

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ДИСПЕРСИЯ КИНЕТИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ОКРЕСТНОСТИ ПЕРЕХОДА АНДЕРСОНА

С. Г. Новохионов*, А. Г. Грошев

Физико-технический институт
Уральского отделения Российской академии наук
426001, Ижевск, Россия

Поступила в редакцию 27 января 1998 г.

Предложено обобщение теории локализации Вольхардта–Вельфле, позволяющее исследовать пространственно-временную дисперсию кинетических коэффициентов d -мерной неупорядоченной системы в низкочастотной и длинноволновой области ($\omega \ll \mathcal{E}_F$, $q \ll k_F$). Показано, что критическое поведение обобщенного коэффициента диффузии $D(q, \omega)$ в окрестности перехода Андерсона согласуется с общим критерием локализации Березинского–Горькова. А именно, на металлической стороне перехода статический коэффициент диффузии $D(q, 0)$ обращается в нуль на общем для всех q пороге подвижности λ_c : $D(q, 0) \propto t = (\lambda_c - \lambda)/\lambda_c \rightarrow 0$, где $\lambda = 1/(2\pi\mathcal{E}_F\tau)$ — безразмерная константа связи. В диэлектрической фазе также независимо от $q \neq 0$ $D(q, \omega) \propto -i\omega$ при $\omega \rightarrow 0$. В этих пределах масштаб пространственной дисперсии $D(q, \omega)$ убывает $\propto t$ в металлической и $\propto \omega\xi^2$ (ξ — длина локализации) в диэлектрической фазах до тех пор, пока не достигнет своего нижнего предела $\sim \lambda_F$. Подавление пространственной дисперсии $D(q, \omega)$ в окрестности перехода Андерсона вплоть до атомных масштабов обосновывает асимптотическую справедливость приближения Вольхардта–Вельфле $D(q, \omega) \simeq D(\omega)$ при $|t| \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow 0$. В противоположность этому масштаб пространственной дисперсии электропроводности в диэлектрической фазе имеет порядок длины локализации и расходуется $\propto |t|^{-\nu}$ при $|t| \rightarrow 0$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема перехода Андерсона [1] является одной из центральных в теории неупорядоченных систем (см. обзоры [2–6]). Успехи, достигнутые в этой области исследований, во многом связаны с развитием самосогласованной теории локализации. Первоначально предложенная Вольхардтом и Вельфле [7, 8] для низкоразмерных систем ($d \leq 2$) она в дальнейшем была распространена на системы с произвольной размерностью d [9, 10]. Эта теория использует хорошо разработанный аппарат усредненных функций Грина [11, § 39]. Самосогласованный подход Вольхардта и Вельфле опирается на привлекательную физическую идею о природе явления локализации [12] и дает удачную интерполяционную схему вычисления кинетических коэффициентов неупорядоченных систем, работающую от предела классической кинетической теории до андерсоновского диэлектрика. Основные выводы теории Вольхардта–Вельфле согласуются с результатами теоретико-полевого [13] и скейлингового [3] подходов к проблеме андерсоновской локализации. Не менее важно и то, что она допускает обобщения, направленные на учет различных механизмов рассеяния электронов, влияния внешних

*E-mail: nov@otf.fti.udmurtia.su

полей и других физических факторов (см., например, обзор [5]).

Все это делает самосогласованную теорию локализации чрезвычайно полезной с практической точки зрения. Однако она содержит ряд существенных недостатков, которые нередко вызывают сомнения в достоверности ее выводов. Подробный анализ трудностей теории Волльхардта–Вёльфле сделан в обзоре [4] (см. также [14]). Некоторые из них обсуждаются ниже, здесь же мы остановимся на проблемах, возникающих в результате игнорирования пространственной дисперсии коэффициента диффузии. Дело в том, что основное уравнение теории Волльхардта–Вёльфле устанавливает интегральную связь между локальным $D(\omega) = D(q = 0, \omega)$ и обобщенным $D(q, \omega)$ коэффициентами диффузии. Следуя [7,8], эту трудность обходят, полагая $D(q, \omega) \simeq D(\omega)$, что фактически является неконтролируемым приближением.

До недавнего времени пространственная дисперсия кинетических коэффициентов вблизи перехода Андерсона практически не исследовалась [5]. Качественные оценки q -зависимости $D(q, 0)$, сделанные на основе скейлинговых соображений [3], приводят к противоречивым выводам и фактически разрушают структуру самосогласованной теории локализации. Включение в лагранжиан σ -модели слагаемых с высшими степенями (> 2) градиентов (что соответствует учету пространственной дисперсии коэффициента диффузии) ведет к их аномальному росту при масштабных преобразованиях [15], т. е. к неустойчивости ренормгруппы. Приближения, сделанные при выводе основных уравнений теории Волльхардта–Вёльфле [7–9], также не позволяют последовательно учесть в ее рамках пространственную дисперсию кинетических коэффициентов [5].

Впервые эта проблема серьезно обсуждалась в [14], где был сделан вывод о том, что в достаточно малой окрестности перехода Андерсона пространственная дисперсия коэффициента диффузии становится несущественной на масштабах $q \propto 1/\xi$ (ξ — длина локализации), а ее наличие при $q \propto k_F$ (k_F — импульс Ферми) не влияет на критическое поведение $D(q, \omega)$, предсказываемое самосогласованной теорией локализации [9, 10]. Фактически это означает, что в критической области ($|t| \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow 0$) теория Волльхардта–Вёльфле становится асимптотически точной. Симметричный анализ перехода Андерсона [14] обладает большой общностью, однако получаемые в его рамках количественные результаты относительно поведения $D(q, \omega)$ в критической области справедливы лишь асимптотически при $\omega \rightarrow 0$.

Недавно нами было предложено обобщение самосогласованной теории локализации [16], позволяющее последовательным образом учесть пространственно-временную дисперсию коэффициента диффузии носителей заряда двумерной неупорядоченной системы при конечных значениях частоты и волнового числа в области $\omega \ll \mathcal{E}_F$, $q \ll k_F$ (\mathcal{E}_F — энергия Ферми). Результаты этой работы подтверждают на микроскопическом уровне основные выводы, полученные в [14] до некоторой степени феноменологическим образом. В частности, показано, что благодаря подавлению пространственной дисперсии $D(q, \omega)$ в режиме локализации подстановка Волльхардта–Вёльфле $D(q, \omega) \simeq D(\omega)$ становится справедливой, но лишь в области $\omega\tau \ll (l/\xi)^2(\lambda_F/l)^{1/3} \ll 1$ ($l = v_F\tau$ — длина свободного пробега). Таким образом, для корректных расчетов $D(\omega)$ в широком диапазоне частот необходим последовательный учет q -зависимости обобщенного коэффициента диффузии. В качестве одного из возможных методов решения этой задачи мы предлагаем обобщение на неупорядоченные системы с произвольной размерностью d подхода, развитого в [16] для случая $d = 2$.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим d -мерный вырожденный идеальный газ бесспиновых электронов, испытывающих упругое рассеяние на неподвижных примесях с концентрацией n_I , распределенных в образце по закону Пуассона. Одноэлектронный гамильтониан задачи имеет вид

