*ЖЭТФ, 1998, том 114, вып. 3(9), стр. 798–820* 

# РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ВЕРСИЯ МЕТОДА МНИМОГО ВРЕМЕНИ

*В. Д. Мур, Б. М. Карнаков**

*Московский инженерно-физический институт*
*115409, Москва, Россия*

*В. С. Попов*

*Институт теоретической и экспериментальной физики*
*117218, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 23 февраля 1998 г.

Развита релятивистская версия квазиклассического метода мнимого времени (ММВ), что позволяет вычислять вероятность туннелирования релятивистских частиц через потенциальные барьеры, в том числе не обладающие сферической симметрией. Применение ММВ к конкретным задачам требует нахождения подбарьерных траекторий, являющихся решениями классических уравнений движения, но с мнимым временем (и потому нереализуемых в классической механике). С помощью ММВ рассчитана вероятность ионизации $s$-уровня, энергия связи которого может быть порядка энергии покоя, под действием электрического и магнитного полей различной конфигурации. Помимо экспоненциального множителя вычислены кулоновский и предэкспоненциальный факторы в вероятности ионизации. Кратко изложен гамильтонов подход к проблеме туннелирования релятивистских частиц. Рассмотрение процесса ионизации тяжелых атомов электрическим полем дает дополнительный аргумент против существования «эффекта Унру».

**1.** Метод мнимого времени (ММВ) был предложен [1, 2] в связи с расчетом вероятности многофотонной ионизации атомов полем сильной световой волны. Для описания процесса туннелирования вводятся подбарьерные траектории, удовлетворяющие классическим уравнениям движения, но с мнимым «временем» $t$. Мнимая часть функции действия, вычисленная вдоль такой «классической» траектории, определяет вероятность туннелирования частицы в квантовой механике [1–3].

Недавно с помощью ММВ исследовались влияние магнитного поля на ионизацию атомов и ионов [4–6], а также процесс лоренцевой ионизации [7], возникающей при движении атомов в постоянном магнитном поле. При этом подбарьерное движение электрона считалось нерелятивистским, что выполняется для валентных электронов во всех атомах, от водорода до урана. Однако в случае ионизации $K$-оболочки в тяжелых атомах становятся существенными релятивистские эффекты, последовательный учет которых (в квазиклассическом приближении) требует обобщения ММВ на релятивистский случай, что может оказаться полезным также в ряде вопросов релятивистской ядерной физики и квантовой хромодинамики.

Мы продемонстрируем возможность такого обобщения на конкретной задаче об ионизации связанного состояния, энергия связи которого $E_b = mc^2 - E_0$ сравнима с энергией покоя $mc^2$, и найдем главный (экспоненциальный) фактор в вероятности

*E-mail: karnak@theor.mephi.msk.su

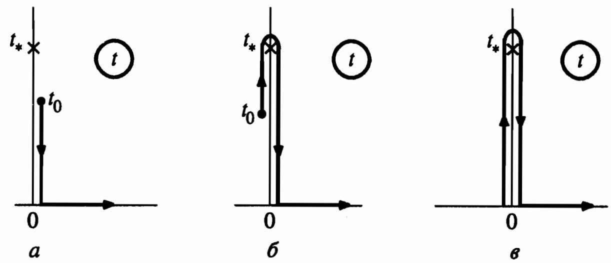


**Рис. 1.** Изменение мнимого времени $t$ в подбарьерном движении: *а*) энергия уровня $E_0 > 0$; *б*) $0 > E_0 > -m$; *в*) $E_0 = -m$ (уровень на границе нижнего континуума). Звездочкой отмечена точка ветвления функции $\sqrt{p(t)^2 + m^2}$

ионизации. Будут рассмотрены также учет кулоновского взаимодействия в процессе туннелирования и вычисление предэкспоненциального множителя.

Статья построена следующим образом. В пп. 2–5 рассмотрены случаи чисто электрического поля, параллельных и взаимно перпендикулярных полей $\mathscr{E}$ и $\mathscr{H}$ (при этом потенциал, связывающий электрон с атомным остовом, предполагается короткодействующим). Пункт 4 посвящен особому случаю — скрещенным полям, т. е. $\mathscr{E} \perp \mathscr{H}$ и $\mathscr{E} = \mathscr{H}$. На этих примерах мы излагаем процедуру определения экстремальной подбарьерной траектории, определяющей наиболее вероятный путь туннелирования частицы и тем самым экспоненциальный множитель в вероятности ионизации. Рассмотрение пучка подбарьерных траекторий, близких к экстремальной, позволяет найти также и предэкспоненту. В п. 6 описан способ учета (в рамках ММВ) кулоновского взаимодействия между вылетающим электроном и атомным остовом. Введение кулоновской поправки позволяет рассмотреть практически важный случай ионизации нейтральных атомов и положительных ионов. В п. 7 обсуждается вопрос о ширине барьера и условиях применимости ММВ. В п. 8 кратко описан гамильтонов подход к проблеме туннелирования релятивистских частиц. В п. 9 решение задачи об ионизации используется при обсуждении эффекта Унру [8]; высказаны некоторые замечания, дополняющие изложенную ранее [9] аргументацию того, что отклик равноускоренного детектора не универсален, а зависит от его структуры. В заключительном п. 10 перечислены основные выводы работы, а детали вычислений и некоторые громоздкие формулы вынесены в Приложения А–С.

Далее $\hbar = c = 1$, однако в окончательных формулах мы восстанавливаем размерности входящих в них величин. Часть результатов данной работы анонсирована в [10].

**2.** Начнем с ионизации $s$-уровня, связанного короткодействующими силами, под действием электрического поля $\mathscr{E}$. В этом случае подбарьерные траектории имеют вид

$$x = \frac{ip_\perp}{e\mathscr{E}}(\arcsin \tau_0 - \arcsin \tau), \quad y = 0, \quad z = \frac{M}{e\mathscr{E}}\left(\sqrt{1-\tau^2} - \sqrt{1-\tau_0^2}\right), \tag{1}$$

причем $p_x(t) = p_\perp = \text{const}$, $p_z(t) = e\mathscr{E}t = -iM\tau$. Здесь $\tau = ie\mathscr{E}t/M$ ($\tau$ — вещественная величина, связанная с собственным временем $s$ соотношением $s = -i(m/e\mathscr{E}) \arcsin \tau$), $M = \sqrt{m^2 + p_\perp^2}$, ось $z$ направлена вдоль $\mathscr{E}$, $p_\perp$ — поперечный импульс частицы. Начальный момент $t_0$ подбарьерного движения определяется из граничных условий [2]

$$\mathbf{r}(t_0) = 0, \quad \frac{m}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}^2(t_0)}} = E_0, \quad \operatorname{Im} \mathbf{r}(0) = \operatorname{Im} \dot{\mathbf{r}}(0) = 0 \tag{2}$$

(в калибровке, где $\varphi(0,t) = 0$, $\mathbf{A}(0,t) = 0$, и в приближении нулевого радиуса сил, связывающих уровень), откуда

$$t_0 = \frac{im}{e\mathscr{E}}\sqrt{1-\epsilon_0^2+q^2}, \quad q = p_\perp/m. \tag{3}$$

Здесь $E_0 = m\epsilon_0$ — энергия связанного состояния ($-1 \le \epsilon_0 < 1$, значения $\epsilon_0 = \pm 1$ отвечают границам верхнего и нижнего континуумов). Вероятность туннелирования электрона вдоль траектории (1) равна [2]

$$dw(\mathbf{p}_\perp) = \frac{\text{const}}{\hbar m}\exp\left\{-\frac{2}{\hbar}\,\text{Im}\; W(p_\perp)\right\} d^2p_\perp, \tag{4}$$

где $W$ — укороченное действие:

$$W = \int_{t_0}^{0}(L+E_0)dt - (\mathbf{pr})_{t=0}, \qquad L = -m\sqrt{1-v^2} + e(\mathbf{Av}) - e\varphi \tag{4'}$$

($t = 0$ — момент выхода частицы из-под барьера). При углублении уровня точка $t_0$ движется в комплексной плоскости, огибая точку ветвления $t_*$, как показано на рис. 1. С учетом этого

$$\begin{gathered} \tau_0 = \sqrt{1-\epsilon_0^2} + \frac{\epsilon_0^2 q^2}{2\sqrt{1-\epsilon_0^2}} + \ldots, \\ W = \frac{im^2}{2e\mathscr{E}}\left[(1+q^2)\arccos\frac{\epsilon_0}{\sqrt{1+q^2}} - \epsilon_0\sqrt{1-\epsilon_0^2+q^2}\right] = \frac{im^2}{2e\mathscr{E}}\left[\Phi(\epsilon_0)+q^2\arccos\epsilon_0+O(q^4)\right], \end{gathered} \tag{5}$$

где $\Phi(\epsilon) = \arccos\epsilon - \epsilon\sqrt{1-\epsilon^2}$. Отметим, что $\Phi(-\epsilon) = \pi - \Phi(\epsilon)$ и

$$\Phi(\epsilon) = \begin{cases} \dfrac{2^{5/2}}{3}(1-\epsilon)^{3/2}\left[1 - \dfrac{3}{20}(1-\epsilon) + \ldots\right], & \epsilon \to 1, \\ \dfrac{\pi}{2} - 2\epsilon + \dfrac{1}{3}\epsilon^3 + \ldots, & \epsilon \to 0, \\ \pi - \dfrac{2^{5/2}}{3}(1+\epsilon)^{3/2} + \ldots, & \epsilon \to -1. \end{cases} \tag{5'}$$

Интегрируя (4), (5) по поперечному импульсу, находим вероятность (в единицу времени) ионизации $s$-уровня в электрическом поле:

$$w(\mathscr{E},\epsilon_0) = \frac{mc^2}{2\hbar}|A_\kappa|^2\,\frac{\mathscr{E}/F_{cr}}{\arccos\epsilon_0}\exp\left\{-\frac{F_{cr}}{\mathscr{E}}\Phi(\epsilon_0)\right\}, \tag{6}$$

где $A_\kappa$ — асимптотический (при $r \to \infty$) коэффициент волновой функции связанного состояния в отсутствие внешнего поля $\mathscr{E}$ (ср. с формулой (9) в [4]), а $F_{cr} = m^2c^3/e\hbar$ — критическое, или швингеровское поле, характерное для квантовой электродинамики [11, 12].

