, z_2). \tag{П.3}
 \end{aligned}$$

В формуле (П.3) использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 k &= \sqrt{2E}, \quad \nu = 1/k, \\
 z_1 &= \frac{\chi x}{\gamma y}, \quad z_2 = \frac{\alpha x}{\beta y}, \\
 \alpha &= \lambda_1 + ik + iq, \quad \beta = \lambda_1 - ik + iq, \\
 \chi &= \lambda_2 + ik - iq, \quad \gamma = \lambda_2 - ik - iq, \\
 x &= \lambda_2 + ik, \quad y = \lambda_2 - ik, \\
 \lambda_1 &= \frac{1}{n} \frac{1+t_1}{1-t_1}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{n} \frac{1+t_2}{1-t_2}.
 \end{aligned} \tag{П.4}$$

Литература

1. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1989).
2. R. H. Pratt, in *Fundamental Processes in Energetic Atomic Collisions*, ed. by H. O. Lutz, J. S. Briggs, H. Kleinpoppen, Plenum, New York (1984).
3. М. Я. Амусья, В. М. Буймистров, Б. А. Зон, В. Н. Цытович, и др., *Поляризационное тормозное излучение частиц и атомов*, Наука, Москва (1987).
4. М. Я. Амусья, *Тормозное излучение*, Энергоатомиздат, Москва (1990).
5. A. V. Korol and A. V. Solov'yov, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **30**, 1105 (1997).
6. В. М. Буймистров, Л. И. Трахтенберг, *ЖЭТФ* **69**, 108 (1975).
7. В. М. Буймистров, Ю. А. Кротов, Л. И. Трахтенберг, *ЖЭТФ* **79**, 808 (1980).
8. A. Dubois and A. Maquet, *Phys. Rev. A* **40**, 4288 (1989).
9. A. V. Korol, A. G. Lyalin, and A. V. Solov'yov, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **30**, L115 (1997).
10. М. Я. Амусья, А. С. Балтенков, В. Б. Гилерсон, *Письма в ЖТФ* **3**, 1105 (1977).
11. М. Ya. Amusia, *Comm. Atom. and Molec. Phys.* **11**, 123 (1982).
12. M. Ya. Amusia, N. V. Avdonina, L. V. Chernysheva, and M. Yu. Kuchiev, *J. Phys. B: At. Mol. Phys.* **18**, L791 (1985).
13. Н. Б. Авдонина, М. Я. Амусья, М. Ю. Кучиев, Л. В. Чернышева, *ЖТФ* **56(2)**, 246 (1986).
14. М. Я. Амусья, Т. М. Зимкина, М. Ю. Кучиев, *ЖТФ* **52**, 1424 (1982).
15. Е. Т. Верховцева, Е. В. Гнатченко, Б. А. Зон, А. А. Некипелов, А. А. Ткаченко, *ЖЭТФ* **98**, 797 (1990).
16. М. Ya. Amusia and A. V. Korol, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **24**, 3251 (1991).
17. М. Ya. Amusia, L. V. Chernysheva, and A. V. Korol, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **23**, 2899 (1990).
18. A. V. Korol, A. G. Lyalin, and A. V. Solov'yov, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **28**, 4947 (1995).
19. A. V. Korol, A. G. Lyalin, A. S. Shulakov, and A. V. Solov'yov, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **28**, L155 (1995).
20. А. В. Король, А. Г. Лялин, А. В. Соловьев, А. С. Шулаков, *ЖЭТФ* **109**, 1174 (1996).
21. A. V. Korol, A. G. Lyalin, and A. V. Solov'yov, *Phys. Rev. A* **53**, 2230 (1996).
22. A. V. Korol, A. G. Lyalin, A. S. Shulakov, and A. V. Solov'yov, *J. Electr. Spectr. Rel. Phen.* **79**, 323 (1996).
23. Т. М. Зимкина, А. С. Шулаков, А. П. Брайко, А. П. Степанов, В. А. Фомичев, *ФТТ* **26**, 1981 (1984).
24. А. А. Ткаченко, Е. В. Гнатченко, Е. Т. Верховцева, *Опт. и спектр.* **78**, 208 (1995).
25. A. Verweyen, G. R. Guthöhrlein, E. Gerhard et al., in *Abs. 17th Int. Conf. X-Ray and Inner-Shell Processes* (Hamburg, Germany), Abstracts (1996), p. 170.
26. М. Я. Амусья, *Атомный фотоэффект*, Наука, Москва (1987).
27. V. Yakhontov and K. Jungmann, *Z. Phys. D* **38(2)**, 141 (1996).
28. В. А. Фок, *Начала квантовой механики*, Наука, Москва (1976).
29. Б. А. Зон, Н. Л. Манаков, Л. П. Рапопорт, *Теория многофотонных процессов в атомах*, Атомиздат, Москва (1978).
30. A. V. Korol, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **25**, L341 (1992).
31. Б. А. Зон, *ЖЭТФ* **77**, 44 (1979).
32. R. H. Pratt, H. K. Tseng, C. M. Lee, L. Kissel, C. MacCallum, and M. Riley, *At. Data Nucl. Data Tables* **20**, 175 (1977); Erratum, *At. Data Nucl. Data Tables* **26**, 477 (1981).
33. S. M. Seltzer and M. J. Berger, *At. Data Nucl. Data Tables* **35**, 346 (1986).
34. М. Ya. Amusia, V. K. Ivanov, N. A. Cherepkov, and L. V. Chernysheva, *Phys. Lett. A* **40**, 361 (1972).
35. Б. А. Зон, *ЖЭТФ* **107**, 1176 (1995).
36. B. L. Henke, E. M. Gullikson, and J. C. Davis, *At. Data Nucl. Data Tables* **54**, 2 (1993).