

## ФОТОННЫЙ КООПЕРАТИВНЫЙ ЭФФЕКТ В РЕЗОНАНСНОЙ СПЕКТРОСКОПИИ

Б. А. Векленко\*

*Московский энергетический институт  
111250, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 10 января 1998 г.

Предложен регулярный метод расчета матрицы плотности подсистем, взаимодействующих с окружением в условиях термодинамического равновесия. Вычислена матрица плотности фотонов, резонансно взаимодействующих с окружающим газом. Показано, что использование распределения Гиббса позволяет полностью исключить из расчетов неупругие процессы. Корректный учет корреляторов фотон–фотон указывает на наличие новых кооперативных эффектов. Предсказана новая ветвь поляритонного спектра, обусловленная присутствием в среде возбужденных атомов. С помощью матрицы плотности вычислены средние числа заполнения фотонных мод. В терминах длин волн получено обобщение формулы Планка с учетом фотонных кооперативных явлений. Обсуждается проявление этих эффектов в кинетических процессах.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Кинетические явления в среде, состоящей из атомов, взаимодействующих с электромагнитным полем, достаточно многообразны. Большинство из них может быть описано с помощью метода двухвременных функций Грина второго порядка [1–3]. Но существуют так называемые кооперативные эффекты, этим методом не охватываемые. Ярким примером служит эффект Дике [4], заключающийся во взаимно обусловленном спонтанном излучении нескольких атомов. Для описания этого эффекта необходим, как минимум, учет корреляторов четвертого порядка  $\langle \hat{\psi}^+ \hat{\psi}^+ \hat{\psi} \hat{\psi} \rangle$ , где  $\hat{\psi}$  — полевой оператор поля атомов [5]. Эффекту Дике посвящена большая литература [6–8]. Интерес к нему усилился [9–11] в связи с изучением сжатых состояний электромагнитного поля. При большом числе атомов эффект Дике допускает, как правило, квазиклассическое описание [7].

Мы обращаем внимание на существование кооперативных эффектов иного рода. Эти кооперативные эффекты связаны с корреляторами  $\langle \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}^+ \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}^+ \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda} \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda} \rangle$ , где  $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}$  ( $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}^+$ ) — оператор уничтожения (рождения) фотона в моде, характеризуемый волновым вектором  $\mathbf{k}$  и индексом поляризации  $\lambda$ . Такие эффекты обусловлены корреляцией фотонов в реальных или виртуальных состояниях. Одним из проявлений фотонного кооперативного эффекта является специфический характер отражения резонансного излучения от возбужденных сред [12, 13]. Квазиклассического описания это явление не допускает. Для света, прошедшего через тонкий слой атомов, эффект исчезает [14]. Такая несимметрия побуждает провести более полное рассмотрение. Мы ограничимся изучением состояния термодинамического равновесия, теория которого относительно проста. На

---

\* E-mail: phf@deans.mpei.ac.ru

этом фоне интересующие нас закономерности выглядят наиболее четко. Исследуемый кооперативный эффект проявляется здесь, в частности, в виде дополнительной ветви энергетического спектра, наличие которой позволяет предположить существование новых эффектов в кинетических явлениях.

Исследования проводятся на основе модификации метода Г-операторов [13], автоматически учитывающего всевозможные корреляторы электромагнитного поля и сохраняющего все привлекательные свойства метода функций Грина, типа уравнений Дайсона, спектральных представлений и т. д. Предлагаемый формализм автоматически разделяет когерентные процессы рассеяния, при которых состояние среды не изменяется, и некогерентные. Строго показано, что использование распределения Гиббса для описания взаимодействующей системы атомы + поле позволяет опустить все некогерентные процессы. Это обстоятельство, не имеющее места в кинетической теории, чрезвычайно упрощает исследование.

Работа преследует и иную цель. Она демонстрирует, что предлагаемый формализм позволяет эффективно обобщать распределение Гиббса для подсистем, взаимодействующих с окружающей средой. Можно думать, что этот факт окажется полезным при исследованиях фазовых переходов и неразрушающих квантовых измерений [15, 16]. Конкретно, в работе явно вычислена матрица плотности фотонов в среде. При исчезающе малом взаимодействии фотонов с атомами она совпадает, естественно, с распределением Гиббса. С помощью матрицы плотности вычислено распределение среднего числа фотонов по модам, обобщающее формулу Планка. Отмечаются особенности, обусловленные кооперативными явлениями.

## 2. ИССЛЕДУЕМАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим нерелятивистский газ, состоящий из атомов с одним валентным электроном. Спиновыми эффектами пренебрежем. Сопоставим атомам газа в представлении Шредингера полевой оператор  $\hat{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ . Здесь  $\mathbf{R}$  — координата центра тяжести отдельного атома,  $\mathbf{r}$  — координата валентного электрона. Поперечному электромагнитному полю сопоставим оператор  $\hat{A}^\nu(\mathbf{r})$ . Считая взаимодействие квазирезонансным, т. е.  $|k - \omega_{m\mu}| \ll k + \omega_{m\mu}$  ( $\omega_{m\mu}$  — частота оптического перехода в атомах), примем для описания системы следующее уравнение Шредингера ( $\hbar = c = 1$ ):

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi. \quad (1)$$

Здесь

$$\hat{H} = \hat{H}^0 + \hat{H}', \quad \hat{H}^0 = \hat{H}_a + \hat{H}_{ph}, \quad \hat{H}_{ph} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hat{H}_{\mathbf{k}\lambda},$$

$$\hat{H}_{\mathbf{k}\lambda} = k \left( \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}^+ \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right), \quad \hat{H}_a = \sum_{\mathbf{i}\mathbf{p}} \varepsilon_i(\mathbf{p}) \hat{b}_{\mathbf{i}\mathbf{p}}^+ \hat{b}_{\mathbf{i}\mathbf{p}},$$

$$\hat{H}' = -\frac{e}{m} \int \hat{\psi}^+(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \hat{\mathbf{p}} \hat{A}(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) d\mathbf{r} d\mathbf{R},$$

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \sum_{ip} \psi_i(\mathbf{r} - \mathbf{R}) e^{ip\mathbf{R}} \frac{\hat{b}_{ip}}{\sqrt{V}}, \quad \varepsilon_i(p) = \varepsilon_i + \frac{p^2}{2M},$$

$\psi_i$  — волновая функция, описывающая внутреннюю структуру атомов газа с энергией  $\varepsilon_i$ ;  $\mathbf{p}$  — импульс атома;  $M$  — масса атомного остатка,  $V = L_x L_y L_z$  — нормировочный объем,  $\hat{b}_{ip}^+$  ( $\hat{b}_{ip}$ ) — операторы рождения (уничтожения) атома в состоянии  $(i, \mathbf{p})$ ;

$$\hat{A}^\nu(\mathbf{r}) = \sum_{k\lambda} \hat{A}_{k\lambda}^\nu(\mathbf{r}), \quad \hat{A}_{k\lambda}^\nu(\mathbf{r}) = \frac{e_{k\nu}^\lambda}{\sqrt{2kV}} \hat{a}_{k\lambda} e^{ik\mathbf{r}} + \text{H.c.},$$

$e_k^\lambda$  — единичный орт линейной поляризации квантов ( $\lambda = 1, 2$ ). В отсутствие температурного вырождения газа статистические свойства операторов  $\hat{b}_{ip}^+$  и  $\hat{b}_{ip}$  несущественны. Будем считать, что

$$[\hat{b}_{ip}, \hat{b}_{i'p'}^+] = \delta_{ii'} \delta_{pp'}.$$

### 3. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ

Роль корреляторов фотон–фотон проясняется при корректном учете вынужденных процессов в явлении распространения квантованного поля в среде. Уравнение (1) может быть переписано в интегральной форме

$$\Psi = \Psi^0 + i \frac{e}{m} \int_{-\infty}^t \exp[-i\hat{H}^0(t-t')] \hat{\psi}^+ \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{A}} \hat{\psi} d\mathbf{r} dt',$$

причем  $\Psi^0$  описывает состояние системы до включения взаимодействия поля со средой. Считая среду прозрачной, будем интересоваться лишь процессами упругого рассеяния света. Ищем решение уравнения в виде итерационного ряда. Опускаем ответственные за непрозрачность среды члены, пропорциональные нечетным степеням константы взаимодействия. Оставшаяся сумма эквивалентна решению следующего интегрального уравнения:

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi^0 - \left(\frac{e}{m}\right)^2 \int_{-\infty}^t dt' \int \exp[-i\hat{H}^0(t-t')] \hat{\psi}^+ \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{A}} \hat{\psi} d\mathbf{r}' d\mathbf{R}' \times \\ &\times \int_{-\infty}^{t'} \exp[-i\hat{H}^0(t'-t'')] \hat{\psi}^+ \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{A}} \hat{\psi} d\mathbf{r}'' d\mathbf{R}'' \Psi(t'') dt''. \end{aligned}$$

Поскольку в результате упругого рассеяния атомы среды остаются в исходном состоянии, то в последнем уравнении из совокупности произведений операторов  $\hat{\psi}$  в дипольном приближении вследствие правил отбора остаются лишь следующие:

$$\hat{\psi}^+ \hat{\psi} \hat{\psi}^+ \hat{\psi} \propto \hat{b}_{ip}^+ \hat{b}_{i'p'} \hat{b}_{i'p'}^+ \hat{b}_{ip}.$$

Под действием такого оператора волновая функция системы остается факторизованной,

$$\Psi = \chi\varphi,$$

если она была таковой до включения взаимодействия электромагнитного поля со средой,

$$\Psi^0 = \chi^0\varphi, \quad \varphi = \prod_{ip} \hat{b}_{ip}^+ |0\rangle \exp[-i\varepsilon_i(p)t].$$

В произведение включены лишь операторы занятых атомами состояний. При этом

$$\chi = \chi^0 + \int \Delta_r^0(t-t') \hat{\mathcal{P}}_r(t'-t'') \chi(t'') dt' dt'', \quad (2)$$

где

$$\Delta_r^0(t) = -ie^{-i\hat{H}^0 t} \theta(t),$$

$$\hat{\mathcal{P}}_r(t) = \int e^{-iEt} \hat{\mathcal{P}}_r(E) \frac{dE}{2\pi},$$

$$\hat{\mathcal{P}}_r(E) = \sum_{\mathbf{k}\lambda\mathbf{k}'\lambda'} \left[ \hat{\alpha}_{\mathbf{k}'\lambda'}^+ c_r^{\mathbf{k}\lambda} (E - \hat{H}_{ph}) \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda} + \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda} a_r^{\mathbf{k}\lambda} (E - \hat{H}_{ph}) \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}^+ \right],$$

$\theta(t)$  — ступенчатая функция Хевисайда. Для структурных коэффициентов имеем следующие выражения:

$$c_r^{\mathbf{k}\lambda}(E) = \sum_{i i' p} \left| \frac{P_{i i'}^{\lambda}(\mathbf{k})}{\sqrt{2kV}} \right|^2 \frac{N_i(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}' + \mathbf{k})}{E + \varepsilon_i(p) - \varepsilon_{i'}(p') + i0},$$

$$a_r^{\mathbf{k}\lambda}(E) = \sum_{i i' p} \left| \frac{P_{i i'}^{\lambda}(\mathbf{k})}{\sqrt{2kV}} \right|^2 \frac{N_i(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}' - \mathbf{k})}{E + \varepsilon_i(p) - \varepsilon_{i'}(p') + i0}.$$

Через  $N_i(\mathbf{p})$  обозначены числа заполнения атомных состояний. В дипольном приближении

$$P_{i i'}^{\lambda}(\mathbf{k}) = \frac{e}{m} \int \psi_i^*(\rho) \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{\lambda} \hat{\mathbf{p}} \psi_{i'}(\rho) d\rho.$$

Для простоты пренебрежем эффектом Доплера и ограничимся двухуровневым приближением для атомов, обозначая зеэмановские подуровни их возбужденного состояния индексом  $m$ , а невозбужденного — индексом  $\mu$ . Теперь

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{P}}_r(E) |N_{\mathbf{k}\lambda}\rangle &= \sum_{m\mu} \left| \frac{P_{m\mu}^{\lambda}(\mathbf{k})}{\sqrt{2kV}} \right|^2 \times \\ &\times \left[ \frac{N_{\mu} N_{\mathbf{k}\lambda}}{E - k(N_{\mathbf{k}\lambda} - 1/2) - \omega_{m\mu} + i0} + \frac{N_m (N_{\mathbf{k}\lambda} + 1)}{E - k(N_{\mathbf{k}\lambda} + 3/2) + \omega_{m\mu} + i0} \right] |N_{\mathbf{k}\lambda}\rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

Определяющий эволюцию поля оператор (3) обладает следующими особенностями. Прежде всего он алгебраически не связан с диэлектрической проницаемостью среды, которая для возбужденных разреженных сред зависит [1, 2] от разности  $N_\mu - N_m$ . Дисперсионное соотношение, соответствующее уравнению (2), имеет три ветви, одна из которых исчезает, если  $N_m = 0$ . Эта ветвь возникает в результате виртуальных вынужденных процессов излучения. Ответственное за эту ветвь последнее слагаемое в (3) описывает хорошо известные в квантовой электродинамике инверсные процессы рассеяния. При подобного рода процессах в согласии с (3) возбужденный атом сначала вынужденно излучает дополнительный квант в моду  $(\mathbf{k}, \lambda)$  и лишь затем поглощает один из квантов провоцирующего процесс поля. В виртуальном состоянии оказывается на один квант больше, чем в реальных состояниях до и после рассеяния. Все фотоны между собой коррелированы. Таким образом, кооперация фотонов тесно связана с процессами вынужденного излучения атомов. Полуклассической теории излучения этот факт не известен. Корректное описание виртуального вынужденного излучения исчезает в технике замкнутых уравнений для средних величин [1–3].

Следует отметить, что в уравнении (2) опущены некогерентные процессы, изменяющие состояние атомов в результате рассеяния. Такие процессы вносят свой вклад в кинетические явления. Ниже показано, что, опираясь на распределение Гиббса в условиях термодинамического равновесия, некогерентные процессы можно полностью исключить из расчетов. Равновесная функция распределения при этом полностью определяется оператором (3).

#### 4. МЕТОД РАСЩЕПЛЕННЫХ Г-ОПЕРАТОРОВ

Для учета фотонных корреляторов в произвольной моде  $(\mathbf{k}, \lambda)$  поступим следующим образом. Пусть заполнение моды характеризуется числами  $N_{\mathbf{k}\lambda}$ . Введем вспомогательное Г-пространство с порождающим вектором  $|\Gamma\rangle_\Gamma^0$ , в котором определены операторы рождения  $\hat{\Psi}^+(N_{\mathbf{k}\lambda})$  такие, что волновая функция состояния из  $N_{\mathbf{k}\lambda}$  фотонов в этом пространстве имеет вид

$$\hat{\Psi}^+(N_{\mathbf{k}\lambda})|\Gamma\rangle_\Gamma^0.$$

Соответственно определим оператор уничтожения  $\hat{\Psi}(N_{\mathbf{k}\lambda})$ . Поскольку превышающие единицу степени этих операторов в теории не возникают, то их конкретные коммутационные соотношения не сказываются на окончательных результатах. Будем считать, что

$$[\hat{\Psi}(N_{\mathbf{k}\lambda}), \hat{\Psi}^+(N'_{\mathbf{k}'\lambda'})] = \delta(N_{\mathbf{k}\lambda}, N'_{\mathbf{k}\lambda})\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\lambda\lambda'}.$$

Укажем одну из возможных реализаций Г-пространства. Сопоставим набору  $N_{\mathbf{k}\lambda}$  функцию

$$\mathcal{H}_n(\zeta(N_{\mathbf{k}\lambda})) \exp\left[-\frac{\xi^2(N_{\mathbf{k}\lambda})}{2}\right],$$