В нерелятивистском пределе ($\epsilon_0 \to 1$) эта формула переходит в известное выражение [13, 14] для вероятности ионизации отрицательных ионов ($H^-$, $Na^-$ и т.д.). При

$\epsilon_0 = -1$, т.е. для уровня, опустившегося до границы нижнего континуума (критический заряд ядра $Z_{cr}(1s_{1/2}) = 173$ [15–18]), экспоненциальный множитель в (6) становится равным $\exp(-\pi F_{cr}/\mathscr{E})$ и совпадает с соответствующим множителем в формуле Швингера [11] для вероятности рождения электрон-позитронных пар из вакуума в постоянном электрическом поле.

**3.** Если поля $\mathscr{E}$ и $\mathscr{H}$ параллельны, то траектория релятивистской частицы представляет собой спираль переменного шага. Подбарьерная траектория получается из известных формул [19] с помощью аналитического продолжения по $t$:

$$z = \frac{M}{e\mathscr{E}}\left(\sqrt{1-\tau^2} - \sqrt{1-\tau_0^2}\right), \quad \boldsymbol{\rho} = x + iy = \frac{i\mathbf{p}_\perp}{e\mathscr{H}}(e^{-i\vartheta} - e^{-i\vartheta_0}),$$
$$\tau = i\frac{e\mathscr{E}t}{M} = i\,\mathrm{sh}\left(\frac{\mathscr{E}}{\mathscr{H}}\vartheta\right), \quad M = \sqrt{m^2 + p_\perp^2} \tag{7}$$

(поля $\mathscr{E}$ и $\mathscr{H}$ направлены по оси $z$), причем $t$ и $\vartheta$ в подбарьерном движении являются мнимыми величинами, а $\tau$ — вещественной. Для скалярной (бесспиновой) частицы действие $S$ равно

$$S(t) = \int^t \left(-m\sqrt{1-v^2} + \frac{1}{2}e\mathscr{H}(x\dot{y} - y\dot{x}) + e\mathscr{E}z\right)dt =$$
$$= \frac{M^2}{4e\mathscr{E}}\,\mathrm{sh}\,2\psi - \frac{m^2}{2e\mathscr{E}}\psi + \frac{p_\perp^2}{2e\mathscr{H}}\sin\vartheta + \mathrm{const}, \quad \vartheta = \frac{e\mathscr{H}}{m}s, \quad \psi = \frac{e\mathscr{E}}{m}s, \tag{8}$$

где $s$ — собственное время частицы (чисто мнимое). В итоге получаем[1)]

$$\mathrm{Im}\ W(p_\perp) = \frac{m^2}{2e\mathscr{E}}\Phi(\epsilon_0) + \mathrm{sh}\left(\frac{\mathscr{H}}{\mathscr{E}}\ \arccos\epsilon_0\right)\frac{p_\perp^2}{2e\mathscr{H}} + \ldots \tag{9}$$

(при $\mathscr{H} = 0$ эта формула переходит в (5)). Интегрируя (4), (9) по $p_\perp$, получаем

$$\frac{w(\mathscr{E},\mathscr{H})}{w(\mathscr{E},0)} = \frac{\sigma}{\mathrm{sh}\,\sigma}, \quad \sigma = \frac{\mathscr{H}}{\mathscr{E}}\arccos\epsilon_0. \tag{10}$$

Для нерелятивистских связанных состояний $\epsilon_0 = 1 - \alpha^2\kappa^2/2 \to 1$ ($\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$, параметр $\kappa \sim 1$, см. табл. 1 в [6]) и $\arccos\epsilon_0 = \alpha\kappa + (\alpha\kappa)^3/24 + \ldots$ Поэтому $\sigma = \alpha\kappa\mathscr{H}/\mathscr{E}$ совпадает с введенным в [4] параметром $\gamma$, а из (10) следует правильное выражение для предэкспоненты $P_0(\gamma) = \gamma/\mathrm{sh}\,\gamma$ в случае ионизации отрицательного иона [5, 20]. В другом пределе, $\epsilon_0 = -1$, имеем $\sigma = \pi\mathscr{H}/\mathscr{E}$, и (10) согласуется с первым членом швингеровского разложения [11] для мнимой части эффективной функции Лагранжа в скалярной электродинамике:

$$w_0(\mathscr{E},\mathscr{H}) = \frac{\alpha}{2\pi}\frac{\mathscr{E}\mathscr{H}}{\mathrm{sh}(\pi\mathscr{H}/\mathscr{E})}\exp\left(-\frac{\pi F_{cr}}{\mathscr{E}}\right) \tag{11}$$

---

1) При интегрировании в (4′) удобно перейти к переменным $\vartheta$ и $\psi$, учитывая соотношения $dt/m\sqrt{1-v^2} = d\vartheta/e\mathscr{H} = d\psi/e\mathscr{E}$.

(при условии[2)] $\mathscr{E}, \mathscr{H} \ll F_{cr}$ следующие члены этого разложения экспоненциально малы по сравнению с (11)).

ММВ позволяет получить формулу типа (9) также и для фермионов: нужно лишь ввести спиновую добавку

$$\frac{ie}{2m}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\int F^{\alpha\beta}u^{\mu}s^{\nu}ds = \frac{e}{m}\int \{(\mathbf{s}\boldsymbol{\mathscr{H}}) - (\mathbf{vs})(\mathbf{v}\boldsymbol{\mathscr{H}}) + [\mathbf{vs}]\boldsymbol{\mathscr{E}}\}\,dt \tag{12}$$

к функции действия, вклад которой (при изменении $t$ вдоль петли на рис. 1*в*) рассчитывается с помощью уравнений Баргмана–Мишеля–Телегди [21] для 4-спина $s^{\nu}$ во внешнем поле. В итоге для $w_s(\mathscr{E}, \mathscr{H})$ можно получить [22] формулу типа (11), в которой предэкспоненциальный множитель $(\operatorname{sh}\sigma)^{-1}$, где $\sigma = \pi\mathscr{H}/\mathscr{E}$, следует заменить на $2\operatorname{cth}\sigma$ в случае электронов ($s = 1/2$, $g = 2$) и на $(\operatorname{sh}\sigma)^{-1} + 2\operatorname{cth}\sigma$ для векторных бозонов ($s = 1$) с гиромагнитным отношением $g = 2$ — тот случай, когда теория является перенормируемой [23].

В специальном случае постоянных и однородных полей $\mathscr{E}$ и $\mathscr{H}$ можно учесть все (экспоненциально малые) поправки к (11), вводя подбарьерные траектории, отвечающие $n$-кратному блужданию частицы между нижним и верхним континуумами [24]. Таким путем квазиклассический ММВ позволяет получить не только главный член (11) в вероятности рождения пар, но и в точности восстановить весь ряд для $w = 2\operatorname{Im}\mathscr{L}$, вычисленный ранее (более сложным способом) Швингером [11] для скалярных и спинорных частиц, а Ваняшиным и Терентьевым [23] для векторных бозонов. Такое совпадение результатов носит, однако, случайный характер и аналогично совпадению точного и квазиклассического спектров уравнения Шредингера для некоторых простых потенциалов: гармонический осциллятор, кулоновский потенциал, потенциал Морзе $U(x) = U_0(e^{-2x} - 2e^{-x})$ и др.

В заключение этого пункта отметим различие между (6) и (11). В случае электрического поля и $\epsilon_0 = -1$ ($\mathscr{H} = 0$, уровень на краю нижнего континуума) эти формулы, полностью совпадая в экспоненциальном множителе, определяемом значением $\operatorname{Im} S$ вдоль экстремальной ($p_{\perp} = 0$) траектории, различаются зависимостью предэкспоненты от электрического поля: согласно (6), $P(\mathscr{E}) \propto \mathscr{E}$, в то время как для (11) $P(\mathscr{E}) \propto \mathscr{E}^2$. Это и неудивительно, поскольку (6) и (11) относятся к различным физическим процессам и имеют разную размерность: вероятность (11) относится к инвариантному 4-объему вакуума $VT = 1$ и имеет размерность $m^4$ (или см$^{-3}\cdot$с$^{-1}$), а (6) — к отдельному атому и имеет размерность с$^{-1}$.

**4. Скрещенные поля.** Переходим к более сложным случаям, когда экстремальная траектория уже не является одномерной. Пусть $\boldsymbol{\mathscr{E}} \perp \boldsymbol{\mathscr{H}}$; калибровка

$$\mathbf{A} = (-\mathscr{H}y, 0, 0), \qquad \varphi = -\mathscr{E}y \tag{13}$$

соответствует тому, что ось $y$ направлена вдоль поля $\boldsymbol{\mathscr{E}}$, а ось $z$ — вдоль $\boldsymbol{\mathscr{H}}$. Для скрещенных ($\mathscr{E} = \mathscr{H}$) полей классические траектории задаются в параметрической форме [19]:

$$x = \frac{m}{2e\mathscr{E}}\left[(\lambda^2 - 1)q + \frac{1}{3}\lambda^2 q^3\right] + C_1, \quad y = \frac{m}{2e\mathscr{E}}\lambda q^2 + C_2, \quad z = \frac{1}{e\mathscr{E}}\lambda q p_z + C_3,$$

[2)] Это условие необходимо для применимости квазиклассики и заведомо выполняется на опыте (для электронов $F_{cr} = 1.32 \cdot 10^{16}$ В/см, или $4.41 \cdot 10^{13}$ Гс).

$$t = \frac{m}{2e\mathscr{E}}\left[(\lambda^2+1)q + \frac{1}{3}\lambda^2 q^3\right],$$

где $q = p_y/m$ — параметр, $\lambda = m/(\sqrt{p^2+m^2} - p_x)$ — (безразмерный) интеграл движения, связанный с указанным в [19] интегралом $\alpha = E_{kin} - p_x$ соотношением $\lambda = m\alpha^{-1}$. В подбарьерном движении «время» $t$ и компонента импульса $p_y$ являются чисто мнимыми:

$$t = -\frac{im}{e\mathscr{E}}\,\tau, \qquad q = i\lambda^{-1}u \tag{14}$$

($-\tau_0 < \tau < 0$). Используя граничные условия (2), находим константы интегрирования $C_i$ и определяем экстремальную подбарьерную траекторию:

$$\begin{gathered} x = \frac{im}{2e\mathscr{E}\lambda}\left[(\lambda^2-1)u - \frac{1}{3}u^3\right] = \frac{im}{6e\mathscr{E}\lambda}(u_0^2 - u^2)u, \\ y = \frac{m}{2e\mathscr{E}\lambda}(u_0^2-u^2), \quad z = 0, \qquad \tau = \frac{1}{2\lambda}\left[\frac{1}{3}u^3 - (\lambda^2+1)u\right], \end{gathered} \tag{15}$$

откуда

$$r_0(t) \equiv \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{m}{2e\mathscr{E}\lambda}(u_0^2-u^2)\sqrt{1-\frac{u^2}{9}}, \qquad \sqrt{1-v^2} = \frac{2\lambda}{\lambda^2+1-u^2}, \tag{15$'$}$$

где $u_0 \equiv u(-\tau_0)$, значение $\tau = -\tau_0$ соответствует началу подбарьерного движения, а $\tau = u = 0$ — моменту выхода частицы из-под барьера. В подбарьерном движении компонента скорости $v_x$ — вещественная, а $v_y$ (вдоль электрического поля) — чисто мнимая. Граничные условия (2) удовлетворяются, если

$$(\lambda^2-1)u_0 - \frac{1}{3}u_0^3 = 0, \qquad \lambda + (1-u_0^2)\lambda^{-1} = 2\epsilon_0.$$

Отсюда следует, что $u_0$, $\tau_0$ и $\lambda$ однозначно определяются энергией связанного состояния: $u_0 = \sqrt{1+\xi^2}$ $\tau_0 = \sqrt{3}\,\xi$,

$$\xi = \sqrt{\lambda^2-1} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\sqrt{\epsilon_0^2+8} - \epsilon_0\right)}. \tag{16}$$

Здесь мы ввели удобный для дальнейшего параметр $\xi$, причем $0 < \xi \leq \sqrt{3}$.