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \sum_{\mathbf{R}} U(\mathbf{r} - \mathbf{R}). \quad (1)$$

Здесь $U(\mathbf{r} - \mathbf{R})$ — потенциал изолированной примеси, локализованной в точке \mathbf{R} . Ниже он предполагается короткодействующим и аппроксимируется δ -образным потенциалом $U(\mathbf{r}) = U_0 \delta(\mathbf{r})$. Это является хорошим приближением при выполнении условия $r_0 \ll \lambda_F, l$, где r_0 — радиус действия потенциала $U(\mathbf{r})$, λ_F — длина волны де Бройля, l — длина свободного пробега электрона на уровне Ферми. Кроме того, мы предполагаем, что рассеяние электрона на изолированной примеси является слабым и для вычисления его амплитуды достаточно первого борновского приближения.

Рассматриваемая система в среднем пространственно однородна, поэтому усредненная одноэлектронная функция Грина диагональна в импульсном представлении:

$$\langle\langle \mathbf{p} | R^\pm(\mathcal{E}) | \mathbf{p}' \rangle\rangle_I = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} G_{\mathbf{p}}^\pm(\mathcal{E}) = \frac{\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}}{\mathcal{E} - \mathcal{E}_{\mathbf{p}} - \Sigma_{\mathbf{p}}^\pm(\mathcal{E})}. \quad (2)$$

Здесь $R^\pm(\mathcal{E}) = (\mathcal{E} - H \pm i\delta)^{-1}$ ($\delta \rightarrow +0$) — резольвента гамильтониана (1), скобки $\langle \dots \rangle_I$ обозначают усреднение по распределению примесей, $\Sigma_{\mathbf{p}}^\pm(\mathcal{E})$ — электронная собственнo-энергетическая часть, определяющая возмущение одночастичных уровней $\mathcal{E}_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2/2m$ в случайном поле примесей.

Информацию о кинетических свойствах системы в низкочастотном и длинноволновом пределах ($\omega \ll \mathcal{E}_F, q \ll k_F$) содержит двухчастичная функция Грина

$$\varphi_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(\mathbf{q}, \omega) = \langle\langle \mathbf{p}_+ | R^+(\mathcal{E}^+) | \mathbf{p}'_+ \rangle \langle \mathbf{p}'_- | R^-(\mathcal{E}^-) | \mathbf{p}_- \rangle \rangle_I \quad (3)$$

($\mathbf{p}_\pm = \mathbf{p} \pm \mathbf{q}/2, \mathcal{E}^\pm = \mathcal{E} \pm \omega/2$), связанная простыми соотношениями с корреляционными функциями типа плотность–плотность (диффузионный пропагатор) и плотность–ток:

$$P(q, \omega) = \frac{1}{2\pi n_F} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \varphi_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{-i\omega + q^2 D(q, \omega)}, \quad (4)$$

$$P_j(q, \omega) = \frac{1}{2\pi n_F} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \frac{\hat{\mathbf{q}}\mathbf{p}}{m} \varphi_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(\mathbf{q}, \omega), \quad \hat{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{q}}{q},$$

где n_F — плотность состояний на уровне Ферми, $D(q, \omega)$ — обобщенный коэффициент диффузии. Корреляционные функции (4) удовлетворяют уравнению непрерывности

$$\omega P(q, \omega) - q P_j(q, \omega) = i + O\left(\frac{\omega}{\mathcal{E}_F}\right), \quad (5)$$

которое представляет собой одну из математических формулировок закона сохранения числа частиц.

Используя уравнения (4), (5), нетрудно получить следующее определение обобщенного коэффициента диффузии:

$$D(q, \omega) = \frac{i}{q} \frac{P_j(q, \omega)}{P(q, \omega)}, \quad (6)$$

связанного с электропроводностью $\sigma(q, \omega)$ следующим соотношением [17]:

$$\sigma(q, \omega) = e^2 n_F \frac{D(q, \omega)}{1 - (q^2/i\omega)D(q, \omega)}. \quad (7)$$

Его отличие от обычного соотношения Эйнштейна $\sigma(\omega) = e^2 n_F D(\omega)$ обусловлено тем, что в случае пространственно-неоднородного неравновесного состояния полный продольный ток, определяемый обобщенным законом Ома $j(q, \omega) = \sigma(q, \omega)E(q, \omega)$, является суммой дрейфового и диффузионного токов $j = j^{drift} + j^{diff}$. Действительно, продольное электрическое поле $E(q, \omega)$ наряду с дрейфовым током возбуждает в системе отличный от нуля градиент концентрации заряженных частиц и, как следствие, ток диффузионной природы $j^{diff} = (q^2/i\omega)D(q, \omega)j$.

С помощью соотношения

$$\Delta G_p(\mathbf{q}, \omega) \Phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega) = \sum_{p'} \varphi_{pp'}(\mathbf{q}, \omega) \quad (8)$$

определим функцию релаксации плотности $\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega)$, удовлетворяющую уравнению переноса

$$\left[\omega - \frac{\mathbf{q}\mathbf{p}}{m} + \Delta \Sigma_p(\mathbf{q}, \omega) \right] \Phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega) - \sum_{p'} U_{pp'}(\mathbf{q}, \omega) \Delta G_{p'}(\mathbf{q}, \omega) \Phi(p', \mathbf{q}, \omega) = 1, \quad (9)$$

которое нетрудно получить из уравнения Бете–Солпитера [7–9] для $\varphi_{pp'}(\mathbf{q}, \omega)$ (3). Здесь введены следующие обозначения:

$$\Delta G_p(\mathbf{q}, \omega) = G_{p_-}^-(\mathcal{E}^-) - G_{p_+}^+(\mathcal{E}^+), \quad \Delta \Sigma_p(\mathbf{q}, \omega) = \Sigma_{p_-}^-(\mathcal{E}^-) - \Sigma_{p_+}^+(\mathcal{E}^+). \quad (10)$$

Собственно-энергетическая часть $\Sigma_p^\pm(\mathcal{E})$ и ядро интегрального уравнения (9) $U_{pp'}(\mathbf{q}, \omega)$ (неприводимая вершина) связаны тождеством Уорда [7–9]

$$\Delta \Sigma_p(\mathbf{q}, \omega) = \sum_{p'} U_{pp'}(\mathbf{q}, \omega) \Delta G_{p'}(\mathbf{q}, \omega). \quad (11)$$

Это соотношение играет важную роль в дальнейших вычислениях. В частности, благодаря ему уравнение переноса (9) удовлетворяет закону сохранения числа частиц. Действительно, умножив (9) на $\Delta G_p(\mathbf{q}, \omega)$, просуммируем его по \mathbf{p} , учитывая тождество Уорда (11) и свойство симметрии неприводимой вершины $U_{pp'}(\mathbf{q}, \omega) = U_{p'p}(\mathbf{q}, \omega)$. В результате получим уравнение непрерывности (5), связывающее корреляционные функции (4).