где  $\mathcal{H}_n$  — полиномы Эрмита. Теперь

$$|\Gamma\rangle_\Gamma^0 = \prod_{\mathbf{k}\lambda} \prod_{N_{\mathbf{k}\lambda}} \mathcal{H}_0(\xi(N_{\mathbf{k}\lambda})) \exp\left[-\frac{\xi^2(N_{\mathbf{k}\lambda})}{2}\right],$$

$$\hat{\Psi}(N_{k\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \xi(N_{k\lambda}) + \frac{\partial}{\partial \xi(N_{k\lambda})} \right),$$

$$\hat{\Psi}^+(N_{k\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \xi(N_{k\lambda}) - \frac{\partial}{\partial \xi(N_{k\lambda})} \right).$$

Волновая функция  $\hat{\Psi}^+(N'_{k\lambda})^0_\Gamma$  представляет собой приведенное выше произведение  $\rangle^0_\Gamma$ , в котором индекс  $n$  у функции с аргументом  $N'_{k\lambda}$  равен единице. Поскольку набор  $N'_{k\lambda}$  более чем в одном экземпляре встретиться в теории не может, то ни один из индексов  $\dots, n, \dots$  не может превысить единицу. Именно в этом свойстве заключается достоинство формализма. Теперь ясно, любая степень оператора уничтожения  $(\hat{\Psi}(N_{k\lambda}))^n$  при  $n > 1$  обращает в нуль любое физическое состояние и чрезвычайно упрощает формализм. В теории не возникает произведений из операторов  $\hat{\Psi}(N_{k\lambda})$ . Другими словами, сложные корреляторы не возникают и отпадает необходимость их разрыва при вычислениях. Этот факт позволяет теории точно учитывать все корреляторы фотон-фотон.

Возможны другие реализации  $\Gamma$ -представления, приводящие к тем же окончательным результатам. В работе [13] были использованы более общие  $\Gamma$ -операторы  $\hat{\Psi}^+(\mathbf{N})$ , отвечающие полному конгломерату  $\mathbf{N} = \dots, N_{k\lambda}, \dots$  фотонов. В настоящих обозначениях

$$\hat{\Psi}^+(\mathbf{N}) = \prod_{k\lambda} \hat{\Psi}^+(N_{k\lambda}).$$

Использование более простых, будем говорить расщепленных,  $\Gamma$ -операторов  $\hat{\Psi}^+(N_{k\lambda})$  позволяет представить результат расчетов в факторизованном виде типа представления Хартри в традиционной квантовой механике. Если  $\varphi(N_{k\lambda}|\zeta_{k\lambda})$  — волновые функции квантового осциллятора, то волновая функция свободного электромагнитного поля может быть представлена в виде

$$\prod_{k\lambda} \varphi(N_{k\lambda}|\zeta_{k\lambda}).$$

Унитарный переход от стандартного представления чисел заполнения к  $\Gamma$ -представлению осуществляет оператор [13]

$$\hat{O} = \prod_{k\lambda} \hat{\Phi}^+(\zeta_{k\lambda})^0_\Gamma, \quad \hat{\Phi}(\zeta_{k\lambda}) = \sum_{N_{k\lambda}} \hat{\Psi}(N_{k\lambda})\varphi(N_{k\lambda}|\zeta_{k\lambda}).$$

Волновая функция произвольного свободного электромагнитного поля в  $\Gamma$ -представлении имеет вид

$$\prod_{k\lambda} \sum_{N_{k\lambda}} C(N_{k\lambda}) \hat{\Psi}^+(N_{k\lambda})^0_\Gamma, \tag{4}$$

здесь  $C(N_{k\lambda})$  — коэффициенты разложения. Теперь очевидно, что

$$\int \hat{\Phi}^+(\zeta_{k\lambda}) \hat{\Phi}(\zeta_{k\lambda}) d\zeta_{k\lambda} = \sum_{N_{k\lambda}} \hat{\Psi}^+(N_{k\lambda}) \hat{\Psi}(N_{k\lambda}) = 1. \tag{5}$$

В  $\Gamma$ -представлении уравнение Шредингера имеет вид

$$i \frac{\partial \Psi_{\Gamma}}{\partial t} = \left[ \hat{H}_a + \sum_{k\lambda} \int \hat{\Phi}^+(\zeta_{k\lambda}) \hat{H}_{k\lambda} \hat{\Phi}(\zeta_{k\lambda}) d\zeta_{k\lambda} - \frac{e}{m} \sum_{k\lambda} \int \hat{\Phi}^+(\zeta_{k\lambda}) \hat{\psi}^+ \hat{p} \hat{A}_{k\lambda}(\mathbf{r}) \hat{\psi} \hat{\Phi}(\zeta_{k\lambda}) d\mathbf{r} d\mathbf{R} d\zeta_{k\lambda} \right] \Psi_{\Gamma}.$$

Среднее значение любого оператора поля  $\hat{K}_{k\lambda}$  находится как

$$\langle K_{k\lambda} \rangle = \text{Sp } \hat{K}_{k\lambda} \rho_{k\lambda},$$

где

$$\rho_{k\lambda} = \rho(\zeta_{k\lambda}, \zeta'_{k\lambda}) = \langle \hat{\Phi}^+(\zeta'_{k\lambda}) \hat{\Phi}(\zeta_{k\lambda}) \rangle_{\Gamma}.$$

Здесь

$$\rangle_{\Gamma} = \Psi_{\Gamma}.$$

Для систем, находящихся в термодинамическом равновесии, усреднение следует осуществлять одновременно по квантовому состоянию и по ансамблю систем. Поэтому

$$\rho(\zeta_{k\lambda}, \zeta'_{k\lambda}) = \text{Sp } \langle \hat{\Phi}^+(\zeta'_{k\lambda}) \hat{\Phi}(\zeta_{k\lambda}) \rho_H \rangle_{\Gamma},$$

$$\rho_H = \exp \frac{\Omega - \hat{H} - \mu \hat{N}_a}{T},$$

где  $\hat{N}_a$  — оператор числа атомов,  $\mu$  — их химический потенциал,  $\Omega$  — термодинамический потенциал системы.

Если с помощью функций квантового осциллятора перейти к аргументам  $N_{k\lambda}$ , то, воспользовавшись в условиях равновесия диагональностью  $\rho$ , имеем

$$\rho(N_{k\lambda}, N_{k\lambda}) = \rho(N_{k\lambda}) = \text{Sp } \langle \hat{\mathfrak{U}}^+(N_{k\lambda}) \hat{\mathfrak{U}}(N_{k\lambda}) \rho_H \rangle_{\Gamma}. \tag{6}$$

из (5) и (6) следует, что

$$\sum_{N_{k\lambda}} \rho(N_{k\lambda}) = 1. \tag{7}$$

### 5. МЕТОД ТЕМПЕРАТУРНЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Искомую конструкцию (6) удобно рассчитывать методом мацубаровских функций Грина [1]. Для этого вводится функция

$$\mathcal{D}(N_{k\lambda}, \tau, N'_{k\lambda}, \tau') = -\text{Sp } \rho_H \hat{T}_{\tau} \hat{\mathfrak{U}}(N_{k\lambda}, \tau) \hat{\mathfrak{U}}(N'_{k\lambda}, \tau'), \tag{8}$$

где  $\hat{T}_{\tau}$  — хронологический оператор по параметру  $\tau$ . Символ Sp здесь характеризует усреднение в квантовом и статистическом смысле. Гейзенберговские Г-операторы строятся следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{U}}(N_{k\lambda}, \tau) &= \exp \left[ \left( \hat{H} - \mu \hat{N}_a \right) \tau \right] \hat{\mathfrak{U}}(N_{k\lambda}) \exp \left[ - \left( \hat{H} - \mu \hat{N}_a \right) \tau \right], \\ \hat{\mathfrak{U}}(N_{k\lambda}, \tau) &= \exp \left[ \left( \hat{H} - \mu \hat{N}_a \right) \tau \right] \hat{\mathfrak{U}}^+(N_{k\lambda}) \exp \left[ - \left( \hat{H} - \mu \hat{N}_a \right) \tau \right], \end{aligned} \tag{9}$$

параметр  $\tau$  считается положительным. Искомая матрица плотности  $\rho$  находится как

$$\mathcal{D} \xrightarrow[\tau' \rightarrow \tau+0]{} \delta(N_{k\lambda}, N'_{k\lambda}) \rho(N_{k\lambda}). \quad (10)$$