Уравнения (14)–(16) полностью определяют экстремальную траекторию. Отметим, что параметр $u$ пропорционален собственному времени частицы $s$:

$$s = \int^{t} \sqrt{1-v^2}\, dt = \frac{im}{e\mathscr{E}}\,u,$$

которое, как и $t$, является мнимым на подбарьерном участке траектории. В частности, в начальный момент[3)] имеем

$$t_0 = \frac{s_0}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{im}{e\mathscr{E}} \sqrt{\frac{3\xi^2}{1+\xi^2}}.$$

Переходя в (4′) к интегрированию по $u$ и используя калибровку (13), имеем

$$L = m(\epsilon_0 - \sqrt{1-v^2}) + e\mathscr{E}(1-\dot{x})y = -\frac{m}{\sqrt{1+\xi^2}} \frac{\xi^4 - (\xi^2-2)u^2}{\xi^2+2-u^2}$$

и находим (с экспоненциальной точностью) вероятность ионизации в скрещенных полях:

$$w(\mathscr{E} = \mathscr{H}, \epsilon_0) \propto \exp(-2\,\mathrm{Im}\, W) = \exp\left(-2\sqrt{3}\frac{\xi^3}{1+\xi^2}\frac{F_{cr}}{\mathscr{E}}\right). \tag{17}$$

В нерелятивистском пределе

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}\alpha\kappa\left(1 + \frac{7}{72}\alpha^2\kappa^2 + \ldots\right)$$

и

$$w \propto \exp\left\{-\frac{2}{3\varepsilon}\left(1 - \frac{1}{24}\alpha^2\kappa^2\right)\right\}, \qquad \varepsilon \ll 1, \tag{18}$$

где $\varepsilon = \mathscr{E}/\kappa^3\mathscr{E}_a$ и $\mathscr{E}_a = \alpha^3 F_{cr}$. Поправка порядка $\alpha^2$ слегка увеличивает вероятность ионизации по сравнению с соответствующей нерелятивистской формулой [13]. Множитель $2\sqrt{3}\xi^3/(1+\xi^2)$ в экспоненте (17) монотонно увеличивается при углублении уровня (так, он равен $\sqrt{3}$ и $9/2$ при $\epsilon_0 = 0$ и $-1$), что приводит к резкому падению вероятности $w$.

В заключение этого пункта сделаем несколько замечаний.

1) Как известно, вероятность рождения пар из вакуума в скрещенных полях обращается в нуль. Это следует как из точного выражения для $\mathrm{Im}\,\mathscr{L}$ [11, 12], так и из следующего простого рассуждения. При переходе в систему отсчета $K$, движущуюся со скоростью $V$ в направлении, перпендикулярном к $\mathscr{E}$ и $\mathscr{H}$, напряженности скрещенных полей уменьшаются в $\sqrt{(c+V)/(c-V)}$ раз и при $V \to c$ могут быть сделаны чрезвычайно малыми. А в сколь угодно слабом электрическом поле пары, очевидно, не рождаются.

В нашем случае вероятность $w$ отлична от нуля: согласно (17), $w \propto \exp(-9F_{cr}/2\mathscr{E})$ при $\epsilon_0 = -1$. Это различие объясняется тем, что имеется выделенная система отсчета $K_0$ (в которой атом покоится), и переход из $K_0$ в лоренцеву систему $K$ качественно меняет постановку задачи (в отличие от вакуума, который лоренц-инвариантен).

2) Как видно из (18), релятивистская подбарьерная траектория привела к ответу, мало отличающемуся от результата нерелятивистской теории, если $E_0 \approx m$ (или $\kappa \sim 1$).

---

[3)] Обратим внимание на то, что здесь, в отличие от классических траекторий, $|t_0| < |s_0|$; это отвечает мнимым скоростям в подбарьерном движении.

Между тем движение заряженных частиц в скрещенных полях всегда является релятивистским [19], так как скорость дрейфа $v_d = c\mathscr{E}/\mathscr{H} \to c$. Этот кажущийся парадокс разъясняется тем, что электрон разгоняется до скорости порядка скорости света уже после выхода из-под барьера:

$$\frac{p_x}{mc} \approx k_1 \left(\frac{t}{T_0}\right)^{2/3}, \quad \frac{p_y}{mc} \approx k_2 \left(\frac{t}{T_0}\right)^{1/3}, \quad \frac{v}{c} = 1 - k_3 \left(\frac{t}{T_0}\right)^{-4/3}, \qquad t \to \infty,$$

где $T_0 = mc/e\mathscr{E}$ — время, за которое электрон достигает скорости $v \sim c$, а $k_i$ — коэффициенты порядка единицы. С другой стороны, характерное время туннелирования $T_t = m\epsilon\kappa/\hbar\mathscr{E}$, поэтому $T_0/T_t = (\alpha\kappa)^{-1} \gg 1$.

3) В отличие от одномерной квазиклассики, точка выхода из-под барьера не является точкой остановки частицы (даже для экстремальной траектории). Так, из (15) при $t = 0$ получаем

$$v_x(0) = c\,\frac{\xi^2}{\xi^2+2}, \quad p_x(0) = mc\,\frac{\xi^2}{2\sqrt{\xi^2+1}}, \tag{19}$$

причем скорость вылета направлена перпендикулярно полям $\mathscr{E}$ и $\mathscr{H}$.

**5.** Пусть $\mathscr{E} \perp \mathscr{H}$, но отношение $\rho = \mathscr{E}/\mathscr{H}$ не равно единице. Такая конфигурация полей возникает, в частности, в системе покоя атома или иона, движущегося в постоянном магнитном поле (так называемая лоренцева ионизация, см., например [7, 25]; при этом $\rho < 1$).

Классические траектории могут быть получены с помощью преобразования Лоренца из системы отсчета, в которой имеется только одно из полей, $\mathscr{H}$ или $\mathscr{E}$ [26, 27]. Так, при $\mathscr{E} < \mathscr{H}$ экстремальная подбарьерная траектория имеет вид

$$\begin{aligned}
x &= i\frac{m}{e\mathscr{H}}\,\frac{a\rho}{(1-\rho^2)^{3/2}}\left(\tau - \frac{\tau_0}{\operatorname{sh}\tau_0}\operatorname{sh}\tau\right),\\
y &= \frac{m}{e\mathscr{H}}\,\frac{a\rho}{1-\rho^2}\left(\operatorname{ch}\tau_0 - \operatorname{ch}\tau\right)\frac{\tau_0}{\operatorname{sh}\tau_0}, \qquad z = 0,\\
\omega_c t &= i\frac{a}{(1-\rho^2)^{3/2}}\left(\tau - \rho^2\frac{\tau_0}{\operatorname{sh}\tau_0}\operatorname{sh}\tau\right), \qquad -\tau_0 < \tau < 0,
\end{aligned} \tag{20}$$

где $\omega_c = e\mathscr{H}/m$ — циклотронная, или ларморовская частота, $a = (\sqrt{p^2+m^2} - \rho p_x)/m$ — интеграл движения[4)]. Из (2) вытекают уравнения для определения констант $a$ и $\tau_0$:

$$\frac{\operatorname{th}\tau_0}{\tau_0} = \frac{\rho^2 a}{a-(1-\rho^2)\epsilon_0}, \quad \operatorname{ch}\tau_0 = \frac{a-(1-\rho^2)\epsilon_0}{\rho\sqrt{a^2+\rho^2-1}} \tag{21}$$

(здесь $0 < \rho < 1$, $a > \sqrt{1-\rho^2}$), причем собственное время частицы равно

---

[4)] Наличие этого интеграла характерно для случая взаимно перпендикулярных полей. При $\rho = 1$ он совпадает с указанным в [19] интегралом $\alpha = E_{kin} - cp_x$.

$$s = \int\limits_0^t \sqrt{1-v^2}dt = \frac{i}{\omega_c}\frac{a}{1-\rho^2}\sqrt{1-\rho^2\left(\frac{\tau_0}{\operatorname{sh}\tau_0}\right)^2}\,\tau. \tag{22}$$

В начальный момент подбарьерного движения

$$s_0 = t_0\sqrt{\frac{1-\rho^2(\tau_0/\operatorname{sh}\tau_0)^2}{1-\rho^2}},$$

так что $|s_0| > |t_0|$, как и в предыдущем случае. Система (21) может быть сведена к одному уравнению:

$$\frac{1-\rho^2\tau_0\operatorname{cth}\tau_0}{\sqrt{1-\rho^2(\tau_0/\operatorname{sh}\tau_0)^2}} = \sqrt{1-\rho^2}\,\epsilon_0, \tag{23}$$

определяющему параметр $\tau_0 = \tau_0(\epsilon_0, \rho)$. В калибровке (13) лагранжиан

$$L = -m\sqrt{1-v^2} + e\mathscr{E}(1-\rho^{-1}\dot{x})y.$$

Из (4′) и (20) находим (с экспоненциальной точностью) вероятность ионизации:

$$w \propto \exp\left\{-F_{cr}\mathscr{E}^{-1}\Phi(\epsilon_0,\rho)\right\}, \tag{24}$$

где

$$\Phi = \frac{\rho\tau_0(1-a\epsilon_0)}{\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{\rho\tau_0}{\sqrt{1-\rho^2}}\left[1-\frac{(1-\rho^2)\epsilon_0^2}{1-\rho^2\tau_0\operatorname{cth}\tau_0}\right] \tag{25}$$

(при $\rho = 1$, т. е. в случае скрещенных полей, удобнее пользоваться формулами (17), (16) из предыдущего пункта).