В приближении самосогласованной теории локализации [7–9] неприводимая вершина $U_{pp'}(\mathbf{q}, \omega)$ имеет следующий вид:

$$U_{pp'}(\mathbf{q}, \omega) = W + \frac{W}{\tau_0} \frac{1}{-i\omega + (\mathbf{p} + \mathbf{p}')^2 D(|\mathbf{p} + \mathbf{p}'|, \omega)}, \quad (12)$$

где $W = n_I U_0^2$, $\tau_0 = 1/(2\pi n_F W)$ — затравочное время релаксации (время жизни) электрона на уровне Ферми, $D(q, \omega)$ — точный, зависящий от волнового числа и частоты коэффициент диффузии. Диффузионный полюс во втором слагаемом (12) ведет к расходимости вероятности упругого ($\omega \rightarrow 0$) рассеяния назад ($\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}'$), что является физической причиной локализации носителей заряда в неупорядоченных системах [12]. Как показано в [14], сингулярная структура (12) является следствием симметрии рассматриваемой системы относительно обращения времени, и точное выражение для $U_{pp'}(\mathbf{q}, \omega)$ может отличаться от (12) лишь плавно зависящими от \mathbf{p} , \mathbf{p}' и \mathbf{q} факторами в первом и втором слагаемых. Однако учет этих множителей не меняет критического поведения коэффициента диффузии вблизи перехода Андерсона [14], поэтому ниже мы будем пользоваться приближением (12).

Наличие диффузионного полюса типа (12) в неприводимой вершине $U_{pp'}(\mathbf{q}, \omega)$ должно, на первый взгляд, привести к расходимости в правой части тождества Уорда (11): $\Delta\Sigma_p(\mathbf{q}, \omega) \propto 1/\omega$ в диэлектрической фазе или $\Delta\Sigma_p(\mathbf{q}, 0) \propto 1/|t|$ в статическом режиме вблизи порога подвижности λ_c на металлической стороне перехода. Это противоречит общепринятой точке зрения, согласно которой усредненная одночастичная функция Грина, как функция энергии \mathcal{E} и частоты ω сохраняет свои аналитические свойства при переходе металл–диэлектрик [2]. Этот парадокс был разрешен в работе [14], где показано, что в правой части тождества Уорда (11) происходит сокращение расходимостей типа $1/\omega$ или $1/|t|$ вследствие приближенной (с точностью до слагаемых соответственно $O(\omega)$ и $O(|t|)$) ортогональности сингулярной части $U_{pp'}(q, \omega)$ к $\Delta G_p(\mathbf{q}, \omega)$. Приближение Волльхардта–Вёльфле (12) этому условию не удовлетворяет и, следовательно, нарушает тождество Уорда (11). Возникающие в связи с этим трудности подробно анализируются в обзоре [4]. С учетом сказанного тождество Уорда (11) в дальнейшем используется как формальное соотношение, связывающее между собой одно- и двухчастичные характеристики рассматриваемой системы, а электронная собственно-энергетическая часть $\Sigma_p^\pm(\mathcal{E})$ а priori предполагается аналитической функцией своих аргументов. При таком подходе время жизни $\tau = 1/(2 \text{Im} \Sigma_p^-(\mathcal{E}))$ следует рассматривать как параметр теории, вообще говоря, отличающийся от затравочного τ_0 . Однако, следуя сложившейся традиции [5, 9, 10], мы будем отождествлять τ и τ_0 , поскольку это качественно не изменяет получаемых ниже результатов.

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Рассматриваемая система в среднем изотропна, следовательно, функция релаксации $\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega)$ (8) зависит от модулей своих векторных аргументов $p = |\mathbf{p}|$, $q = |\mathbf{q}|$ и угла между ними $\theta = \mathbf{p}\mathbf{q}$. Поэтому ее удобно представить в виде разложения в ряд по полиномам Гегенбауэра [18, § 10.9]

$$\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_0}{A_n} \Phi_n(p, q, \omega) C_n^{(d-2)/2}(\cos \theta),$$

$$\Phi_n(p, q, \omega) = \frac{1}{A_0} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{(d-3)/2} C_n^{(d-2)/2}(x) \Phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega) dx, \quad x = \cos \theta, \quad (13)$$

где A_n — нормировочный коэффициент. Система полиномов Гегенбауэра служит естественным ортогональным базисом для разложения функций, зависящих от полярного угла θ ($x = \cos \theta$) в d -мерной сферической системе координат. При $d = 3$ выражение (13) совпадает с используемым в трехмерном пространстве разложением по полиномам Лежандра $P_n(x)$, а при $d \rightarrow 2$ оно переходит в разложение функции релаксации в ряд Фурье по $\cos(n\theta)$ [16]¹⁾

В определении (8) явно выделена δ -образная особенность двухчастичной функции Грина (3) при $p \simeq k_F$ ($q \ll k_F$). Поэтому коэффициенты разложения (13) представляют собой функции, достаточно слабо зависящие от p в интервале $|p - k_F| < 1/l$. Это позволяет приближенно перейти от интегрального уравнения переноса (9) к системе линейных алгебраических уравнений относительно $\Phi_n = \Phi_n(k_F, q, \omega)$. Для этого умножим (9) на $C_n^{(d-2)/2}(x)\Delta G_p(\mathbf{q}, \omega)/(2\pi n_F)$ и после подстановки вместо $\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega)$ ее разложения (13) просуммируем результат по \mathbf{p} , учитывая рекуррентные соотношения для полиномов Гегенбауэра. Воспользовавшись δ -образным свойством множителя $\Delta G_p(\mathbf{q}, \omega)$, вынесем из под знаков сумм все плавно зависящие от p функции. В результате получим следующую систему уравнений для коэффициентов ряда (13) ($n \geq 1$):

$$\omega \Phi_0 - \frac{1}{d-2} \frac{qk_F}{m} \Phi_1 = 1, \tag{14}$$

$$\left(\omega + \frac{i}{\tau}\right) \Phi_n - \frac{qk_F}{m} \left[\frac{n+d-3}{2n+d-2} \Phi_{n-1} + \frac{n+1}{2n+d-2} \Phi_{n+1} \right] + \sum_{n'=1}^{\infty} M_{nn'}(q, \omega) \Phi_{n'} = 0.$$

Все регулярные при $\omega \rightarrow 0$, $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{0}$ коэффициенты этой системы вычислены в нулевом порядке по параметрам малости q/k_F и ω/\mathcal{E}_F , например, $\Delta \Sigma_p(\mathbf{q}, \omega) \simeq \Delta \Sigma_p(\mathbf{0}, 0) = i/\tau$. Элементы матрицы функций памяти $M_{nn'}(q, \omega)$ имеют вид

$$M_{nn'}(q, \omega) = -\frac{1}{2\pi i n_F} \frac{A_0}{A_{n'}} \sum_{pp'} C_n^{(d-2)/2}(x) \Delta G_p(\mathbf{q}, \omega) U_{pp'}(\mathbf{q}, \omega) \Delta G_{p'}(\mathbf{q}, \omega) C_{n'}^{(d-2)/2}(x'), \tag{15}$$

где $x = \cos(\widehat{pq})$, $x' = \cos(\widehat{p'q})$.