## 6. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Для вычисления температурной функции Грина (8) переходим к мацубаровскому представлению взаимодействия. Определяем в представлении взаимодействия операторы  $\hat{\mathfrak{U}}(N_{k\lambda}, \tau)$  и  $\hat{\mathfrak{U}}(N_{k\lambda}, \tau)$  с помощью формул (9), в которых оператор  $\hat{H}$  заменен на  $\hat{H}^0$ . Переход в выражении (8) к введенным таким образом операторам носит стандартный характер [1] и приводит к результату

$$\mathcal{D}(N_{k\lambda}, \tau, N'_{k\lambda}, \tau') = -Q^{-1} \left\langle \hat{T}_\tau \hat{\mathfrak{U}}(N_{k\lambda}, \tau) \hat{\mathfrak{U}}(N'_{k\lambda}, \tau') \hat{\mathfrak{S}} \left( \frac{1}{T} \right) \right\rangle^0. \quad (11)$$

Скобки здесь означают усреднение как в квантовом смысле по состояниям невзаимодействующих атомного и электромагнитного полей, так и в статистическом смысле с весом

$$\rho^0 = \exp \left( \frac{\Omega^0 - \hat{H}^0 - \mu \hat{N}_a}{T} \right),$$

$\Omega^0$  — термодинамический потенциал системы в отсутствие взаимодействия,

$$Q = \exp \left[ -\frac{\Omega - \Omega^0}{T} \right] = \left\langle \hat{\mathfrak{S}} \left( \frac{1}{T} \right) \right\rangle^0.$$

Что касается оператора  $\hat{\mathfrak{S}}$ , то он равен

$$\hat{\mathfrak{S}}(\tau) = \hat{T}_\tau \exp \left[ \int_0^\tau \hat{H}'(\tau') d\tau' \right],$$

где  $\hat{H}'(\tau)$  — оператор взаимодействия в представлении взаимодействия. Из определения следует

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \hat{\mathfrak{U}}(N_{k\lambda}, \tau) = \left[ \hat{H}^0 - \mu \hat{N}_a, \hat{\mathfrak{U}}(N_{k\lambda}, \tau) \right] = -k(N_{k\lambda} + 1/2) \hat{\mathfrak{U}}(N_{k\lambda}, \tau).$$

Поэтому

$$\hat{\mathfrak{U}}(N_{k\lambda}, \tau) = \hat{\mathfrak{U}}(N_{k\lambda}) \exp \left[ -k(N_{k\lambda} + 1/2)\tau \right].$$

Аналогично

$$\hat{\mathfrak{U}}(N_{k\lambda}, \tau) = \hat{\mathfrak{U}}^\dagger(N_{k\lambda}) \exp \left[ k(N_{k\lambda} + 1/2)\tau \right].$$



### 7. ФУНКЦИИ ГРИНА СВОБОДНЫХ ПОЛЕЙ

Предварительно рассмотрим разность между хронологическим и нормальным произведениями операторов:

$$(\hat{T}_\tau - \hat{N}) \hat{\Psi}(N_{k\lambda}, \tau) \hat{\Psi}(N'_{k\lambda}, \tau') = -\delta(N_{k\lambda}, N'_{k\lambda}) \Delta^0(N_{k\lambda}, \tau - \tau'),$$

где

$$\begin{aligned} \Delta^0(N_{k\lambda}, \tau - \tau') &= - [\hat{\Psi}(N_{k\lambda}, \tau) \hat{\Psi}(N'_{k\lambda}, \tau')] \theta(\tau - \tau') = \\ &= -\theta(\tau - \tau') \exp[-k(N_{k\lambda} + 1/2)(\tau - \tau')]. \end{aligned} \quad (12)$$

Если взаимодействия в системе нет, то  $\hat{\mathcal{G}}(1/T) = 1$  и

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^0 &= - \{ [1 + \rho^0(N_{k\lambda})] \theta(\tau - \tau') + \rho^0(N_{k\lambda}) \theta(\tau' - \tau) \} \times \\ &\times \delta(N_{k\lambda}, N'_{k\lambda}) \exp[-k(N_{k\lambda} + 1/2)(\tau - \tau')]. \end{aligned}$$

Здесь

$$\rho^0(N_{k\lambda}) = \langle \hat{\Psi}^+(N_{k\lambda}) \hat{\Psi}(N_{k\lambda}) \rangle^0 = \exp \left[ \frac{\Omega_{k\lambda}^0 - k(N_{k\lambda} + 1/2)}{T} \right],$$

причем

$$\exp \left( \frac{\Omega_{k\lambda}^0}{T} \right) = \frac{e^{k/2T}}{1 - e^{-k/T}}.$$

Сравнение последних трех формул позволяет записать

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^0 &= \Delta^0 - \rho^0(N_{k\lambda}, \tau - \tau'), \\ \rho^0(N_{k\lambda}, \tau - \tau') &= \rho^0(N_{k\lambda}) \exp[-k(N_{k\lambda} + 1/2)(\tau - \tau')]. \end{aligned} \quad (13)$$

Поскольку теперь

$$\rho^0(N_{k\lambda}, -1/T) = \exp(\Omega_{k\lambda}^0/T),$$

то

$$\rho^0(N_{k\lambda}, \tau - \tau') = -\Delta^0(N_{k\lambda}, \tau - \tau') \rho^0(N_{k\lambda}) = -\Delta^0(N_{k\lambda}, \tau - \tau' + 1/T) \rho^0(N_{k\lambda}, -1/T). \quad (14)$$

Аналогично

$$\rho^0(N_{k\lambda}, \tau - \tau') = -\Delta^0(N_{k\lambda}, \tau) \rho^0(N_{k\lambda}, -\tau') = -\rho^0(N_{k\lambda}, \tau - 1/T) \Delta^0(N_{k\lambda}, 1/T - \tau'). \quad (15)$$

Для функции Грина свободного атомного поля имеем

$$G(X, X') = -\langle \hat{T}_\tau \hat{\psi}(X) \hat{\psi}(X') \rangle^0, \quad X = \{\mathbf{r}, \mathbf{R}, \tau\}.$$

С использованием представления взаимодействия:

$$\hat{\psi}(X) = \sum_{i\mathbf{p}} \psi_i(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \frac{\hat{b}_{i\mathbf{p}}}{\sqrt{V}} \exp [i\mathbf{p}\mathbf{R} - \varepsilon_i(p)\tau],$$

$$\hat{\bar{\psi}}(X) = \sum_{i\mathbf{p}} \psi_i^*(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \frac{\hat{b}_{i\mathbf{p}}^+}{\sqrt{V}} \exp [-i\mathbf{p}\mathbf{R} + \varepsilon_i(p)\tau],$$

в условиях отсутствия температурного вырождения находим

$$G(X, X') = -\frac{1}{V} \sum_{j\mathbf{p}} \psi_j(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \psi_j^*(\mathbf{r}' - \mathbf{R}') \exp [i\mathbf{p}(\mathbf{R} - \mathbf{R}')] \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\gamma(E - \varepsilon_i(p)) \exp [-E(\tau - \tau')] dE [\theta(\tau - \tau') + N_j(\mathbf{p})\theta(\tau' - \tau)]. \quad (16)$$

Здесь  $N_j(\mathbf{p})$  — средние числа заполнения состояния  $(j, \mathbf{p})$ , а под  $\delta_\gamma$  следует понимать обычную функцию Дирака. Но если учесть взаимодействие атомов среды с посторонними частицами (резервуаром), что приводит к уширению энергетического спектра, то функция Дирака заменяется на функцию Лоренца

$$\delta_\gamma(E - \varepsilon) = -\frac{1}{2\pi i} \left( \frac{1}{E - \varepsilon + i\gamma/2} - \frac{1}{E - \varepsilon - i\gamma/2} \right),$$

где  $\gamma$  — ширина энергетического уровня  $\varepsilon$ . Нижний предел интегрирования в (16) при этом следует считать сколь угодно большим, но конечным.