Уравнения (23)–(25) решают поставленную задачу. Обсудим некоторые предельные случаи и результаты численных расчетов.

а) Как видно из рис. 2, значения $\Phi(\epsilon_0, \rho)$ увеличиваются как при углублении уровня, так и с ростом магнитного поля (при фиксированном $\mathscr{E}$). Последний факт легко объясняется в рамках ММВ: при $\mathscr{H} = 0$ экстремальная траектория одномерна (и направлена вдоль $\mathscr{E}$), а с ростом $\mathscr{H}$ она «закручивается», а ширина барьера возрастает (см. ниже п. 7).

б) В нерелятивистском пределе $\epsilon_0 \to 1$ удобно перейти к атомным единицам:

$$\Gamma = \hbar w = \frac{me^4\kappa^2}{2\hbar^2}|A_\kappa|^2\frac{\mathscr{E}}{\mathscr{E}_a}\exp\left\{-\frac{2\kappa^3\mathscr{E}_a}{3\mathscr{E}}\left[g(\gamma)-\alpha^2\kappa^2 g_1(\gamma)+O(\alpha^4)\right]\right\}, \tag{26}$$

где $\gamma = \omega_c/\omega_t = \alpha\kappa\mathscr{H}/\mathscr{E}$, $\Gamma$ — ширина уровня, $w$ — вероятность ионизации, $\mathscr{E}_a = \alpha^3 F_{cr} = 5.14\cdot10^9$ В/см — атомная единица напряженности электрического поля, $\kappa = \sqrt{E_b/I_\mathrm{H}}$, (см. также формулу (В.1)), $E_b$ — энергия связи уровня, $I_\mathrm{H}$ — потенциал ионизации атома водорода,

$$g(\gamma) = \frac{3\tau_0}{2\gamma}\left[1-\frac{\sqrt{\tau_0^2-\gamma^2}}{\gamma^2}\right] = \frac{1}{\gamma^3}\sum_{k=1}^{\infty}c_k\tau_0^{2k+1}, \quad c_k = 3\cdot2^{2k-1}\frac{B_{2k}}{(2k-1)!} \tag{27}$$

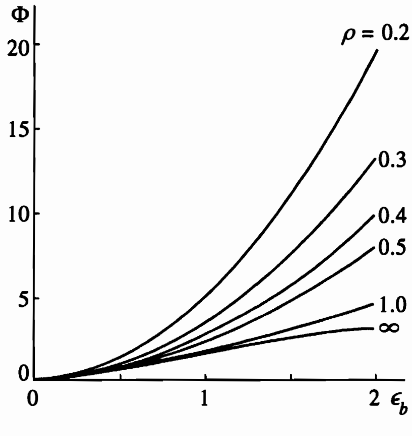


**Рис. 2**

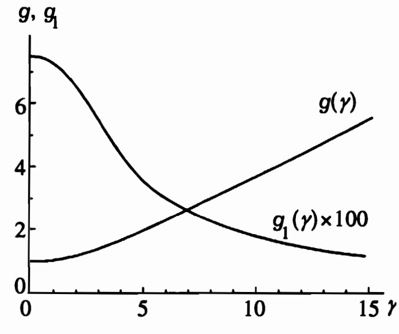


**Рис. 3**

**Рис. 2.** Функция $\Phi(\epsilon_0, \rho)$, определяющая экспоненциальный множитель в вероятности ионизации (24), в зависимости от энергии связи уровня $\epsilon_b = (m - E_0)/m$, $0 < \epsilon_b < 2$. У кривых указаны значения отношения $\rho = \mathscr{E}/\mathscr{H}$

**Рис. 3.** Функции $g(\gamma)$ и $g_1(\gamma)$ из (26). Для $g_1$ масштаб по оси ординат увеличен в 100 раз

($c_1 = 1$, $c_2 = -2/15$, $c_3 = 2/105$ и т.д., $B_{2k}$ — числа Бернулли), $\tau_0 = \tau_0(\gamma)$ определяется из уравнения

$$\operatorname{th} \tau_0 = \frac{\tau_0}{1 + \sqrt{\tau_0^2 - \gamma^2}}, \tag{28}$$

а выражение для $g_1(\gamma)$ довольно громоздко и вынесено в Приложение А. Всегда $g_1(\gamma) \ll \ll g(\gamma)$, например, $g(0) = 1$, $g_1(0) = 3/40$. С ростом $\gamma$, т.е. с увеличением магнитного поля, относительная величина релятивистской поправки только уменьшается (рис. 3).

в) Если $\rho \gg \alpha = 1/137$, т.е. электрическое поле не очень мало, то $\gamma \ll 1$ и выражение (26) упрощается:

$$w \propto \frac{\mathscr{E}}{\mathscr{E}_a} \exp\left\{ -\frac{2\kappa^3 \mathscr{E}_a}{3\mathscr{E}} \left[ 1 + \frac{\alpha^2 \kappa^2}{30 \mathscr{E}^2} \left( \mathscr{H}^2 - \frac{9}{4}\mathscr{E}^2 \right) \right] \right\}. \tag{29}$$

Это простое приближение имеет удивительно хорошую точность даже для глубоких уровней (но, разумеется, не при $\epsilon_0 \approx -1$). Так, при $\epsilon_0 = 0$ (т.е. для уровня, энергия связи которого равна $mc^2$ и $\epsilon_b = 1$) отличие в показателе экспоненты (29) от точной функции $\Phi(0, \rho)$ из (24) составляет 2% в случае чисто электрического поля, и всего лишь 0.2% для скрещенных полей (см. подробнее табл. 1, а также Приложение В).

г) Предел $\rho \to 0$ отвечает выключению электрического поля:

$$w \propto \exp\left\{ -\left[ (1 - \epsilon_0)^2 \frac{F_{cr} \mathscr{H}}{\mathscr{E}^2} + \frac{1}{2}(1 - \epsilon_0^2) \frac{F_{cr}}{\mathscr{H}} + O\left( \rho^2 \frac{F_{cr}}{\mathscr{H}} \right) \right] \right\} \tag{30}$$

($\mathscr{E} \ll \mathscr{H} \ll F_{cr}$). Зависимость $w \propto \exp(-\mathrm{const}/\mathscr{E}^2)$ показывает, что вероятность ионизации в этом случае чрезвычайно мала.

*Таблица 1*

**Точность приближения (29)**

| $\epsilon_b$ | $\rho = 0.5$ | 0.75 | 1.0 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 0.116 | 0.021 | 1.2(−3) | −0.014 |
| 0.2 | 0.467 | 0.087 | 5.3(−3) | −0.058 |
| 0.25 | 0.729 | 0.137 | 8.5(−3) | −0.092 |
| 0.50 | 2.80 | 0.580 | 0.040 | −0.404 |
| 0.75 | 5.69 | 1.36 | 0.102 | −1.01 |
| 1.0 | 8.76 | 2.49 | 0.206 | −2.04 |
| 1.2 | 11.1 | 3.63 | 0.326 | −3.27 |

*Примечание.* Приведены значения погрешности $\delta$ (в процентах), см. формулу (В.4); $\epsilon_b = E_b/mc^2$, $\rho = \mathscr{E}/\mathscr{H}$ и $a(b) \equiv a \cdot 10^b$.

д) При $\rho \to 1$ в (20)–(25) возникает неопределенность, раскрывая которую, приходим к формуле (17) для скрещенных полей.

г) Выше мы считали, что $\rho < 1$. Формулы для случая $\mathscr{E} > \mathscr{H}$ легко могут быть получены из предыдущих с помощью аналитического продолжения: $\sqrt{1-\rho^2} \to i\sqrt{\rho^2-1}$, $\tau \to i\tau$. При этом «время» $t$ и собственное время $s$ в подбарьерном движении остаются чисто мнимыми.

**6. Кулоновская поправка.** До сих пор мы пренебрегали кулоновским взаимодействием вылетающего электрона с атомным остовом, поэтому полученные выше формулы относятся к случаю ионизации отрицательных ионов (типа $H^-$, $Na^-$ и т. д.). Для учета кулоновского взаимодействия используем теорию возмущений в рамках ММВ [4, 28] и процедуру сшивания, вводя точку сшивания $r_1$ такую, что $\langle r \rangle \ll r_1 \ll b$, где $\langle r \rangle$ — средний размер связанного состояния, $b$ — ширина барьера (в условиях применимости квазиклассического приближения выбор такой точки $r_1$ всегда возможен, см. следующий пункт). Действуя аналогично [4, 5], получаем кулоновский фактор $Q$ в вероятности ионизации:

$$Q = \exp\left\{2\left[\eta\ln(\mu r_1) + iZ\alpha\int_{t_1}^{0}[\mathbf{r}_0^2(t)]^{-1/2}dt\right]\right\}, \tag{31}$$

где $\mu = m\sqrt{1-\epsilon_0^2}$, $\eta = Z\alpha\,\epsilon_0(1-\epsilon_0^2)^{-1/2}$ — релятивистский аналог параметра Зоммерфельда, $r_1 = [\mathbf{r}_0^2(t_1)]^{1/2}$ — точка сшивания, $\mathbf{r}_0(t)$ — экстремальная подбарьерная траектория, $t$ — мнимое время и $Z$ — заряд атомного остова, так что на больших расстояниях от атома, $\langle r \rangle \ll r \lesssim b$, электрон движется в потенциале $V(r) = -Z\alpha/r + o(r^{-2})$ (в свободном атоме, т. е. при $\mathscr{E} = \mathscr{H} = 0$). Заметим, что $Z = 1, 2$ и 0 в случае ионизации соответственно нейтрального атома, однозарядных положительного и отрицательного ионов.

Рассмотрим несколько частных случаев. Для электрического поля $\mathscr{E}$ экстремальная траектория получается из (1) при $p_\perp = 0$ и является одномерной. Интеграл в (31) вычисляется аналитически, что дает

$$Q = \left[2(1-\epsilon_0^2)^{3/2}F_{cr}/\mathscr{E}\right]^{2\eta} \exp(2Z\alpha \arccos\ \epsilon_0) \tag{32}$$

(подробности вычислений обсуждаются в Приложении С). Кулоновская поправка существенно увеличивает вероятность ионизации. Так, в нерелятивистском случае

$$Q = (2\kappa^3\mathscr{E}_a/\mathscr{E})^{2Z/\kappa} \gg 1. \tag{33}$$

С ростом энергии связи уровня $E_b = m(1-\epsilon_0)$ величина этой поправки хотя и уменьшается, однако остается все же значительной; например, $Q = \exp(\pi Z\alpha) \sim 25$ при $E_b = mc^2$.