При выводе системы уравнений (14), (15) учтено, что вследствие тождества Уорда (11) $M_{0n}(q, \omega)$ и $M_{n0}(q, \omega)$ ($n \geq 0$) сокращаются с соответствующими матричными элементами $\Delta \Sigma_p(\mathbf{q}, \omega)$. В частности, благодаря этому первое из уравнений (14) эквивалентно уравнению непрерывности (5). Соответственно, первые два коэффициента из последовательности $\{\Phi_n(k_F, q, \omega)\}$ с точностью до слагаемых $O(q/k_F)$ совпадают с корреляционными функциями (4), а именно

$$\Phi_0(k_F, q, \omega) \simeq -iP(q, \omega), \quad \Phi_1(k_F, q, \omega) \simeq -i \frac{m}{k_F} (d-2)P_j(q, \omega). \tag{16}$$

Учитывая явный вид полинома Гегенбауэра $C_1^{(d-2)/2}(x) = (d-2)x$, а также равенство $A_0/A_1 = d/(d-2)^2$, нетрудно проверить, что $M_{11}(q, \omega)$ (15) совпадает с известным

¹⁾ Начиная с этого момента размерность пространства d формально может рассматриваться как непрерывно меняющийся вещественный параметр. Область его значений ограничивается неравенством $d > 1$, которое вытекает из условия интегрируемости весовой функции $w(x) = (1-x^2)^{(d-3)/2}$ системы полиномов Гегенбауэра (см. [18, § 10.9]).

выражением для ядра релаксации тока [7–9]. Поэтому, ограничиваясь в разложении (13) двумя первыми слагаемыми ($n = 0, 1$) и учитывая соотношения (16), мы получим из (14), (15) замкнутую систему уравнений теории Вольхардта–Вельфле [7–9]. Как показано в [16], такое приближение позволяет вычислять кинетические коэффициенты лишь без учета их пространственной дисперсии. В противном случае необходимо решать бесконечную систему уравнений (14). Это можно сделать в длинноволновом пределе, поскольку при $q \ll k_F$ для матрицы функций памяти (15) достаточно ограничиться линейным по q/k_F приближением, в котором она трехдиагональна:

$$M_{nn'}(q, \omega) = -\frac{(-1)^n}{\tau} \left\{ i\Delta_n(\omega)\delta_{nn'} + ql \left[\frac{n+d-3}{2n+d-2} \Lambda_{n-1}(\omega)\delta_{nn'+1} - \frac{n+1}{2n+d-2} \Lambda_n(\omega)\delta_{nn'-1} \right] \right\}. \quad (17)$$

Приближенное вычисление коэффициентов $\Delta_n(\omega)$ и $\Lambda_n(\omega)$ в области низких частот, $\omega \ll \mathcal{E}_F$, и больших длин волн, $q \ll k_F$, можно найти в Приложении.

В отличие от регулярных коэффициентов системы уравнений (14), вычисляемых в нулевом порядке по малым параметрам ω/\mathcal{E}_F и q/k_F , здесь учитываются недиагональные элементы $M_{n,n\pm 1} \propto q/k_F$. Дело в том, что при $\omega \rightarrow 0$ в диэлектрической фазе или при $|t| \rightarrow 0$ на металлической стороне перехода Андерсона в статическом режиме сингулярные части $M_{n,n\pm 1}$ растут и в соответствующих пределах начинают преобладать над слагаемыми в квадратных скобках второго уравнения системы (14). Сингулярности, обусловленные диффузионным полюсом (12), присутствуют и в остальных элементах матрицы функций памяти. Тем не менее в длинноволновом пределе главную роль играет именно выделенная в (17) ее трехдиагональная часть. Действительно, продолжая разложение (15) по степеням q/k_F , можно убедиться в справедливости следующей оценки:

$$\left| \frac{M_{n,n\pm k}(q, \omega)}{M_{n,n\pm 1}(q, \omega)} \right| \propto \left(\frac{q}{k_F} \right)^{k-1} \ll 1. \quad (18)$$

После подстановки (17) в (14) бесконечная система уравнений относительно коэффициентов Φ_n становится трехдиагональной. Ее формально точное решение можно получить, используя аппарат бесконечных цепных дробей [19]. В действительности нам достаточно найти отношение коэффициентов Φ_1/Φ_0 , через которое с помощью уравнений (6) и (16) выражается обобщенный коэффициент диффузии. Для этого, вводя обозначение $Y_n = \Phi_{n+1}/\Phi_n$, перепишем второе уравнение системы (14) в виде

$$Y_{n-1} = -\frac{iq l [1 - (-1)^{n-1} \Lambda_{n-1}(\omega)](n+d-3)/(2n+d-2)}{1 - i\omega\tau - (-1)^n \Delta_n(\omega) + iq l [1 - (-1)^n \Lambda_n(\omega)] Y_n (n+1)/(2n+d-2)}. \quad (19)$$

Это соотношение задает рекуррентный процесс, позволяющий представить $D(q, \omega) \propto Y_0$ в виде

$$D(q, \omega) = \frac{D_0}{1 - i\omega\tau + \Delta_1(\omega)} K(q, \omega), \quad (20)$$

где $D_0 = v_F^2 \tau / d$ — классический коэффициент диффузии d -мерной системы. Пространственная дисперсия обобщенного коэффициента диффузии $D(q, \omega)$ (20) полно-

стью определяется бесконечной цепной дробью

$$K(q, \omega) = \frac{1}{1 + \frac{R_1^2(\omega)q^2}{1 + \frac{R_2^2(\omega)q^2}{1 + \dots}}}, \quad (21)$$

$$R_n^2(\omega) = \frac{(n+1)(n+d-2)}{(2n+d-2)(2n+d)} \frac{l^2 [1 - (-1)^n \Lambda_n(\omega)]^2}{[1 - i\omega\tau - (-1)^n \Delta_n(\omega)][1 - i\omega\tau - (-1)^{n+1} \Delta_{n+1}(\omega)]}$$

Обратим внимание на то, что при $d = 1$ имеем $K(q, \omega) \equiv 1$, т.е. в рассматриваемом здесь приближении q -зависимость коэффициента диффузии одномерной неупорядоченной системы существенна лишь на атомных масштабах ($q\lambda_F \simeq 1$)². Согласно этому замечанию нелокальность коэффициента диффузии на больших масштабах ($q\lambda_F \ll 1$) может проявляться только в системах с размерностью $d > 1$. В этом случае область справедливости уравнений (20), (21) ограничивается условием сходимости цепной дроби $K(q, \omega)$. Согласно признаку Ворпицкого [19, с.107] она стремится к конечному пределу, если для всех $n > n_0 \geq 1$ выполняется условие $q|R_n(\omega)| \leq 1/2$. Поскольку при $n \rightarrow \infty$ сингулярные коэффициенты $|\Delta_n(\omega)| \rightarrow 0$, $|\Lambda_n(\omega)| \rightarrow 0$, оно эквивалентно неравенству $ql/|1 - i\omega\tau| < 1$.

4. КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ПЕРЕХОДА АНДЕРСОНА

Бесконечная цепная дробь (20), (21), коэффициенты которой определяются соотношениями (П.1), (П.3), представляет собой нелинейное интегральное уравнение относительно $D(q, \omega)$. Подстановка (П.4) вместо (П.3) дает первую итерацию обобщенного коэффициента диффузии с $\tilde{D}(\omega) = D((i\omega/\tilde{D})^{1/2}, \omega)$ в качестве начального условия. Эта вспомогательная величина удовлетворяет самосогласованному уравнению, которое получается из (20), если в его правой части положить $q^2 = i\omega/\tilde{D}$. В интересующей нас критической области ($\omega \rightarrow 0$, $|t| \rightarrow 0$) $\tilde{K}(\omega) = K((i\omega/\tilde{D})^{1/2}, \omega) \simeq 1$, поэтому

$$\tilde{D}(\omega) = \frac{D_0}{1 + \Delta_1(\omega)}. \quad (22)$$

Таким образом, поведение $\tilde{D}(\omega)$ и, следовательно, $D(q, \omega)$ вблизи перехода Андерсона определяется одним параметром $\Delta_1(\omega)$ (П.7), пропорциональным ядру релаксации тока [7-9]. Для наших целей достаточно использовать его низкочастотную асимптотику:

$$\Delta_1(\omega) = \frac{D_0}{\tilde{D}(\omega)} \left[f_d(\lambda) + \frac{2d}{d-2} \lambda^{d-1} (K_d y - C_d y^{(d-2)/2}) \right], \quad |y| \ll 1, \quad (23)$$

где

$$y = -4d i\omega\tau \frac{D_0}{\tilde{D}(\omega)}, \quad C_d = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{d-2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right), \quad K_d = \frac{C_d}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5-d}{2}\right).$$

² Вследствие волнового характера квантовомеханических законов движения λ_F является нижней границей для радиуса нелокальности, определяющего пространственную дисперсию кинетических коэффициентов.

В общем случае для вычисления первого слагаемого в (23) необходимо численное интегрирование (П.1) с (П.4) при $\omega = 0$. Лишь в системах с близкой к $d = 2$ размерностью порог подвижности, определяемый из уравнения $f_d(\lambda) = 1$, удовлетворяет условию слабой связи ($\lambda_c \ll 1$). В этой области значений λ и d для $f_d(\lambda)$ справедлива простая аналитическая аппроксимация:

$$f_d(\lambda) = \frac{4}{\pi} \frac{d}{d-2} \left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)^{d-1}, \quad \lambda \ll 1, \quad d \rightarrow 2+. \quad (24)$$

Вычисленное с помощью (22) и (24) значение порога подвижности

$$\lambda_c = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} \frac{d-2}{d}\right)^{1/(d-1)}, \quad d \rightarrow 2+ \quad (25)$$

отличается от известного результата Вольхардта и Вёльфле (см. уравнение (38) в [9]) несущественным множителем $2^{(d-3)/(d-1)}$. Зависимость λ_c от размерности пространства d , полученная численным решением уравнения $f_d(\lambda_c) = 1$, количественно согласуется с (25) во всей области $2 < d < 4$ (относительное отклонение составляет не более 15–20%), а при $d \rightarrow 2$ стремится к (25) асимптотически. Такое соответствие можно считать вполне удовлетворительным. Для анализа критического поведения кинетических коэффициентов достаточно разложить $f_d(\lambda)$ в ряд Тейлора в окрестности λ_c и ограничиться линейным по $t = (\lambda_c - \lambda)/\lambda_c$ приближением. Это приводит к хорошо известным [6, 9, 10] асимптотикам:

$$\frac{\tilde{D}(\omega)}{D_0} \propto \begin{cases} (-i\omega\tau)^{1/(1+2\nu)} & \omega \gg \omega_c \text{ (металл-диэлектрик)}, \\ t & \omega \ll \omega_c, t > 0 \text{ (металл)}, \\ -i\omega\xi^2 & \omega \ll \omega_c, t < 0 \text{ (диэлектрик)}, \end{cases} \quad (26)$$

где $\omega_c\tau = |t|^{1+2\nu}$, ν — критический индекс длины локализации $\xi \propto |t|^{-\nu}$, $\nu = 1/(d-2)$ при $2 < d < 4$ и $\nu = 1/2$ при $d > 4$. Подробный анализ критического поведения коэффициента диффузии $D(\omega)$ можно найти в [9] (см. также обзоры [4–6]).

Перейдем к обсуждению пространственной дисперсии кинетических коэффициентов в критической области. Для этого аппроксимируем цепную дробь $K(q, \omega)$ (21), обрывая ее на первом этаже. В результате получим следующее выражение для обобщенного коэффициента диффузии:

$$D(q, \omega) = \frac{\tilde{D}(\omega)}{1 + R_1^2(\omega)q^2}, \quad (27)$$

справедливое при $|R_1(\omega)q| \ll 1$, где $R_1(\omega)$ — радиус нелокальности, задающий масштаб пространственной дисперсии $D(q, \omega)$, определен в (21). Критическое поведение обобщенного коэффициента диффузии (27) определяется не зависящим от q параметром $\tilde{D}(\omega)$ (26). Поэтому одновременно при всех q $\lim_{\omega \rightarrow 0} D(q, \omega) = 0$ в диэлектрической фазе и $\lim_{t \rightarrow 0} D(q, 0) = 0$ в металлической. Этот результат, впервые полученный в [14] на основе симметричного подхода к проблеме перехода Андерсона, согласуется с критерием локализации Березинского–Горькова [20].

Рассмотрим изменение радиуса нелокальности $R_1(\omega)$ обобщенного коэффициента диффузии при переходе от классического проводника к андерсоновскому диэлектрику.

Вдали от перехода Андерсона в металлической фазе $|\Delta_1(\omega)| \simeq |\Delta_2(\omega)| \ll 1$, $|\Lambda_1(\omega)| \ll 1$ и, следовательно, $R_1(\omega) \propto l \gg \lambda_F$ имеет порядок длины свободного пробега или длины диффузии $l_D = \sqrt{D_0\tau} = l/\sqrt{d}$.