## 8. ВТОРОЙ ПОРЯДОК ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

В представлении взаимодействия

$$\hat{\Phi}(\zeta_{k\lambda}, \tau) = \sum_{N_{k\lambda}} \varphi(N_{k\lambda} | \zeta_{k\lambda}) \hat{\mathfrak{U}}(N_{k\lambda}) \exp(-kN_{k\lambda}\tau),$$

$$\hat{\bar{\Phi}}(\zeta_{k\lambda}, \tau) = \sum_{N_{k\lambda}} \varphi(N_{k\lambda} | \zeta_{k\lambda}) \hat{\mathfrak{U}}^+(N_{k\lambda}) \exp(kN_{k\lambda}\tau).$$

Поэтому

$$\hat{H}'(\tau) = -\frac{e}{m} \sum_{k\lambda N_{k\lambda} N'_{k\lambda}} \int \hat{\mathfrak{U}}(N_{k\lambda}, \tau) \hat{\psi} \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{A}}_{k\lambda} \hat{\psi} \hat{\mathfrak{U}}(N'_{k\lambda}, \tau) d\mathbf{r} d\mathbf{R}.$$

Под оператором  $\hat{\mathbf{A}}_{k\lambda}$  здесь надлежит понимать выражение

$$\int \varphi(N_{k\lambda} | \zeta_{k\lambda}) \hat{\mathbf{A}}_{k\lambda}(\mathbf{r}) \varphi(N'_{k\lambda} | \zeta_{k\lambda}) d\zeta_{k\lambda}. \quad (17)$$

По сути дела преобразование (17) производит лишь унитарное изменение аргументов. По этой причине мы сохраняем для оператора  $\hat{\mathbf{A}}_{k\lambda}$  в новых аргументах прежнее обозначение.

Расписываем выражение (11) во втором порядке теории возмущений. От аргументов  $\zeta_{k\lambda}$  перейдем с помощью  $\varphi(N_{k\lambda}|\zeta_{k\lambda})$  к аргументам  $N_{k\lambda}$ . Имеем

$$Q\mathcal{D} = \mathcal{D}^0 - \left\langle \hat{T}_\tau \hat{\mathfrak{U}}(N_{k\lambda}, \tau) \hat{\mathfrak{U}}(N'_{k\lambda}, \tau') \frac{1}{2!} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \times \right. \\ \left. \times \int \hat{\mathfrak{U}} \hat{\psi} \hat{\rho} \hat{A}_{k\lambda} \hat{\psi} \hat{\mathfrak{U}} dX_1 \int \hat{\mathfrak{U}} \hat{\psi} \hat{\rho} \hat{A}_{k\lambda} \hat{\psi} \hat{\mathfrak{U}} dX_2 \right\rangle, \\ \dots dX = dr dR d\tau.$$

Для сокращения записи у операторов  $\hat{\mathfrak{U}}$  и  $\hat{\psi}$  опущены очевидные аргументы. Для упрощения произведения операторов  $\hat{\psi}$  используем термодинамический вариант теоремы Вика [1]. Другими словами, считаем, что в термодинамическом пределе высшие корреляторы выражаются через низшие. Возможные спаривания операторов обозначены горизонтальными скобками:

$$\overline{\hat{\psi} \hat{\psi}} = -G(X, X').$$

Для упрощения произведений операторов  $\hat{\mathfrak{U}}$  воспользуемся алгебраической теоремой Вика [17] и тем фактом, что на физических состояниях (4) справедливо тождество  $\hat{\mathfrak{U}}(N_{k\lambda}) \hat{\mathfrak{U}}(N_{k\lambda}) = 0$ . Таким образом, среди всевозможных  $\hat{N}$  произведений «выживают» содержащие лишь один оператор уничтожения, отвечающий моде  $(k, \lambda)$ . По этой причине функция  $\rho^0(N_{k\lambda})$  в любом слагаемом может появляться только в первой степени.

Использование алгебраической теоремы Вика не вносит каких-либо огрублений или упрощений. По этой причине корреляторы фотон–фотон учитываются в этой технике точно. Теперь,

$$Q\mathcal{D} = \mathcal{D}^0 - \left(\frac{e}{m}\right)^2 \sum_{\nu_1 \nu_2} \int \hat{p}^{\nu_1} G(X, X') \hat{p}^{\nu_2} G(X', X) \times \\ \times \left[ -\Delta^0 \hat{A}_{k\lambda}^{\nu_1} \Delta^0 \hat{A}_{k\lambda}^{\nu_2} \Delta^0 + \rho^0 \hat{A}_{k\lambda}^{\nu_1} \Delta^0 \hat{A}_{k\lambda}^{\nu_2} \Delta^0 + \Delta^0 \hat{A}_{k\lambda}^{\nu_1} \rho^0 \hat{A}_{k\lambda}^{\nu_2} \Delta^0 + \Delta^0 \hat{A}_{k\lambda}^{\nu_1} \Delta^0 \hat{A}_{k\lambda}^{\nu_2} \rho^0 \right] dX' dX$$

(операторы  $\hat{p}^\nu$  действуют на ближайшие к ним аргументы функции  $G$ ). Мы учли только члены, отвечающие связанным диаграммам Фейнмана. Последнюю формулу можно переписать следующим образом:

$$Q\mathcal{D} = \Delta^0 - \rho^0 + \Delta^0 \hat{\mathcal{F}} \Delta^0 - \rho^0 \hat{\mathcal{F}} \Delta^0 - \Delta^0 \hat{\mathcal{F}} \rho^0 - \Delta^0 \hat{\mathcal{F}}^{(n)} \Delta^0, \tag{18}$$

где

$$\hat{\mathcal{F}} = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \int \hat{\rho} \hat{A}_{k\lambda} G(X, X') \Delta^0 \hat{\rho} \hat{A}_{k\lambda} G(X', X) dr dr' dR dR', \tag{19}$$

$$\hat{\mathcal{F}}^{(n)} = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \int \hat{\rho} \hat{A}_{k\lambda} G(X, X') \rho^0 \hat{\rho} \hat{A}_{k\lambda} G(X', X) dr dr' dR dR'. \tag{20}$$

Выражения (19), (20) представляют собой первый член разложения по параметру  $n\lambda^3$ , где  $\lambda = 2\pi/k$  и  $n$  — концентрация атомов. Поэтому малость этого параметра служит условием применимости приведенных формул.

## 9. ОБЩАЯ СТРУКТУРА РЯДА ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Учет высших приближений в (18) приводит к тому, что к  $\Delta^0$  добавляются не содержащие  $\rho^0(N_{k\lambda})$  члены, отвечающие связанным диаграммам Фейнмана. Их сумму с  $\Delta^0$  обозначим через  $\Delta$ . Эта сумма умножается на сумму всевозможных петлевых диаграмм, совокупность которых [1] равна  $Q$ . Таким образом,

$$Q\mathcal{D} = Q\Delta - Q_{k\lambda}\rho^{con}.$$

Через  $\rho^{con}$  обозначена совокупность связанных диаграмм Фейнмана, каждая из которых обязательно содержит  $\rho^0(N_{k\lambda})$ . Эта совокупность, в свою очередь, умножается на сумму всевозможных петлевых диаграмм  $Q_{k\lambda}$ , в которой, однако,  $\rho^0(N_{k\lambda})$  отсутствует. Ниже мы ограничимся учетом линейных процессов взаимодействия света с веществом. Другими словами, будем считать, что оператор  $\hat{\mathcal{F}}$  не зависит от  $\rho^0(N_{k\lambda'})$  ни при каких  $(k', \lambda')$ . Что касается оператора  $\hat{\mathcal{F}}^{(n)}$  то он зависит линейно лишь от  $\rho^0(N_{k\lambda})$ . В этих условиях совокупность фейнмановских диаграмм сворачивается в следующие уравнения:

$$\Delta = \Delta^0 + \Delta^0 \hat{\mathcal{F}} \Delta, \quad (21)$$

$$\rho^{con} = \rho^0 + \rho^0 \hat{\mathcal{F}} \Delta + \Delta^0 \hat{\mathcal{F}} \rho^{con} + \Delta^0 \hat{\mathcal{F}}^{(n)} \Delta. \quad (22)$$

В согласии с (10) искомая матрица  $\rho$  находится из выражения

$$\rho(N_{k\lambda}) = -\mathcal{D} = \frac{Q_{k\lambda}}{Q} \rho^{con}, \quad \tau' \rightarrow \tau + 0. \quad (23)$$