Перемножая выражения (6) и (32), находим вероятность ионизации $w$ (подчеркнем, что в данном случае, т. е. при наличии только электрического поля, вычислены как экспонента, так и кулоновский и предэкспоненциальный множители, поэтому формула для $w$ является асимптотически точной в пределе слабого поля). В частности, при $\epsilon_0 \approx 1$, используя разложения

$$\epsilon_0 = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2\kappa^2, \quad \mu = m\alpha\kappa\left(1 - \frac{3}{8}\alpha^2\kappa^2 + \ldots\right), \quad \eta = \eta_0\left(1 - \frac{3}{8}\alpha^2\kappa^2 + \ldots\right)$$

($\eta_0 = Z/\kappa$), имеем с учетом поправок порядка $\alpha^2$:

$$w(\mathscr{E}, \epsilon_0) = \frac{me^4\kappa^2}{2\hbar^2}|A_\kappa|^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-2\eta_0} \exp\left\{-\frac{2}{3\epsilon}\left[1 - \alpha^2\kappa^2(c_0 + c_1\varepsilon\ln\varepsilon + c_2\varepsilon) + \ldots\right]\right\}, \tag{34}$$

где

$$c_0 = \frac{3}{40}, \quad c_1 = \frac{9}{8}\eta_0, \quad c_2 = -\left(3 - \frac{9}{8}\ln 2\right)\eta_0 + \frac{1}{16}, \quad \varepsilon = \mathscr{E}/\kappa^3\mathscr{E}_a \ll 1.$$

По аналогии с (29) можно ожидать, что область применимости этой «полурелятивистской» формулы затягивается вплоть до $E_b \sim mc^2$.

В случае скрещенных полей интеграл в (31) снова выражается в квадратурах (см. (15′) и Приложение С), что позволяет получить кулоновскую поправку в замкнутой форме:

$$Q = \left[\frac{2\xi^3(3-\xi^2)^2}{\sqrt{3}(1+\xi^2)}\frac{F_{cr}}{\mathscr{E}}\right]^{2\eta} \exp\left(6Z\alpha \arcsin\frac{\xi}{\sqrt{3}}\right), \tag{35}$$

где $\xi = \xi(\epsilon_0)$ определена в (16). При $\epsilon_0 \to 1$ это выражение переходит в (33), а при $\epsilon_0 = 0$ получаем $Q = \exp(3.8Z\alpha) \sim 45$. В обоих случаях, (32) и (35), кулоновский фактор $Q \gg 1$ при $\epsilon_0 = 0$.

Наконец, для подбарьерной траектории (21)

$$r_0(t) = \frac{m}{e\mathscr{E}}\frac{a\rho^2\tau_0}{(1-\rho^2)^{3/2}}\left[(1-\rho^2)\left(\frac{\operatorname{ch}\tau_0 - \operatorname{ch}\tau}{\operatorname{sh}\tau_0}\right)^2 - \left(\frac{\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{sh}\tau_0} - \frac{\tau}{\tau_0}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{36}$$

В этом случае интеграл (31) уже не берется аналитически. Как показано в Приложении С, его можно привести к регуляризованному виду (С.9), не содержащему произвольной точки сшивания, после чего кулоновскую поправку $Q$ нетрудно найти численно.

Рассмотренные примеры показывают, что формула (31) вполне эффективна для вычислений. Отметим, что она аналогична соответствующей формуле нерелятивистской теории (см. уравнения (6)–(8) в [4]). Это связано с тем, что кулоновское взаимодействие $\delta V(r) = -Z\alpha/r$ является временно́й компонентой 4-потенциала $A_\mu$ и входит в лагранжиан (4′) так же, как и в нерелятивистском случае.

**7. Ширина барьера и условие применимости ММВ.** Вероятность туннелирования связана с шириной барьера $b$. Полагая $t = 0$ в формулах (1), (15) и (20), находим

$$b = \frac{m}{e\mathscr{E}} d(\epsilon_0, \rho) = \frac{F_{cr}}{\mathscr{E}}\, d(\epsilon_0, \rho)\lambda_c, \tag{37}$$

где $\lambda_c = \hbar/mc$, причем $d = 1 - \epsilon_0$ в случае чисто электрического поля, а для скрещенных полей

$$d = \frac{3\xi^2}{2\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{3}{8}\left(\sqrt{\epsilon_0^2 + 8} - 3\epsilon_0\right), \quad \rho = 1. \tag{38}$$

В более общем случае (20) имеем

$$d(\epsilon_0, \rho) = \frac{\rho^2 \epsilon_0 \tau_0\, \mathrm{th}(\tau_0/2)}{1 - \rho^2 \tau_0 \,\mathrm{cth}\, \tau_0}, \tag{39}$$

где $\tau_0$ определяется из уравнений (21) или (23). С ростом магнитного поля ширина барьера увеличивается, поэтому в данной задаче формула теории возмущений (31) применима при всех значениях параметра $\gamma$ (в отличие от многофотонной ионизации [1–3], где $b$ уменьшается пропорционально $\gamma^{-1}$ при $\gamma \gg 1$). При этом в области $\rho \geq 1$, где доминирует электрическое поле, зависимость от $\rho = \mathscr{E}/\mathscr{H}$ незначительна:

$$\frac{d(\epsilon_0, \rho = 1)}{d(\epsilon_0, \rho = \infty)} = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{18}(1 - \epsilon_0) + \ldots, & \epsilon_0 \to 1, \\ 3 \cdot 2^{-3/2} = 1.061, & \epsilon_0 = 0, \\ 1.125, & \epsilon_0 = -1. \end{cases} \tag{40}$$

При $E_b \sim m$ средний радиус связанного состояния $\langle r \rangle \sim \lambda_c \sqrt{1 - \epsilon_0^2}$ и $b/\langle r \rangle \sim \sim F_{cr}/\mathscr{E} \gg 1$, что обеспечивает применимость ММВ.

При наличии кулоновского взаимодействия данная выше оценка для $\langle r \rangle$ перестает быть справедливой, когда $\epsilon_0 \to -1$. Однако и в этом случае связанное состояние на краю нижнего континуума остается локализованным, причем $\langle r \rangle \sim \lambda_c$. Так, для основного уровня $1s_{1/2}$ в кулоновском поле $V(r) = -Z\alpha/r$ имеем [16–18]

$$\langle r \rangle = \frac{(1 + 0.3\zeta^2)(\zeta^2 - 3/4)}{\zeta^2(\zeta^2 - 3/4)} \lambda_c \approx \frac{1}{3}\lambda_c, \tag{41}$$

где $\zeta = Z_{cr}\alpha$, а $Z_{cr}$ — критический заряд ядра, при котором основной уровень электронного спектра опускается до границы нижнего континуума ($Z_{cr} = 169 \div 173$ и $\zeta^2 = 1.52 \div 1.59$ в зависимости от того, является ли ядро голым или внешние электронные оболочки заполнены).

Для нерелятивистских связанных состояний $\epsilon_0 = 1 - \alpha^2\kappa^2/2 \to 1$, $d = (\alpha\kappa)^2/2 \ll 1$ и ширина барьера равна

$$b(\mathscr{E}) = \frac{1}{2}\kappa^2\frac{\mathscr{E}_a}{\mathscr{E}}a_B, \qquad a_B = (m\alpha)^{-1}, \tag{42}$$

где $a_B$ — радиус Бора. Для нейтральных атомов $\langle r\rangle \sim \kappa^{-2}$ ($\kappa \sim 1/n, n$ — главное квантовое число), для отрицательных ионов $\langle r\rangle \sim \kappa^{-1}$. В итоге, $b/\langle r\rangle \sim \epsilon^{-1} \gg 1$.

**8. Гамильтонов метод.** Возможен несколько иной подход к проблеме туннелирования релятивистских частиц, который мы проиллюстрируем на примере скрещенных полей, $\mathscr{E} = \mathscr{H}$. Интегралами движения (в калибровке (13)) являются

$$P_x, \quad P_z \quad \text{и} \quad H = \sqrt{m^2 + (P_x + e\mathscr{E}y)^2 + P_y^2 + P_z^2} - e\mathscr{E}y = E_0, \tag{43}$$

где $H$ — гамильтониан, $E_0$ — начальная энергия уровня, $\mathbf{P}$ — обобщенный импульс (для экстремальной траектории $P_z = 0$), $P_y^2 = E_0^2 - m^2 - P_x^2 - 2e\mathscr{E}(E_0 - P_x)y$. Тем самым задача о туннелировании свелась к одномерной, поэтому с экспоненциальной точностью

$$w \propto \exp\left\{-2\int_0^{y_0}\sqrt{-P_y^2}\,dy\right\} = \exp\left(-\frac{2m^2}{e\mathscr{E}}J\right), \tag{44}$$

где $y_0$ — точка поворота и

$$J = \frac{(q^2 + 1 - \epsilon_0^2)^{3/2}}{3|q - \epsilon_0|}. \tag{45}$$

Минимизация функции $J(q, \epsilon_0)$ по переменной $q$ эквивалентна выделению из всего пучка подбарьерных траекторий экстремальной траектории. Имеются две точки минимума,

$$q_\pm = \frac{1}{4}\left(3\epsilon_0 \mp \sqrt{\epsilon_0^2 + 8}\right),$$

из которых $q_+$ отвечает ионизации электронного уровня:

$$J(q_+, \epsilon_0) = \frac{\sqrt{3}\,\xi^3}{1 + \xi^2}, \qquad \xi = \sqrt{(q_+ - \epsilon_0)^{-2} - 1}, \tag{46}$$

что полностью совпадает с (16), (17).