Поведение радиуса нелокальности $D(q, \omega)$ в окрестности перехода Андерсона зависит от соотношения между сингулярными параметрами $\Delta_n(\omega)$ и $\Lambda_n(\omega)$. В критической области ($|t| \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow 0$) $\Delta_1(\omega) \simeq \Delta_2(\omega) \simeq D_0/\bar{D}(\omega)$ ($|D_0/\bar{D}(\omega)| \gg 1$), что должно вести к подавлению пространственной дисперсии $D(q, \omega)$ в соответствующих пределах до тех пор, пока одновременно $|R_1(\omega)| \gg \lambda_F$ и $|\Lambda_1(\omega)| \ll 1$. Непосредственно из (21) и оценки (см. (П.8)) $|\Lambda_1(\omega)| \propto \lambda^k |D_0/\bar{D}(\omega)|$ ($k = 3$ при $d = 3$, $k = 4$ при $d = 2$ и $d = 4$) следует, что оба этих неравенства выполняются лишь при достаточно слабом беспорядке, когда $\lambda \ll |\bar{D}(\omega)/D_0| \ll 1$. В этом случае справедлива асимптотика, полученная в [16] для двумерной неупорядоченной системы,

$$R_1^2(\omega) = -\frac{2(d-1)}{d(d+2)} l^2 \left(\frac{\bar{D}(\omega)}{D_0} \right)^2. \quad (28)$$

Согласно (28) и (26), в скейлинговом режиме ($\omega \gg \omega_c$) нелокальность обобщенного коэффициента диффузии одинакова в металлической и диэлектрической фазах. При переходе в критическую область ($\omega \ll \omega_c$, $|t| \rightarrow 0$) одновременно с подавлением пространственной дисперсии $D(q, \omega)$ происходит качественное изменение ее характера в металлической фазе ($R_1^2(\omega) < 0$) по сравнению с диэлектрической ($R_1^2(\omega) > 0$). Но во всех случаях масштаб q -зависимости обобщенного коэффициента диффузии (28) в соответствии с предложенной в [16] физической интерпретацией определяется перенормированной длиной диффузии $l_D(\omega) \propto l|\bar{D}(\omega)/D_0|$.

В трехмерной системе константа связи на пороге подвижности (25) равна $\lambda_c \approx 0.32$, что соответствует значению $l \approx 0.16\lambda_F$. При такой степени беспорядка радиус нелокальности $R_1(\omega)$, определяемый уравнениями (28), (26), по абсолютной величине становится заведомо меньше λ_F . Как отмечалось в конце предыдущего параграфа, в этих условиях масштаб пространственной дисперсии обобщенного коэффициента диффузии достигает своего нижнего предельного значения $|R_1(\omega)| \propto \lambda_F$, определяемого волновым характером квантовомеханических законов движения. То есть окрестность перехода Андерсона оказывается за пределами области справедливости асимптотик (28), (26). Тем не менее предсказываемые ими аномалии пространственной дисперсии $D(q, \omega)$ могут наблюдаться в сильно анизотропных (квазидвумерных) неупорядоченных системах, в которых порог подвижности находится в области слабого беспорядка $\lambda_c \ll 1$ [21].

В отличие от $D(q, \omega)$ электропроводность $\sigma(q, \omega)$ (7) и связанная с ней продольная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(q, \omega) = 1 + 4\pi i\sigma(q, \omega)/\omega$ обнаруживают гораздо более сильные аномалии пространственной дисперсии, обусловленные наличием в (7) диффузионного полюса. Действительно, после подстановки (27) в (7) нетрудно убедиться в том, что в окрестности перехода Андерсона $|R_1(\omega)|^2 \ll |\bar{D}(\omega)/i\omega|$ и, следовательно,

$$\varepsilon(q, \omega) = 1 + \frac{q_{FT}^2 \bar{D}(\omega)}{-i\omega + q^2 \bar{D}(\omega)}, \quad (29)$$

где $q_{FT}^{-1} = (4\pi e^2 n_F)^{-1/2}$ — радиус экранирования Ферми–Томаса.

Выражение (29) обычно используется в качестве исходного [22] при анализе диэлектрических и оптических свойств неупорядоченных систем. Полученные выше результаты показывают, что независимо от соотношения между ω и $q^2|\bar{D}(\omega)|$ оно справедливо,

благодаря подавлению пространственной дисперсии обобщенного коэффициента диффузии в условиях андерсоновской локализации. Подстановка (26) в (29) дает известные асимптотики для диэлектрической проницаемости [4, 22]. В частности, в критической области ($\omega \ll \omega_c$, $|t| \rightarrow 0$) на диэлектрической стороне перехода

$$\varepsilon(q, \omega) = 1 + \frac{q_{FT}^2(\xi^2 + iD^{hop}/\omega)}{1 + (\xi^2 + iD^{hop}/\omega)q^2}, \quad (30)$$

где D^{hop} — прыжковый коэффициент диффузии. В пределе $\omega \rightarrow 0$ (30) стремится к $\varepsilon(q, 0) = 1 + q_{FT}^2/q^2$, т. е. в андерсоновском диэлектрике статическое электрическое поле экранируется, как в обычном металле [4].

При конечных частотах в достаточно малой окрестности перехода Андерсона $\omega\xi^2 \gg \gg |D^{hop}|$ и вкладом прыжкового переноса в (30) можно пренебречь. В этом случае экранирование электрических полей имеет место лишь на расстояниях, малых по сравнению с длиной локализации, т. е. при $q\xi \gg 1$ (что эквивалентно $\omega \ll q^2|\tilde{D}(\omega)|$). В противоположном пределе, $q\xi \ll 1$ ($\omega \gg q^2|\tilde{D}(\omega)|$), (30) стремится к $\varepsilon(0, 0) = 1 + q_{FT}^2\xi^2$ — статической диэлектрической проницаемости газа нейтральных атомов с концентрацией e^2n_F/ξ и поляризуемостью ξ^3 . Другими словами, длинноволновое низкочастотное ($q\xi \ll 1$, $\omega \ll \omega_c$) внешнее поле E^{ext} индуцирует в андерсоновском диэлектрике поле $E = E^{ext}/\varepsilon(0, 0)$, которое с приближением к порогу подвижности убывает $\propto 1/\varepsilon(0, 0) \propto |t|^{2\nu}$ до тех пор, пока не достигнет минимального значения $\sim (q/q_{FT})^2 E^{ext}$. Связанные с этой аномалией гигантские значения $\varepsilon(0, 0)$ на диэлектрической стороне перехода металл–диэлектрик наблюдались, например, в Si:P [23].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в рамках самосогласованной теории локализации оказывается возможным последовательный учет пространственной дисперсии кинетических коэффициентов. Это имеет принципиальное значение, поскольку полное игнорирование нелокальности коэффициента диффузии в уравнении самосогласования (20) является неконтролируемым приближением. Вследствие этого теория Вольхардта–Вельфле [7–9], строго говоря, справедлива лишь асимптотически при $\omega \rightarrow 0$ [14]. Полученные в данной работе результаты открывают возможность количественного анализа частотной зависимости кинетических коэффициентов в окрестности перехода Андерсона при конечных частотах, удовлетворяющих условию $\omega \ll \mathcal{E}_F$. Эта проблема возникает, например, при учете межэлектронного взаимодействия в рамках самосогласованной теории локализации [5, 24, 25].