Уравнение (22) может быть написано в форме

$$\left(1 - \Delta^0 \hat{\mathcal{F}}\right) \rho^{con} = \rho^0 \left(1 + \hat{\mathcal{F}} \Delta\right) + \Delta^0 \hat{\mathcal{F}}^{(n)} \Delta. \quad (24)$$

Непосредственная проверка с использованием (21) показывает, что

$$\left(1 + \Delta \hat{\mathcal{F}}\right) \left(1 - \Delta^0 \hat{\mathcal{F}}\right) = 1.$$

Теперь после умножения слева на оператор  $1 + \Delta \hat{\mathcal{F}}$  уравнение (24) приобретает вид

$$\rho^{con} = \left(1 + \Delta \hat{\mathcal{F}}\right) \rho^0 \left(1 + \hat{\mathcal{F}} \Delta\right) + \Delta \hat{\mathcal{F}}^{(n)} \Delta.$$

Это уравнение служит базой для дальнейших исследований. Его удобно записать в иной форме:

$$\rho^{con} = \rho^{(c)} + \rho^{(n)},$$

где

$$\rho^{(c)} = \left(1 + \Delta \hat{\mathcal{F}}\right) \rho^0 \left(1 + \hat{\mathcal{F}} \Delta\right), \quad (25)$$

$$\rho^{(n)} = \Delta \hat{\mathcal{F}}^{(n)} \Delta. \quad (26)$$

В матрице  $\rho^{(c)}$  содержатся процессы рассеяния, в результате которых состояние рас-сеивателей не изменяется (когерентный канал). Матрица  $\rho^{(n)}$  отвечает за процессы, изменяющие состояние рассеивающей системы (некогерентный канал). Функция  $\Delta^0$  и вместе с ней оператор  $\hat{\mathcal{F}}$  носят «запаздывающий» характер. Этим же свойством, согласно (21), обладает  $\Delta$ . Поскольку интегрирование в (26) распространяется по области от нуля до  $1/T$ , то

$$\rho^{(n)}(\tau, 1/T) = 0, \quad \tau < 1/T.$$

Согласно определению (8), все функции зависят от  $\tau$  и  $\tau'$  разностным образом. Следовательно,

$$\rho^{con}(\tau, 1/T) = \rho^{(c)}(\tau - 1/T), \quad \tau < 1/T.$$

Проведем замену аргументов  $\tau \rightarrow (1/T) + \tau - \tau' < 1/T$ . Тогда

$$\rho^{con}(\tau - \tau') = \rho^{(c)}(\tau - \tau') \quad \text{при} \quad \tau < \tau'$$

и

$$\rho^n(\tau - \tau') = 0 \quad \text{при} \quad \tau < \tau'. \quad (27)$$

В низшем порядке теории возмущений поляризационный оператор  $\hat{\mathcal{F}}^{(n)}$  определяется формулой (20). Подстановка этого выражения в (26) ведет к противоречию с равенством (27). Мы приходим к заключению, что некогерентный канал по теории возмущений рассчитан быть не может, поэтому здесь требуется суммирование бесконечных подпоследовательностей фейнмановских диаграмм. Для наших целей рассчитывать процессы некогерентного канала согласно (23) и (27) нет никакой нужды. На окончательный результат они влияния не оказывают. Так в данном варианте проявляет себя, по сути дела, флуктуационно-диссипационная теорема.

Рассмотрим когерентный канал. В силу запаздывающего характера пропагатора  $\Delta$  из равенства (25) следует, что

$$\rho^{(c)}(0, \tau') = \rho^0 \left( 1 + \hat{\mathcal{F}} \Delta \right),$$

$$\rho^{(c)}(\tau, 1/T) = \left( 1 + \Delta \hat{\mathcal{F}} \right) \rho^0 \quad \text{при} \quad \tau < 1/T.$$

Воспользовавшись формулами (14), (15) и уравнением (21) придадим последним соотношениям вид

$$\rho^{(c)}(0, \tau') = -\rho^0(0, 1/T) \Delta(1/T, \tau'), \quad (28)$$

$$\rho^{(c)}(\tau, 1/T) = -\Delta(\tau, 0) \rho^0(0, 1/T). \quad (29)$$

С учетом разностной зависимости функций от  $\tau$  и  $\tau'$  уравнения (27)–(29) приводят к общей формуле

$$\rho^{con}(\tau - \tau') = -\Delta(\tau - \tau' + 1/T) \rho^0(0, 1/T), \quad \tau < \tau'. \quad (30)$$

Искомая матрица плотности в соответствии с (23) и (30) может быть найдена из выражения

$$\rho = -\frac{1}{Z}\Delta\left(\frac{1}{T}\right), \quad Z^{-1} = \frac{Q_{k\lambda}}{Q} \exp\left(\frac{\Omega_{k\lambda}^0}{T}\right). \quad (31)$$

Величина  $Z$  может быть рассчитана из диаграммной техники, но проще воспользоваться нормировочным условием (7).

## 10. ПРОПАГАТОР $\Delta$

Согласно (31), необходимо вычислить  $\Delta(1/T)$ . Эта функция находится из уравнения (21), которое при  $\tau < 1/T$  в силу запаздывающих свойств входящих в него функций может быть записано в виде

$$\Delta = \Delta^0 + \int_0^\tau \Delta^0(\tau - \tau') \int_0^{\tau'} \hat{\mathcal{P}}(\tau' - \tau'') \Delta(\tau'') d\tau' d\tau''.$$

Для образа преобразования Лапласа очевидно, что

$$\Delta(s) = \frac{\Delta^0(s)}{1 - \Delta^0(s)\hat{\mathcal{P}}(s)}, \quad (32)$$

причем согласно (12)

$$\Delta^0(s) = -[s + k(N_{k\lambda} + 1/2)]^{-1}.$$

Явное выражение для  $\hat{\mathcal{P}}(s)$  легко находится из формул (12), (16) и (19):

$$\hat{\mathcal{P}}(s)|N_{k\lambda} = [(N_{k\lambda} + 1)a^{k\lambda}(s) + N_{k\lambda}c^{k\lambda}(s)]|N_{k\lambda},$$

где структурные коэффициенты  $c^{k\lambda}$  и  $a^{k\lambda}$  представимы всюду аналитическими функциями с граничными значениями на вещественной оси:

$$c^{k\lambda}(s \pm i0) = - \sum_{i_1 i_2 \mathbf{p}} \left| \frac{P_{i_1 i_2}^\lambda(\mathbf{k})}{\sqrt{2kV}} \right|^2 \frac{N_{i_2}(\mathbf{p})}{s + \varepsilon_{i_1}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) - \varepsilon_{i_2}(\mathbf{p}) + k(N_{k\lambda} - 1/2) \pm i\gamma/2},$$

$$a^{k\lambda}(s \pm i0) = - \sum_{i_1 i_2 \mathbf{p}} \left| \frac{P_{i_1 i_2}^\lambda(\mathbf{k})}{\sqrt{2kV}} \right|^2 \frac{N_{i_2}(\mathbf{p})}{s + \varepsilon_{i_1}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) - \varepsilon_{i_2}(\mathbf{p}) + k(N_{k\lambda} + 3/2) \pm i\gamma/2},$$

причем  $\gamma = \gamma_{i_1} + \gamma_{i_2}$ .

Сходство последних формул с выражением (3) очевидно. Обратное преобразование Лапласа

$$\Delta(\tau) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\tau s} \Delta(s) \frac{ds}{2\pi i}$$

позволяет найти окончательный результат.