Для вычисления предэкспоненты $P$ запишем асимптотику невозмущенной волновой функции $s$-уровня в виде

$$\psi_0(r) \approx A\sqrt{\frac{\mu}{2\pi}}\frac{\exp(-\mu r)}{r} = \frac{A_\kappa\sqrt{\mu}}{2^{3/2}\pi^{5/2}}\int\frac{\exp(i\mathbf{pr})}{p^2 + \mu^2}d^3p, \qquad r \gg R, \tag{47}$$

где $\mu = m\sqrt{1 - \epsilon_0^2}$, $R$ — радиус действия сил (потенциал, связывающий $s$-уровень, предполагается короткодействующим) и мы не учитываем спин частицы. Вблизи оси $y$ (направление электрического поля) представим $\psi_0$ в виде

$$\psi_0 \approx \frac{A_\kappa}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^2p_\perp}{\sqrt{|p_y|}}\ \exp(-|p_y|y + i\mathbf{p}_\perp\boldsymbol{\rho}), \tag{48}$$

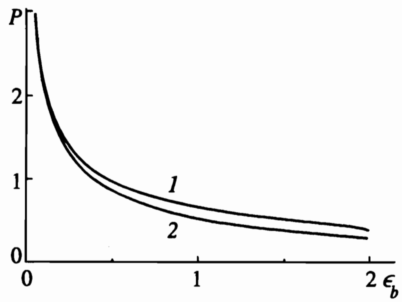


**Рис. 4.** Предэкспоненциальный множитель $P$ в зависимости от энергии связи уровня: *1* — в случае одного электрического поля; *2* — для скрещенных полей

удобным для сшивания с квазиклассическим решением уравнения Клейна–Гордона во внешнем поле, если $\mathbf{p}_\perp$ является интегралом движения (здесь $y \approx r \gg \rho$, $|p_y| \approx \approx \mu(1 + p_\perp^2/2\mu^2)$, а $\boldsymbol{\rho}$ и $\mathbf{p}_\perp$ – двумерные векторы в плоскости $xz$). Продолжая (48) через точку поворота $y_0$ и вычисляя поток частиц при $y \to \infty$, получаем

$$w = \frac{A_\kappa^2}{\sqrt{4\pi}} \int \frac{dP_x}{\sqrt{J_1(P_x)}} \exp\left\{ -\frac{2(\mu^2 + P_\perp^2)^{3/2}}{3e\mathscr{E}(E_0 - P_x)} \right\}, \tag{49}$$

где $P_\perp = (P_x, P_z)$,

$$J_1(P_x) = \int_0^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{\mu^2 + P_x^2 - 2e\mathscr{E}(E_0 - P_x)y}} = \frac{\sqrt{\mu^2 + P_x^2}}{e\mathscr{E}(E_0 - P_x)} \tag{48$'$}$$

и $E_0 - P_x > 0$. Разлагая здесь по $P_\perp^2$ и применяя метод перевала, приходим к формуле типа (6) для $w$, в которой экспоненту следует заменить на (17), а $1/\arccos\epsilon_0$ в предэкспоненте — на функцию

$$P(\epsilon_0, \rho = 1) = \left(\xi\ \sqrt{\xi^2 + 3}\right)^{-1}. \tag{50}$$

Зависимости предэкспоненты $P$ от энергии $\epsilon_0$ в этих двух случаях имеют близкий вид, см. рис. 4. В нерелятивистском пределе $P(\epsilon_0, \rho) = 1/\alpha\kappa + \ldots$ при любом $\rho > 0$.

Гамильтонов подход можно применять к полям более сложной конфигурации, однако этот вопрос выходит за рамки данной статьи.

**9. Замечание об эффекте Унру.** Уже более двадцати лет известно утверждение о том, что с точки зрения наблюдателя, движущегося по прямой с постоянным собственным ускорением $g$ (вследствие действия на него силы негравитационного происхождения), обычное вакуумное состояние в пространстве Минковского оказывается смешанным состоянием и описывается тепловой матрицей плотности с эффективной температурой Фуллинга–Унру [8, 29, 30]

$$T = \hbar g/2\pi c. \tag{51}$$

Это утверждение получило в литературе название эффекта Унру (см. [31–33] и указанные там ссылки). Фольклорным стало пояснение, что данный эффект обязан тому, что в системе покоя риндлеровского (т. е. равноускоренного) наблюдателя метрика[5)]

$$ds^2 = \rho^2 d\sigma^2 - d\rho^2 - dy^2 - dz^2, \quad -\infty < \sigma < \infty, \;\; 0 \le \rho < \infty \tag{52}$$

имеет горизонт. Поэтому риндлеровскому наблюдателю недоступна часть информации инерциального наблюдателя (относительно которого определяется вакуум Минковского), что и приводит к появлению смешанного состояния.

Недавно, однако, были выдвинуты аргументы [9] против существования эффекта Унру, суть которых сводится к следующему. Свободное квантованное (скалярное) поле $\varphi$ в пространстве Риндлера должно обращаться в нуль не только при $\rho \to \infty$, но также и при $\rho \to 0$, т. е. удовлетворять граничному условию $\varphi(\rho, \sigma)|_{\rho=0} = 0$ (которое соответствует непроницаемой стенке при $\rho = 0$, т. е. на границе многообразия Риндлера). А это означает, что задачи о квантовании поля $\varphi$ в пространствах Риндлера и Минковского совершенно различны (см. формулы (18)–(20) в работе [9]).

Наблюдаемым проявлением эффекта Унру являлось бы больцмановское распределение $p_n \propto \exp(-E_n/T)$ по энергетическим уровням равноускоренного детектора. Рассмотрим с этой точки зрения процесс ионизации тяжелого атома в постоянном и однородном электрическом поле $\mathscr{E}$. При этом собственное ускорение $g$ детектора (т. е. в данном случае атома или иона) постоянно, поскольку продольная компонента электрического поля не меняется при преобразованиях Лоренца:

$$g = \frac{Z-1}{A}\frac{\mathscr{E}}{\mathscr{E}_a} g_0, \qquad g_0 = \frac{m^2 e^6}{\hbar^4 m_p} = 4.93 \cdot 10^{21}\ \text{см} \cdot \text{с}^{-2}. \tag{53}$$

Здесь, как и выше (п. 6), через $Z$ мы обозначаем заряд «атомного остова», получающегося из атома (иона) при удалении одного электрона, $A = M/m_p$, а $m \equiv m_e$, $m_p$ и $M$ — массы электрона, протона и атома. Для температуры (51) получаем

$$T = \frac{|Z-1|}{A}\frac{\mathscr{E}}{\mathscr{E}_a} T_0, \tag{54}$$

где $\mathscr{E}_a = m^2 e^5/\hbar^4 = 5.14 \cdot 10^9$ В/см, $T_0 = m^2 e^4/\hbar^2 m_p = 1.72 \cdot 10^{-5}$ эВ (например, при $\mathscr{E} = \mathscr{E}_a$ и $A \approx 200$ температура $T \approx 10^{-7}$ эВ $\approx 10^{-3}$ К).

В силу принципа детального равновесия вероятность ионизации атома, находящегося в тепловой бане при температуре (54), равна

$$w^{(T)} \propto \exp\left(-\frac{\kappa^2}{2T}\right). \tag{55}$$

С другой стороны, согласно квантовой механике вероятность ионизации атомного уровня есть[6)]

---

[5)] Так называемая метрика Риндлера [34], при этом $x = \rho \operatorname{ch}\sigma$, $t = \rho \operatorname{sh}\sigma$. Отметим, что переход от глобальных координат $x, t$ к риндлеровским координатам $\rho, \sigma$ является преобразованием, сингулярным при $\rho = 0$ (что соответствует вершине светового конуса, $x = t = 0$, в плоском $1+1$-мерном пространстве-времени).

[6)] Здесь мы перешли к атомным единицам и отвлекаемся от предэкспоненциальных множителей в (55) и (56), поскольку эти формулы различаются между собой уже в экспоненте.

$$w^{(i)}(\mathscr{E},\kappa)\propto\exp\left(-\frac{2\kappa^3}{3\mathscr{E}}\right)=\exp\left(-k\frac{\kappa^3}{T}\right), \tag{56}$$

где $E_b=\kappa^2/2$ — энергия связи уровня, а $k$ — чрезвычайно малый коэффициент:

$$k=\frac{\alpha}{3\pi}\,\frac{|Z-1|m}{A\;m_p}\simeq 2\cdot 10^{-9}. \tag{57}$$

Сравнение (55) и (56) показывает, что (56) не является универсальным больцмановским распределением, поскольку даже зависимость от $\kappa$ (т. е. от энергии уровня) в этих двух формулах функционально различна.

Рассмотрим мысленный эксперимент. Как известно [19], под действием постоянного ускорения $g$ классическая частица движется по траектории:

$$x=x_0+\frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1+u^2}-\sqrt{1+u_0^2}\right),\qquad t=t_0+\frac{c}{g}(u-u_0),$$

$$v=\frac{cu}{\sqrt{1+u^2}},\qquad s=\frac{c}{g}(\mathrm{Arsh}\;u-\mathrm{Arsh}\;u_0)$$

($t$ — лабораторное время, $s$ — собственное время). Вследствие ионизации атом (ион) изменяет свой заряд ($Z\to Z+1$) в моменты $s=s_0,\ s_1,\ s_2,\ldots$, причем $s_0=\tau_0$, $s_1-s_0=\tau_1$, $s_2-s_1=\tau_2$ и т. д., $\tau_k=1/w_k^{(i)}(\mathscr{E},\kappa_k)$, и соответственно меняется его собственное ускорение $g_k$. Движение атома после $N$-кратной ионизации задается уравнениями

$$x=l_N+\frac{c^2}{g_N}(\mathrm{ch}\;\theta-\mathrm{ch}\;\theta_N),\quad t=t_N+\frac{c}{g_N}(\mathrm{sh}\;\theta-\mathrm{sh}\;\theta_N),\quad \theta>\theta_N,$$

где $\theta=\ln(u+\sqrt{1+u^2})$ — быстрота, $l_N$ и $t_N$ — соответственно суммарные пробег и время (для неподвижного наблюдателя) до момента $N$-кратной ионизации[7]:

$$\begin{gathered}l_N=\sum_{k=1}^{N}\Delta l_k=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{c^2}{g_k}(\mathrm{ch}\,\theta_{k+1}-\mathrm{ch}\,\theta_k),\quad t_N=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{c}{g_k}(\mathrm{sh}\,\theta_{k+1}-\mathrm{sh}\,\theta_k),\\ v_N=c\,\mathrm{th}\,\theta_N,\quad s_N=\sum_{k=0}^{N}\tau_k,\quad \theta_k=\theta_0+\frac{1}{c}\sum_{j=0}^{k-1}g_j\tau_j,\end{gathered} \tag{58}$$

$\Delta l_k$ — пробег $k$-го иона и $\theta_0$ соответствует начальной скорости атома. Используя квазиклассическую формулу для вероятности ионизации в электрическом поле $\mathscr{E}$, получаем (с точностью до константы порядка единицы)

$$\frac{g_k\tau_k}{c}\approx 4\cdot 10^{-6}\frac{|Z-1|}{A}\left(\frac{\mathscr{E}}{\mathscr{E}_a}\right)^{2\eta_k}\exp\left(\frac{2\kappa_k^3\mathscr{E}_a}{3\mathscr{E}}\right), \tag{59}$$

где $\eta_k=Z_k/\kappa_k$ — параметр Зоммерфельда для подбарьерного движения электрона.