Характер пространственной дисперсии $D(q, \omega)$ в условиях андерсоновской локализации существенно зависит от размерности d неупорядоченной системы. При $d = 3$ порог подвижности находится в области сильной связи ($\lambda_c \approx 0.32$) и определяемый соотношением (28) радиус нелокальности $R_1(\omega) < \lambda_F$. Другими словами, в окрестности перехода Андерсона в широком диапазоне частот нелокальность коэффициента диффузии трехмерной системы существенна лишь на атомных масштабах. Следовательно, пренебрежение пространственной дисперсией в уравнении самосогласования [25] является обоснованным. Иначе обстоит дело в низкоразмерных системах, в которых условия локализации выполняются в области слабой связи ($\lambda \ll 1$). Как показано в [16], при

$d = 2$ пространственной дисперсией $D(q, \omega)$ в уравнении самосогласования можно пренебречь лишь в пределе низких частот $\omega\tau \ll (l/\xi)^2 \lambda^{1/3} \ll 1$. В противном случае для вычисления $D(q = 0, \omega) = D(\omega)$ необходимо численное решение интегрального по q уравнения типа (20).

В заключение авторы благодарят А. К. Аржникова за стимулирующие дискуссии, М. В. Садовского и Э. З. Кучинского за ряд полезных замечаний, сделанных при обсуждении результатов данной работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычисление элементов матрицы функций памяти

Вклад первого слагаемого (12) в матричный элемент $M_{nn'}(q, \omega)$ (15) несингулярен и имеет порядок $O((q/k_F)^{n+n'})$ ($n, n' \geq 1$), поэтому им можно пренебречь. Для вычисления сингулярной части матрицы функций памяти разложим второе слагаемое (12) в ряд типа (13) по полиномам Гегенбауэра, зависящим от $\cos \gamma$, где $\gamma = \widehat{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ — угол рассеяния. Выберем в d -мерной сферической системе координат полярную ось параллельной вектору \mathbf{q} . Тогда $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \cos \rho \sin \theta \sin \theta'$, где ρ — угол между плоскостями, проходящими через пары векторов \mathbf{p}, \mathbf{q} и \mathbf{p}', \mathbf{q} , соответственно, $\theta = \widehat{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ и $\theta' = \widehat{\mathbf{p}'\mathbf{q}}$. Воспользовавшись теоремой сложения [26, § 16.3, (20)], после несложных преобразований получим

$$M_{nn'}(q, \omega) = -\frac{i}{\pi(d-2)\tau_0^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l!}{\Gamma(l+d-2)} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^{\infty} p^{d-1} dp \int_0^{\infty} p'^{d-1} dp' \times \\ \times P_l(p, p') \langle n | \Delta G_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \omega) | l \rangle \langle l | \Delta G_{\mathbf{p}'}(\mathbf{q}, \omega) | n' \rangle, \tag{П.1}$$

где матричные элементы разности одночастичных функций Грина определяются соотношением

$$\langle n | \Delta G_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \omega) | l \rangle = \\ = \frac{1}{2\pi i n_F A_l} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{(d-3)/2} C_n^{(d-2)/2}(x) C_l^{(d-2)/2}(x) \Delta G_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \omega) dx, \tag{П.2}$$

а коэффициенты разложения (13) диффузионного пропагатора —

$$P_n(p, p') = \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)^{(d-3)/2} C_n^{(d-2)/2}(x) dx}{-i\omega + (\mathbf{p} + \mathbf{p}')^2 \bar{D}(|\mathbf{p} + \mathbf{p}'|, \omega)}, \quad x = \cos \gamma. \tag{П.3}$$

В пространстве с размерностью $d \leq 3$ подынтегральное выражение (П.3) имеет неинтегрируемую сингулярность при $\omega \rightarrow 0$ и $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}'$. Поэтому, предполагая, что в низкочастотном пределе основной вклад в (П.3) вносит окрестность диффузионного полюса, приближенно заменим коэффициент диффузии $D(|\mathbf{p} + \mathbf{p}'|, \omega)$ его значением в полюсе $\bar{D}(\omega) = D((i\omega/\bar{D})^{1/2}, \omega)$ [16], после чего $P_n(p, p')$ с помощью табличного интеграла [26, § 16.3 (17)] выражается через функцию Лежандра второго рода [27, гл. 3]

$$P_n(p, p') \simeq \frac{(-1)^n}{2pp' \bar{D}(\omega)} \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma((d-2)/2)} \exp \left\{ -i\pi \frac{d-3}{2} \right\} \left(\frac{z^2 - 1}{4} \right)^{(d-3)/4} Q_{n+(d-3)/2}^{(d-3)/2}(z), \tag{П.4}$$

зависящую от параметра $z = (-i\omega + (p^2 + p'^2)\tilde{D}(\omega))/(2pp'\tilde{D}(\omega))$. Таким образом, (П.4) определяет низкочастотную асимптотику $P_n(p, p')$ при $d \leq 3$. Например, в двумерной неупорядоченной системе она справедлива при выполнении неравенства $|\tilde{D}(\omega)/D_0|^3 \ll \ll \lambda_F/l$ [16]. В системах с размерностью $d > 3$ сингулярность диффузионного пропагатора в (П.3) компенсируется множителем $(1 - x^2)^{(d-3)/2}$, происходящим от якобиана d -мерной сферической системы координат. Интеграл (П.3) остается сходящимся при $z \rightarrow 1$, тем не менее при достаточно низких частотах, $\omega \ll k_F^2|\tilde{D}(\omega)|$, основной вклад в него по-прежнему вносится малой окрестностью диффузионного полюса. При $\omega \rightarrow 0$ в металлическом режиме ($\tilde{D}(0) \neq 0$) это условие выполняется автоматически, а в диэлектрическом ($\tilde{D}(\omega) \propto -i\omega\xi^2$) — при выполнении неравенства $k_F\xi \gg 1$.