Спектральный анализ, аналогичный спектральному анализу стандартных функций Грина [1], показывает, что пропагатор  $\Delta(s)$  представим аналитической функцией с особенностями лишь на вещественной оси. Поэтому

$$\Delta(\tau) = \int_{E_{min}}^{\infty} e^{-\tau s} [\Delta(-s - i0) - \Delta(-s + i0)] \frac{ds}{2\pi i}. \quad (33)$$

Постоянная  $E_{min}$  совпадает с нижней границей энергетического спектра системы в целом. При практических расчетах вопрос о ее величине в каждом случае решается особо. Как и выше, мы воспользуемся двухуровневым приближением для атомов. Пренебрежем эффектом Доплера. В дипольном приближении будем иметь

$$c^{k\lambda}(-s \pm i0) = \frac{-c}{-s + \omega_{m\mu} + k(N_{k\lambda} - 1/2) \pm i\gamma/2}, \quad c = \sum_{m\mu} \frac{|P_{m\mu}^\lambda(\mathbf{k})|^2 n_\mu}{2k},$$

$$a^{k\lambda}(-s \pm i0) = \frac{-a}{-s - \omega_{m\mu} + k(N_{k\lambda} + 3/2) \pm i\gamma/2}, \quad a = \sum_{m\mu} \frac{|P_{m\mu}^\lambda(\mathbf{k})|^2 n_m}{2k}.$$

При дальнейшей конкретизации коэффициентов  $c^{k\lambda}$  и  $a^{k\lambda}$  можно воспользоваться тем, что

$$\sum_{m\mu} |P_{m\mu}^\lambda(\mathbf{k})|^2 = \pi\gamma_r \frac{2j_m + 1}{\omega_{m\mu}}.$$

Здесь  $j_m$  — орбитальное квантовое число,  $\gamma_r^{-1}$  — радиационное время жизни возбужденного состояния атома. Нули знаменателей подынтегральной функции (32) образуют спектр из трех ветвей. Поэтому

$$\Delta(-s - i0) = \frac{[s - \omega_{m\mu} - k(N_{k\lambda} - 1/2) + i\gamma/2] [s + \omega_{m\mu} - k(N_{k\lambda} + 3/2) + i\gamma/2]}{(s - s_0)(s - s_1)(s - s_2)}.$$

В первом порядке разложений по концентрациям  $n_\mu$  и  $n_m$  имеем

$$s_0 = s_0^{(0)} + \Delta s_0, \quad s_1 = s_1^{(0)} + \Delta s_1, \quad s_2 = s_2^{(0)} + \Delta s_2,$$

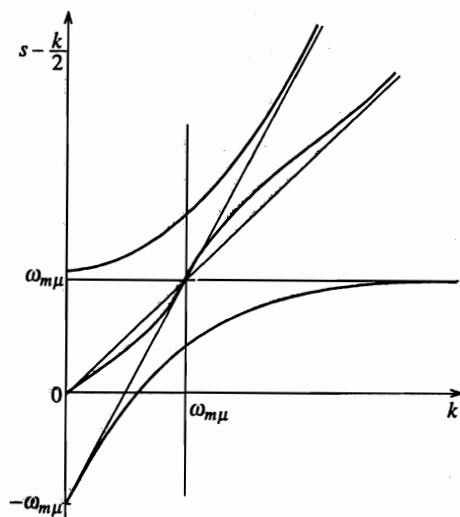
где

$$s_0^{(0)} = k \left( N_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right), \quad s_1^{(0)} = \omega_{m\mu} + k \left( N_{k\lambda} - \frac{1}{2} \right) - i\frac{\gamma}{2},$$

$$s_2^{(0)} = -\omega_{m\mu} + k \left( N_{k\lambda} + \frac{3}{2} \right) - i\frac{\gamma}{2}, \quad (34)$$

$$\Delta s_0 = N_{k\lambda}(\eta_\mu - \eta_m)(k - \omega_{m\mu}) - i\frac{\gamma}{2} N_{k\lambda}(\eta_\mu + \eta_m) - \eta_m \left( k - \omega_{m\mu} + i\frac{\gamma}{2} \right),$$

$$\Delta s_1 = -N_{k\lambda} \left( k - \omega_{m\mu} - i\frac{\gamma}{2} \right) \eta_\mu, \quad \Delta s_2 = (N_{k\lambda} + 1)\eta_m \left( k - \omega_{m\mu} + i\frac{\gamma}{2} \right).$$



Дисперсионные кривые, отвечающие пропагатору  $\Delta$  при  $N_{k\lambda} = 1$

Эти формулы справедливы при условиях

$$\eta_\mu = \frac{c}{(k - \omega_{m\mu})^2 + \gamma^2/4} < 1, \quad \eta_m = \frac{a}{(k - \omega_{m\mu})^2 + \gamma^2/4} < 1. \quad (35)$$

В отсутствие возбужденных атомов ветвь  $s_2$  исчезает, и мы приходим к хорошо известному в полуклассической теории излучения стандартному поляритонному спектру. Стандартный поляритонный спектр следует и из квантовой электродинамики [18]. Определяемый поляризационным оператором в технике полного разрыва корреляторов этот спектр сохраняет свой вид и для возбужденных сред, требуя при этом замены  $n_\mu \rightarrow n_\mu - n_m$  [2]. Таким образом, появление третьей ветви спектра характерно для фотонного кооперативного эффекта. Стандартный поляритонный спектр зависит исключительно от разности  $n_\mu - n_m$ . Вместе с тем в формулы (34) входит сумма концентраций  $n_\mu + n_m$ . Эта особенность, как и наличие третьей ветви спектра, своим появлением обязана вынужденному излучению. Она формируется лишним фотоном в виртуальном состоянии процесса взаимодействия возбужденного атома с излучением. Наличие члена  $i(n_\mu + n_m)$  в спектре предстает физически очевидным [13], поскольку состояние  $|N_{k\lambda}\rangle$  может погибнуть вследствие как поглощения фотона в среде,  $|N_{k\lambda}\rangle \rightarrow |N_{k\lambda} - 1\rangle$ , так и вынужденного испускания фотона,  $|N_{k\lambda}\rangle \rightarrow |N_{k\lambda} + 1\rangle$ . Оба вновь возникших состояния  $|N_{k\lambda} \pm 1\rangle$  в равной мере ортогональны исходному.

При  $\gamma \rightarrow 0$  полюсы пропагатора  $\Delta$  образуют спектр, изображенный для  $N_{k\lambda} = 1$  на рисунке.

Интеграл (33) при  $\gamma \rightarrow 0$  допускает явное вычисление:

$$\begin{aligned} \Delta(\tau) = & e^{-\tau s_0} \frac{(s_0 - s_1^{(0)})(s_0 - s_2^{(0)})}{(s_0 - s_1)(s_0 - s_2)} + \\ & + e^{-\tau s_1} \frac{(s_1 - s_1^{(0)})(s_1 - s_2^{(0)})}{(s_1 - s_0)(s_1 - s_2)} + e^{-\tau s_2} \frac{(s_2 - s_1^{(0)})(s_2 - s_2^{(0)})}{(s_2 - s_0)(s_2 - s_1)}. \end{aligned}$$



В условиях справедливости неравенств (35) согласно (31) находим следующее распределение фотонов по числам  $N_{k\lambda}$ , приходящее на смену распределению Гиббса ( $\beta = 1/T$ ):

$$Z e^{k\beta/2} \rho(N_{k\lambda}) = \exp \left\{ -\beta [kN_{k\lambda} + N_{k\lambda}(\eta_\mu - \eta_m)(k - \omega_{m\mu}) - \eta_m(k - \omega_{m\mu})] \right\} - \\ - \left\{ \exp(-\beta k N_{k\lambda}) - \exp[-\beta(\omega_{m\mu} - k + kN_{k\lambda})] \right\} \eta_\mu N_{k\lambda} - \\ - \left\{ \exp(-\beta k N_{k\lambda}) - \exp[-\beta(\omega_{m\mu} + k + kN_{k\lambda})] \right\} \eta_m (1 + N_{k\lambda}),$$

причем

$$\exp[\beta \eta_m (k - \omega_{m\mu})] Z e^{k\beta/2} = \left\{ 1 - \exp(-\beta [k + (\eta_\mu - \eta_m)(k - \omega_{m\mu})]) \right\} \times \\ \times \left[ 1 + \eta_\mu \frac{1 - \exp[-\beta(\omega_{m\mu} - k)]}{e^{\beta k} - 1} + \eta_m \frac{1 - \exp[-\beta(\omega_{m\mu} - k)]}{e^{\beta k} - 1} + \eta_m (1 - \exp[-\beta(k - \omega_{m\mu})]) \right].$$