---

[7] Для нейтрального атома на $k$-м участке траектории соответствующие слагаемые в (58) нужно заменить на $\Delta l_k=c\tau_k\mathrm{sh}\,\theta_k$ и $\Delta t_k=\tau_k\mathrm{ch}\,\theta_k$.

*Таблица 2*

**Последовательные стадии процесса ионизации (при $\mathscr{E} = 0.02\mathscr{E}_a \approx 10^8$ В/см)**

| | Атом или ион | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | U | $U^+$ | $U^{+2}$ | $Fe^-$ | Fe | $Fe^+$ |
| $I_k$, эВ | 6.194 | 11.9 | 20 | 0.398 | 7.900 | 16.19 |
| $\kappa_k$ | 0.674 | 0.935 | 1.2 | 0.171 | 0.762 | 1.091 |
| $Z_k$ | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 |
| $\tau_k^{(i)}$, с | 7.4(−16) | 5.5(−12) | 1.3 | 2.4(−16) | 6.5(−14) | 1.8(−4) |
| $\theta_k$ | 0 | 7.6(−5) | 3.6(7) | −1.4(−8) | −1.4(−8) | 1.1(4) |
| $\Delta l_k$, см | 0 | 6.2(-6) | $\infty$ | 5.1(−14) | 4.2(2) | $\infty$ |

*Примечание.* Времена жизни $\tau_k \equiv \tau_k^{(i)}$ рассчитаны по формуле (13) из [6], потенциалы ионизации $I_k$ взяты из справочника [35].

В табл. 2 приведены оценки времен жизни $\tau_k = 1/w_k^{(i)}$ в сопутствующей системе отсчета и пробегов $\Delta l_k$ для двух характерных случаев: при $t = 0$ имеется нейтральный атом урана либо отрицательный ион железа (считаем $\theta_0 = 0$ — вначале атом покоится). Отметим, что $Fe^-$ и Fe движутся в сторону, противоположную полю $\mathscr{E}$ (поэтому первые два параметра $\theta_k$ имеют отрицательный знак), а положительный ион $Fe^+$ сначала тормозится электрическим полем, а уже потом ускоряется вдоль $\mathscr{E}$. Из табл. 2 видно, что с ростом степени ионизации возрастают значения параметров $\kappa_k$, что приводит (см. экспоненту в (59)) к резкому увеличению времени жизни $\tau_k$. Пробеги $\Delta l_k$ возрастают еще быстрее, так как помимо увеличения времени жизни на них сказывается также релятивистское замедление времени:

$$s \sim \frac{c}{g} \ln \frac{gt}{c}, \quad \Delta\, l_k \sim \exp \theta_k \tag{60}$$

при $\theta_k \gg 1$. Поэтому при заданном поле достижима лишь небольшая степень ионизации. Например, для двухзарядного иона урана $U^{+2}$ при $\mathscr{E} = 0.02\mathscr{E}_a$ пробег $\Delta l_2 \sim \sim \exp(1.8 \cdot 10^7)$ см (!), что, разумеется, означает лишь, что этот ион всегда останется стабильным (в данном поле $\mathscr{E}$).

С другой стороны, эффект Унру дает для времени жизни величину $\tau^{(T)} = 1/w^{(T)}$, что для нейтрального атома урана составляет $\sim \exp(3 \cdot 10^9)$ с при $\mathscr{E} = 0.02\mathscr{E}_a$ и столь же огромные величины в остальных случаях[8]. Таким образом, время «тепловой» ионизации атома (детектора) неизмеримо больше, чем время его разрушения электрическим полем. Утверждение Унру [8] относится к детекторам любой природы, поэтому рассмотренный выше мысленный эксперимент является противоречащим ему контрпримером.

До сих пор мы рассматривали нерелятивистский случай, $E_b \ll m$. Не вдаваясь в достаточно тонкий вопрос о квантово-полевом описании релятивистских связанных состояний, заметим, что если при $E_b = m(1 - \epsilon_0) \sim m$ использовать формулу (6), то вместо (56) получаем

---

[8] Чудовищное различие между временами $\tau^{(i)}$ и $\tau^{(T)}$ объясняется малостью коэффициента $k$, входящего в экспоненту (56).

$$w^{(i)} \propto \exp\left\{-\frac{E_b}{T}\, f(E_b)\right\}, \tag{61}$$

где $f(E_b) = (m/2\pi M)\Phi(\epsilon_0)/(1-\epsilon_0)$. Утверждению Унру отвечало бы $f(E_b) \equiv 1$, что очевидным образом не выполняется.

Следует отметить, что Никишовым и Ритусом [36] было показано, что если в качестве детектора рассматривать элементарные частицы, то энергетический спектр их излучения, вообще говоря, не соответствует универсальному закону Унру. Тяжелый атом, для которого применимо квазиклассическое рассмотрение, в значительно большей мере удовлетворяет физическим требованиям, предъявляемым к детектору. Как видно из предыдущего, ускоряющее атом электрическое поле разрушает сам детектор, предназначенный для регистрации теплового излучения в сопутствующей системе отсчета.

**Заключение.** В статье развито обобщение ММВ на релятивистский случай. Вычисление подбарьерных траекторий, удовлетворяющих классическим уравнениям движения (однако с мнимым временем $t$ и потому невозможных в классической физике) позволяет использовать хорошо развитый аппарат аналитической механики и найти как экспоненту, так и кулоновский и предэкспоненциальный факторы в вероятности ионизации уровня, энергия связи которого произвольна ($0 < E_b < 2mc^2$), под действием электрического и магнитного полей. Полученные формулы охватывают, в качестве предельных случаев, как теорию ионизации нерелятивистских связанных систем (атомы, ионы), так и случай $E_b = 2mc^2$ (уровень на границе нижнего континуума, $Z = Z_{cr}$), когда эта вероятность сравнима по величине с вероятностью рождения электрон-позитронных пар из вакуума во внешнем поле. Отметим, что ММВ уже применялся ранее в задаче о нестабильности вакуума и рождении пар в сильном поле в квантовой электродинамике [24], а также в случае неабелевой калибровочной теории [37].

Выше рассматривалась система двух частиц с сильно различающимися массами (примером может служить электрон в поле тяжелого ядра). Возможность применения ММВ к релятивистским системам, состоящим из частиц с соизмеримыми массами ($q\bar{q}$, $qqq$ и др.), остается открытой.

Авторы благодарны участникам теоретических семинаров ИТЭФ и МИФИ за интересные обсуждения, С. Г. Позднякову за помощь в численных расчетах, а также М. Н. Маркиной за помощь в оформлении статьи. Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 95-02-05417 и № 98-02-17 007).

## *ПРИЛОЖЕНИЕ А*

Входящая в (26) функция $g_1$ равна

$$g_1(\gamma) = \frac{3\tau_0}{8\gamma^5}\, \frac{s^4 - 3s^3 - (s^3 - 6s^2 + 6s)\gamma^2 - (s-2)\gamma^4}{s^2 - (s-2)\gamma^2}, \tag{A.1}$$

где $s = 1-(\tau_0/\operatorname{sh}\tau_0)^2$, а $\tau_0 = \tau_0(\gamma)$ определяется из уравнения (28). Учитывая разложения

$$s = \frac{1}{2}\tau_0^2 - \frac{1}{15}\tau_0^4 + \ldots = \frac{1}{3}\gamma^2\left(1 - \frac{4}{45}\gamma^2 - \frac{8}{2835}\gamma^4 + \ldots\right), \quad \gamma \to 0, \tag{A.2}$$

$$s = 1 - 4\tau_0^2 e^{-2\tau_0} + ... = 1 - \exp\left[-(\gamma^2+1)\right]\gamma^4(1 + 2\gamma^{-2} + \gamma^{-4} + ...), \quad \gamma \to \infty, \tag{A.3}$$

приходим к следующим асимптотикам:

$$g(\gamma) = 1 + \frac{1}{30}\gamma^2 + \frac{11}{7560}\gamma^4 + ..., \quad g_1(\gamma) = \frac{3}{40}\left(1 - \frac{11}{378}\gamma^2 + ...\right), \quad \gamma \to 0, \tag{A.4}$$

$$g(\gamma) = \frac{3}{8}\gamma(1 + 2\gamma^{-2} + \gamma^{-4} + ...), \quad g_1(\gamma) = \frac{3}{16\gamma}(1 - \gamma^{-2} - 2\gamma^{-4} + ...). \tag{A.5}$$

В обоих случаях $g_1(\gamma) \ll g(\gamma)$, что подтверждается также численным счетом (см. рис. 3) и выполняется при всех $\gamma$.

## ПРИЛОЖЕНИЕ B

Обсудим вопрос об области применимости приближения (29). Определяя параметр $\kappa$ по соотношению[9] $\epsilon_0 = E_0/m = 1 - \alpha^2\kappa^2/2$, имеем

$$\kappa = \alpha^{-1}\sqrt{2(1-\epsilon_0)}, \qquad \alpha = e^2/\hbar c = 1/137. \tag{B.1}$$

Экспоненциальный множитель в (29) можно переписать в виде, аналогичном (24):

$$w(\mathscr{E}, \mathscr{H}) \propto \exp\left\{-\frac{F_{cr}}{\mathscr{E}}\,\tilde{\Phi}(\epsilon_0, \rho)\right\}, \tag{B.2}$$

где

$$\tilde{\Phi} = \frac{\sqrt{32}}{3}\,\epsilon_b^{3/2}\left[1 - \frac{3}{20}\left(1 - \frac{4}{9\rho^2}\right)\epsilon_b\right], \qquad \epsilon_b = 1 - \epsilon_0. \tag{B.3}$$

Это простое приближение имеет высокую точность даже в случае достаточно глубоких уровней; см. табл. 1, в которой $\delta$ — относительная ошибка выражения (B.3):

$$\delta \equiv \delta(\epsilon_0, \rho) = (\Phi - \tilde{\Phi})/\Phi. \tag{B.4}$$

Сравнение формул (29) и (30) показывает, что при $\rho \to 0$ меняется степень поля $\mathscr{E}$, поэтому приближение (29) неприменимо при $\mathscr{H} \gg \mathscr{E}$. Если же $\rho = \mathscr{E}/\mathscr{H} \gtrsim 0.5$, то область применимости формулы (29), полученной в нерелятивистском ($\kappa \lesssim 1$) пределе, «затягивается» вплоть до энергий $E_0 \approx -0.5mc^2$, т. е. до значений $\kappa \sim 200$ (см. табл. 1). Естественно, что формула (29) перестает быть применимой, когда уровень приближается к границе нижнего континуума; в этом случае ошибка составляет уже десятки процентов. Так, $\delta = 0.123$ и $-0.188$ соответственно для $\rho = 1$ и $\infty$ (при $\epsilon_0 = -1$).