Главный вклад в интегралы (П.1) вносит окрестность уровня Ферми $|p - k_F| \leq 1/l$, внутри которой при $\omega \ll k_F^2|\tilde{D}(\omega)|$ параметр $|z| \simeq 1$. В этом случае, используя выражение $Q_\nu^\mu(z)$ через гипергеометрическую функцию (см. [27 § 3.2 (38)]), нетрудно найти следующую асимптотику для (П.4):

$$P_n(p, p') \simeq \frac{(-1)^n}{2pp'\tilde{D}(\omega)} \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma((5-d)/2)}{\Gamma((d-2)/2)} \times \times \frac{1}{d-3} \left[\frac{\Gamma((d-1)/2)}{\Gamma((5-d)/2)} - \frac{\Gamma(n+d-2)}{n!} \left(\frac{z^2-1}{4}\right)^{(d-3)/2} \right], \quad (\text{П.5})$$

справедливую в окрестности $|n^2(1 - z^2)| \ll 1$ точки $z = 1$. Это неравенство означает, что с помощью (П.5) можно получить аналитические оценки коэффициентов $M_{nn'}(q, \omega)$ лишь при $n < k_F l$. При больших значениях n асимптотика (П.5) нарушается уже внутри существенного интервала интегрирования $|p - k_F| \simeq 1/l$ и вычисление (П.1) становится возможным лишь численными методами.

Разлагая матричные элементы одночастичных функций Грина (П.2) в ряд по степеням $\mathbf{r}q/m$ и ограничиваясь линейным по q приближением

$$\langle n|\Delta G_p|l \rangle = = \frac{1}{2\pi i n_F} \left\{ \delta_{n,l} \Delta G - \frac{qp}{2m} \left[\frac{n+d-3}{2n+d-2} \delta_{n,l+1} + \frac{n+1}{2n+d-2} \delta_{n,l-1} \right] \frac{\partial \Delta G}{\partial \alpha} \right\}, \quad (\text{П.6})$$

где $\Delta G \simeq 2\alpha/[(\mathcal{E} - \mathcal{E}_p)^2 + \alpha^2]$, $\alpha = \pi\mathcal{E}_F\lambda$, мы получим трехдиагональную длинноволновую асимптотику матрицы функций памяти (17). Учитывая δ -образное свойство диагональной части (П.6), один из интегралов в (П.1) можно снять. Оставшиеся интегралы после подстановки (П.4), (П.5) вычисляются аналитически.

После громоздких преобразований коэффициент $\Delta_n(\omega)$ в (17) можно представить в виде ($\lambda \ll 1$)

$$\Delta_n(\omega) = \pi d \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right) \lambda^2 \frac{D_0}{\tilde{D}(\omega)} \times \times \frac{1}{3-d} \left[\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)^{d-3} F\left(\frac{3-d}{2}, \frac{4-d}{2}; \frac{5-d}{2}; 1-y\right) - \frac{n!\Gamma(d-2)}{\Gamma(n+d-2)} \sin\left(\pi\frac{d-2}{2}\right) \right], \quad (\text{П.7})$$

где $y = -4di\omega\tau D_0/\tilde{D}$, $F(a, b; c; z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса [27, гл. 2]. При $d = 2$ сингулярная часть (П.7) совпадает с выражением для Δ из [16]. Аналогично

можно получить выражение для

$$\Lambda_n(\omega) = \frac{\pi^2 d \lambda^3}{2} \frac{D_0}{\bar{D}(\omega)} \frac{n! \Gamma(d-1)}{\Gamma(n+d-1)} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5-d}{2}\right) \cos\left(\frac{d-1}{2}t\right), \quad (\text{П.8})$$

также справедливое при $\lambda \ll 1$, $\cos t = -(1 + \pi^2 \lambda^2)^{-1/2}$.

Используя формулы аналитического продолжения для гипергеометрической функции [27, § 2.10(1)], нетрудно получить из (П.7) асимптотики (23), (24).

Литература

1. P. W. Anderson, Phys. Rev. **109**, 1492 (1958).
2. А. Л. Эфрос, УФН **126**, 41 (1978).
3. P. A. Lee and T. V. Ramakrishnan, Rev. Mod. Phys. **57**, 287 (1985).
4. M. V. Sadovskii, Sov. Sci. Rev. A. Phys. **7**, 1 (1986).
5. М. В. Садовский, СФХТ **8**, 337 (1995).
6. D. Vollhardt and P. Wölfle, in *Electronic Phase Transitions*, ed. by W. Hanke and Yu. V. Kopayev, North-Holland, Amsterdam (1992).
7. D. Vollhardt and P. Wölfle, Phys. Rev. Lett. **45**, 842 (1980).
8. D. Vollhardt and P. Wölfle, Phys. Rev. B **22**, 4666 (1980).
9. P. Wölfle and D. Vollhardt, in *Anderson Localization*, ed. by Y. Nagaoka and H. Fukuyama, Springer-Verlag, Berlin-New York (1982), p. 26.
10. А. В. Мясников, М. В. Садовский, ФТТ **24**, 3569 (1982).
11. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, Москва (1962).
12. Л. П. Горьков, А. И. Ларкин, Д. Е. Хмельницкий, Письма в ЖЭТФ **30**, 248 (1979).
13. F. J. Wegner, in *Anderson Localization*, ed. by Y. Nagaoka and H. Fukuyama, Springer-Verlag, Berlin-New York (1982), p. 8.
14. И. М. Суслов, ЖЭТФ **108**, 1686 (1995).
15. В. Е. Кравцов, И. В. Лернер, В. И. Юдсон, ЖЭТФ **94**, 255 (1988).
16. А. Г. Грошев, С. Г. Новокшионов, ЖЭТФ **111**, 1787 (1997).
17. Д. Н. Зубарев, *Современные методы статистической теории неравновесных процессов*. В кн.: *Современные проблемы математики*. т. 15, ВИНТИ АН СССР (1979).
18. H. Bateman and A. Erdelyi, *Higher Transcendental Functions*, v. 2, Mc Graw-Hill Book Company, INC (1953) (пер. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 2, Наука, Москва (1966)).
19. W. B. Jones and W. J. Thron, *Continued Fractions. Analytic Theory and Applications*, Addison-Wesley Publishing Company (1980) (пер. У. Джонс, В. Трон, *Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения*, Мир, Москва (1985)).
20. В. Л. Березинский, Л. П. Горьков, ЖЭТФ **77**, 2498 (1979).
21. V. N. Prigodin and Yu. A. Firsov, J. Phys. C **17**, L979 (1984).
22. Y. Imry, Y. Gefen, and D. J. Bergman, in *Anderson Localization*, ed. by Y. Nagaoka and H. Fukuyama, Springer-Verlag, Berlin-New York (1982), p. 138.
23. H. F. Hess, K. DeConde, T. F. Rosenbaum et al., Phys. Rev. B **25**, 5578 (1982).
24. Э. З. Кучинский, М. В. Садовский, В. Г. Суворов и др., ЖЭТФ **107**, 2027 (1995).
25. Э. З. Кучинский, М. А. Эркабаев, ФТТ **39**, 412 (1997).
26. H. Bateman and A. Erdelyi, *Tables of Integral Transforms*, v. 2, Mc Graw-Hill Book Company, INC (1954) (пер. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований*, т. 2, Наука, Москва (1970)).
27. H. Bateman and A. Erdelyi, *Higher Transcendental Functions*, v. 1, Mc Graw-Hill Book Company, INC (1953) (пер. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 1, Наука, Москва (1966)).