В коэффициенте при  $\eta_m$  содержатся вакуумные члены, которые исчезают из функции распределения идеальных фотонов и которые теперь будут осуществлять свой вклад во все моменты функции распределения. В частности,

$$\langle N_{k\lambda} \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} N \rho(N) = \left\{ \exp(\beta [k + (\eta_\mu - \eta_m)(k - \omega_{m\mu})]) - 1 \right\}^{-1} \times \\ \times \left[ 1 + \eta_\mu \frac{1 - \exp[-\beta(\omega_{m\mu} - k)]}{e^{\beta k} - 1} + \eta_m (1 - \exp[-\beta(k - \omega_{m\mu})]) \left( 1 + \frac{1}{e^{\beta k} - 1} \right) \right] - \\ - \frac{\eta_\mu}{e^{\beta k} - 1} \left( 1 + \frac{2}{e^{\beta k} - 1} \right) (1 - \exp[-\beta(\omega_{m\mu} - k)]) - \\ - \frac{2\eta_m}{e^{\beta k} - 1} \left( 1 + \frac{1}{e^{\beta k} - 1} \right) (1 - \exp[-\beta(k - \omega_{m\mu})]). \quad (36)$$

Мы пришли к обобщению формулы Планка в терминах длин волн. Обобщения этой формулы в терминах длин волн и в терминах частот принципиально различны [19]. «Обрастание» средних значений чисел заполнения в технике гриновских функций на основе разрыва корреляторов исследовалось в работе [20]. Результаты этой работы в наших обозначениях при  $\eta_{\mu,m} < 1$  выглядят так:

$$\langle N_{k\lambda} \rangle = \left\{ \exp(\beta [k + (\eta_\mu - \eta_m)(k - \omega_{m\mu})]) - 1 \right\}^{-1} - \frac{\eta_\mu - \eta_m}{e^{\beta k} - 1} + \frac{\eta_\mu - \eta_m}{e^{\beta \omega_{m\mu}} - 1}. \quad (37)$$

Как уже отмечалось, в технике подобного рода поправки на неидеальность зависят лишь от разности  $\eta_\mu - \eta_m$ , но не от каждой из этих величин отдельно. Учет кооперативных явлений, выражаемый формулой (36), приводит к существенному отличию результата от формулы (37). Такое отличие, как и следовало ожидать, носит неаналитический характер по заряду. При  $k/T \gg 1$  роль вынужденных процессов в формировании равновесного распределения мала. В этих условиях формулы (36) и (37) совпадают. При этом надо иметь в виду, что наличие сколь-нибудь заметных

$$\eta_m \sim \lambda^3 n_m \frac{\gamma_r \omega_{m\mu}}{(k - \omega_{m\mu})^2 + \gamma^2/4}$$

требует, чтобы  $k \rightarrow \omega_{m\mu}$ .

## 11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Фотонный кооперативный эффект, тесно связанный с вынужденным излучением атомов, проявляет себя количественно при  $\eta_{\mu,m} \sim 1$ , т.е. в условиях, близких к резонансу. Это не означает, что эффект существует лишь для частот внутри спектрального контура спонтанного излучения атомов среды. Как следует из различия формул (36) и (37), он проявляет себя и при  $|\omega_{m\mu} - k| > \gamma$ . При  $|\omega_{m\mu} - k| < \gamma$  роль этого эффекта усиливается благодаря возникновению члена  $i\gamma(n_\mu + n_m)$ . Стандартный показатель преломления среды, обращающийся в единицу, если  $n_\mu = n_m$ , такой зависимости от  $n_{\mu,m}$  иметь не может.

Проявление кооперативного эффекта в равновесных условиях со всей очевидностью влечет его проявление в кинетических явлениях. Здесь его экспериментальная проверка значительно проще, а возникновение самого эффекта следует ожидать на макроскопическом уровне. В неравновесных ситуациях приходится принимать во внимание некогерентный канал реакции, который, как отмечалось выше, не допускает исследования по теории возмущений. Когерентный и некогерентный каналы следует изучать порознь, так как из-за ортогональности волновых функций среды в конечных состояниях эти каналы между собой не интерферируют. Кроме того, в ряде ситуаций можно показать [13] положительную определенность некогерентного канала. В таких условиях изучение лишь когерентного канала дает возможность получить оценку снизу для ряда явлений. Именно таким образом в работе [13] было показано, что коэффициент отражения  $R$  резонансного излучения от термически возбужденной среды определяется характерной для кооперативного эффекта величиной  $R \propto |i\gamma(n_\mu + n_m)|^2$ . В отличие от предсказаний полуклассической теории  $R \neq 0$  при  $n_\mu = n_m$ . В стандартной технике квантовых функций Грина [1], предполагающей разрыв всех корреляторов, такой результат получен быть не может. Проявление кооперативного эффекта следует ожидать и в других оптических явлениях. Именно он, а не стандартный показатель преломления, определяет в возбужденных средах интенсивность переходного излучения назад [21] в области резонансных частот. Можно высказать предположение, что при описании всех когерентных оптических явлений в возбужденных средах в квазирезонансной области стандартным показателем преломления надо пользоваться с осторожностью. Действительно, стандартный показатель преломления алгебраически связан с поляризационным оператором  $\hat{\Pi}_{\mu\nu}$ , возникающим в технике функций Грина [1], исключаяющей кооперативные эффекты. Учет последних требует введения поляризационного оператора  $\hat{\mathcal{P}}$  в технике  $\Gamma$ -операторов. В квазирезонансной области операторы  $\hat{\Pi}_{\mu\nu}$  и  $\hat{\mathcal{P}}$  не совпадают. Более того, эти операторы генерируют при  $n_m \neq 0$  разные поляритонные спектры. Возникновение определяемого оператором  $\hat{\mathcal{P}}$  специфического дисперсионного соотношения и возникновение третьей ветви спектра ставит вопрос об их проявлениях в экспериментально осуществимых ситуациях. Дисперсионное соотношение определяет собой излучение Вавилова-Черенкова, переходное излучение вперед, явления преломления света на границе раздела сред. При  $n_m \neq 0$  в этих явлениях следует ожидать особенностей. Условиями, способствующими возникновению этих особенностей для термически возбужденных сред, оказываются  $k \rightarrow \omega_{m\mu}$  и  $n_m \rightarrow n_\mu$ .

## Литература

1. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, Москва (1962).
2. А. А. Пантелеев, В. А. Росляков, А. Н. Старостин, ЖЭТФ **97**, 1777 (1990).
3. Ю. К. Земцов, А. Ю. Сечин, А. Н. Старостин, ЖЭТФ **110**, 1654 (1996).
4. R. H. Dike, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).
5. M. J. Stephen, J. Chem. Phys. **40**, 669 (1964).
6. R. Bonifacio and P. Schwendimann, Phys. Rev. A **4**, 302, 854 (1971).
7. F. Haake and R. J. Glauber, Phys. Rev. A **5**, 1457 (1972).
8. M. S. Feld and J. C. MacGillivray, in *Topics in Current Physics*, Vol. 21, ed. by M. S. Feld and V. S. Letokhov, Springer, Berlin (1980), p. 7.
9. G. S. Agarwal and R. R. Puri, Opt. Comm. **69**, 267 (1989).
10. G. M. Palma, A. Vaglica, C. Leonardi et al., Opt. Comm. **377**, 79 (1990).
11. M. R. Wahiddin, S. S. Hassan, and R. K. Bullough, J. Mod. Opt. **42**, 171 (1995).
12. Б. А. Векленко, Изв. вузов СССР. Физика. Вып. 9, 71 (1983).
13. Б. А. Векленко, ЖЭТФ **96**, 457 (1989).
14. Б. А. Векленко, Г. Б. Ткачук, Изв. вузов. Физика. Вып. 2, 89 (1987).
15. M. J. Gagen, H. M. Viseman, and G. J. Milburn. Phys. Rev. A **48**, 132 (1993).
16. M. V. Mensky, Phys. Lett. A **219**, 137 (1996).
17. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1969).
18. Ю. А. Вдовин, В. М. Галицкий, ЖЭТФ **48**, 1352 (1965).
19. В. Л. Гинзбург, Л. П. Питаевский, УФН **151**, 333 (1987).
20. Н. Н. Боголюбов, С. В. Тябликов, ДАН СССР **126**, 53 (1956).
21. Б. А. Векленко, Изв. вузов. Физика. Вып. 11, 11 (1984).