## ПРИЛОЖЕНИЕ C

Здесь мы рассмотрим вычисление кулоновской поправки (31).

---

[9] При любой энергии уровня $E_0$. В нерелятивистском случае $E_0 = mc^2 - \kappa^2 me^4/2\hbar^2$ и $\kappa \sim 1$, см. табл. 1 в работе [6].

а) В случае электрического поля, записывая экстремальную ($p_\perp = 0$) траекторию в виде

$$z = \frac{m}{e\mathscr{E}}(\cos\varphi - \cos\varphi_0), \qquad 0 < \varphi < \varphi_0 = \arccos\epsilon_0, \tag{C.1}$$

используем значение интеграла

$$J(\varphi,\varphi_0) = \int\limits_0^{\varphi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi - \cos\varphi_0} = \varphi + \operatorname{ctg}\varphi_0 \ln\left[\frac{\sin\left[(\varphi_0+\varphi)/2\right]}{\sin\left[(\varphi_0-\varphi)/2\right]}\right]. \tag{C.2}$$

При $\varphi \to \varphi_0$

$$J(\varphi,\varphi_0) = -a\ln(\varphi_0 - \varphi) + a_0 + a_1(\varphi_0-\varphi) + \ldots, \tag{C.3}$$

где $a = \operatorname{ctg}\varphi_0$, $a_0 = \varphi_0 + \operatorname{ctg}\varphi_0 \ln(2\sin\varphi_0), \ldots$ Учитывая также, что $\eta = Z\alpha\operatorname{ctg}\varphi_0$,

$$z(t) = i\sqrt{1-\epsilon_0^2}\,\epsilon_0^{-1}(t-t_0) + \ldots = \frac{m}{e\mathscr{E}}(\varphi_0-\varphi)sin\varphi_0 + \ldots, \qquad t \to t_0,$$

$$\mu z_1 = (F_{cr}/\mathscr{E})(\varphi_0-\varphi_1)\sin^2\varphi_0 + \ldots,$$

находим

$$\eta\ln(\mu z_1) + iZ\alpha\int\limits_{t_1}^{0}\frac{dt}{z(t)} = \eta\left\{\varphi_0\operatorname{tg}\varphi_0 + \ln\left[\frac{F_{cr}}{\mathscr{E}}\frac{(\varphi_0-\varphi_1)\sin^3\varphi_0}{\sin\left[(\varphi_0-\varphi_1)/2\right]}\right\}\right.. \tag{C.4}$$

Полагая здесь $\varphi_1 \to \varphi_0$ (при этом точка сшивания $z_1 = z(t_1)$ выпадает из ответа), приходим к формуле (32).

В нерелятивистском пределе из (6), (32) следует (34). Если же $\epsilon_0 = 0$, то $\eta = 0$ и $Q = \exp(\pi Z\alpha)$=21.1 при $Z = 137$ (с учетом конечных размеров ядра значения $Z$ и $Q$ при $E(1s_{1/2}) = 0$ еще несколько возрастают [17, 18]).

б) Для скрещенных полей кулоновский интеграл (31) также выражается в элементарных функциях:

$$\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{a^2-\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sin 2\varphi_0}\ln\frac{\sin(\varphi_0+\varphi)}{\sin(\varphi_0-\varphi)}, \tag{C.5}$$

где $u = 3\sin\varphi$, $a = u_0/3 = \xi/\sqrt{3}$ и $\varphi_0 = \arcsin a$.

Учитывая, что в начале подбарьерного движения

$$r_1 = \frac{\sqrt{3}m}{e\mathscr{E}}\frac{\xi(3-\xi^2)}{\sqrt{1+\xi^2}}(\varphi_0-\varphi_1) + \ldots, \qquad \varphi_1 \to \varphi_0, \tag{C.6}$$

и значение интеграла (C.5), приходим к (35).

3) В случае взаимно перпендикулярных полей из (36) вытекает, что

$$r_0 = (\tau_0 - \tau)\frac{ma\rho\tau_0}{e\mathscr{H}(1-\rho^2)^{3/2}}\sqrt{1-\rho^2\left(\frac{1}{\tau_0} - \operatorname{cth}\tau_0\right)^2} + \ldots, \qquad \tau \to \tau_0$$

(считаем $\rho < 1$). Обозначая через $J_s$ сингулярную часть интеграла (31), имеем

$$J_s = Z\alpha \int\limits_{\tau_1} \frac{A}{\tau - \tau_0} d\tau, \qquad A = \frac{1 - \rho^2 \tau_0 \operatorname{cth} \tau_0}{\rho \tau_0 \sqrt{1 - \rho^2 - (\tau_0^{-1} - \operatorname{cth} \tau_0)^2}}. \tag{C.7}$$

Здесь $\tau_0$ определяется уравнением (25), из которого находим

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0^{-2} - 1}} = \frac{1 - \rho^2 \tau_0 \operatorname{cth} \tau_0}{\rho \left[2\tau_0 \operatorname{cth} \tau_0 - 1 - (\tau_0 / \operatorname{sh} \tau_0)^2 - \rho^2 \tau_0^2\right]^{1/2}} \equiv A. \tag{C.8}$$

Отсюда $\eta = Z\alpha A$ и $J_s = -\eta \ln(\tau_1 - \tau_0) + O(1)$. В итоге в (31) возникает слагаемое $\ln[\mu r_1/(\tau_1 - \tau_0)]$, имеющее конечный предел при $\tau_1 \to \tau_0$. После некоторых вычислений получаем регуляризованное выражение для кулоновской поправки:

$$Q = \exp\left\{2\eta \left[\ln\left(\frac{m^2}{e\mathscr{E}} \frac{1 - \epsilon_0^2}{\epsilon_0}\right) + \int\limits_0^{\tau_0} \left(\varphi(\tau) - \frac{1}{\tau_0 - \tau}\right)\right] d\tau\right\}, \tag{C.9}$$

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{\rho \tau_0} \left(1 - \rho^2 \tau_0 \frac{\operatorname{ch} \tau}{\operatorname{sh} \tau_0}\right) \left[(1 - \rho^2) \left(\frac{\operatorname{ch} \tau_0 - \operatorname{ch} \tau}{\operatorname{sh} \tau_0}\right)^2 - \left(\frac{\operatorname{sh} \tau}{\operatorname{sh} \tau_0} - \frac{\tau}{\tau_0}\right)^2\right]^{-1/2}, \tag{C.10}$$

в котором полюсные особенности взаимно сокращаются, и интеграл нетрудно найти численно. Этот пример показывает, что исключение точки сшивания $r_1$ в (31) иногда связано с довольно громоздкими преобразованиями, однако оно всегда может быть сделано, если выполняется условие $\langle r \rangle \ll b$.

## Литература


1. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев, ЖЭТФ **51**, 309 (1966).
2. В. С. Попов, В. П. Кузнецов, А. М. Переломов, ЖЭТФ **53**, 331 (1967).
3. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике*, Наука, Москва (1971).
4. В. С. Попов, А. В. Сергеев, Письма в ЖЭТФ **63**, 398 (1996).
5. V. S. Popov, B. M. Karnakov, and V. D. Mur, Phys. Lett. A **229**, 306 (1997).
6. В. С. Попов, Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, ЖЭТФ **113**, 1579 (1998).
7. Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, В. С. Попов, Письма в ЖЭТФ **65**, 391 (1997).
8. W. G. Unruh, Phys. Rev. D **14**, 870 (1976).
9. В. А. Белинский, Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, Н. Б. Нарожный, Письма в ЖЭТФ **65**, 861 (1997); **67**, 87 (1998).
10. В. С. Попов, В. Д. Мур, Б. М. Карнаков, Письма в ЖЭТФ **66**, 213 (1997); Preprint ITEP No. 44, Moscow (1997).
11. J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
12. C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, Vol. 1, Mc Graw-Hill, New York (1980).
13. Ю. Н. Демков, Г. Ф. Друкарев, ЖЭТФ **47**, 918 (1964).
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1974).
15. W. Pieper and W. Greiner, Z. Phys. **218**, 327 (1969).

16. В. С. Попов, Письма в ЖЭТФ **11**, 254 (1970); ЯФ **12**, 429 (1970).
17. Я. Б. Зельдович, В. С. Попов, УФН **105**, 403 (1971).
18. W. Greiner, B. Müller, and J. Rafelski, *Quantum Electrodynamics of Strong Fields*, Springer, Berlin (1985).
19. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).
20. С. П. Андреев, В. А. Полунин, Письма в ЖЭТФ **42**, 154 (1985).
21. V. Bargmann, L. Michel, and V. L. Telegdi, Phys. Rev. Lett. **2**, 435 (1959).
22. М. С. Маринов, В. С. Попов, ЯФ **15**, 1271 (1972); M. S. Marinov and V. S. Popov, Fortschr. Physik **25**, 373 (1977).
23. В. С. Ваняшин, М. В. Терентьев, ЖЭТФ **48**, 565 (1965).
24. В. С. Попов, Письма в ЖЭТФ **13**, 261 (1971); ЖЭТФ **61**, 1334 (1971).
25. Г. Ф. Друкарев, Б. С. Монозон, ЖЭТФ **61**, 956 (1971).
26. W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*, Mc Graw-Hill, New York (1950) (перевод: В. Смайт, *Электростатика и электродинамика*, ИИЛ, Москва (1954)).
27. В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин, *Сборник задач по электродинамике*, Физматгиз, Москва (1962), с. 394.
28. А. М. Переломов, В. С. Попов, ЖЭТФ **52**, 514 (1967).
29. S. A. Fulling, Phys. Rev. D **7**, 2850 (1973).
30. P. C. W. Davies, J. Phys. A **8**, 609 (1975).
31. N. D. Birrell and P. C. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press (1982).
32. В. Л. Гинзбург, В. П. Фролов, УФН **153**, 633 (1987).
33. Я. Б. Зельдович, Л. В. Рожанский, А. А. Старобинский, Письма в ЖЭТФ **43**, 407 (1986).
34. W. Rindler, Amer. J. Phys. **34**, 1174 (1966).
35. А. А. Радциг, Б. М. Смирнов, *Параметры атомов и атомных ионов*, Энергоатомиздат, Москва (1986).
36. А. И. Никишов, В. И. Ритус, ЖЭТФ **94**, 31 (1988).
37. Ш. С. Агаев, А. С. Вшивцев, В. Ч. Жуковский, ЯФ **36**, 1023 (1982).