ЖЭТФ, 1998, том 114, вып. 3(9), стр. 864–880

О КОГЕРЕНТНОМ ТОРМОЗНОМ ИЗЛУЧЕНИИ ГАРМОНИК В ЛАЗЕРНОЙ ПЛАЗМЕ

*В. П. Силин**

Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
117924, Москва, Россия

Поступила в редакцию 27 января 1998 г.

Дано теоретическое описание закономерностей генерации гармоник греющего излучения в плазме, определяющихся его поляризацией. Установлена яркая аномалия поляризации гармоник при малой степени круговой поляризации накачки. Установлено возрастание эффективности генерации гармоник. Обсуждено явление изменения поляризации накачки при ее обратном тормозном поглощении.

1. Интерес к генерации высоких гармоник лазерного излучения заметно возрос в связи с переходом к импульсам фемтосекундного диапазона, упростившим получение сильных лазерных полей [1–3]. Подобная генерация открывает возможность создания компактных источников жесткого когерентного ультрафиолетового и рентгеновского излучений [4, 5]. В этой связи естествен интерес к явлению генерации высоких гармоник в плазме, предсказанному в 1964 году в работе [6] (см. также [7–9]). Это явление обусловлено тормозным излучением электронов, когерентно колеблющихся в греющем плазму когерентном электромагнитном поле, при рассеянии электронов кулоновским полем ионов.

В настоящем сообщении указываются условия, обусловленные поляризацией греющего излучения, в которых, во-первых, генерация гармоник происходит более эффективно, чем это обсуждалось до сих пор, во-вторых, возникают новые своеобразные явления. Суть данных явлений в том, что когерентный ток генерации гармоник в соответствии с обычным законом тормозного излучения [6, 8] пропорционален вектору скорости и обратно пропорционален кубу модуля скорости. Для круговой поляризации модуль скорости осцилляций электрона не зависит от времени. Поэтому генерация гармоник подавлена. Для эллиптически поляризованного греющего излучения накачки возникают своеобразные закономерности. Если степень круговой поляризации мала, то в некоторый момент времени модуль скорости осцилляций электрона оказывается весьма малым. Примерно в тот же момент времени мала проекция скорости электрона на направление приблизительной линейной поляризации. Напротив, перпендикулярная проекция скорости не оказывается столь малой. С этим связано обсуждаемое ниже явление аномальной поляризации гармоник в плоскости, почти перпендикулярной плоскости поляризации накачки. С этим же связано обсуждаемое ниже аномальное увеличение эффективности генерации гармоник. Обнаруженные закономерности подобны зависимости от поляризации статической проводимости плазмы в поле мощного излучения [10]. Заметим, что в случае точной плоской поляризации на-

*E-mail: silin@sci.lpi.ac.ru

качки модуль скорости, как и сам вектор скорости осцилляций, обращаются в нуль в один и тот же момент времени. Только учет теплового движения позволял [6] получить непротиворечивое описание, которое проявлялось в эффекте порядка логарифма отношения большой амплитуды скорости осцилляций электрона к его тепловой скорости. Такой учет теплового движения и рассмотрение его конкуренции с поляризацией излучения позволили в настоящей статье построить последовательную теорию усиления эффективности генерации гармоник и описать их поляризационные свойства. В связи с важностью влияния поляризации греющего излучения дана теория нелинейного изменения его поляризации при обратном тормозном поглощении.

2. Будем рассматривать плазму в поле эллиптически поляризованного излучения $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$, где

$$E_x = e_x E \cos(\omega t - \varphi_x), \quad E_y = -e_y E \sin(\omega t - \varphi_x). \tag{2.1}$$

Здесь E — действительная амплитуда напряженности электрического поля, e_α ($\alpha = x, y$) характеризуют поляризацию греющего плазму излучения (2.1), $e_x^2 + e_y^2 = 1$ и для простоты принимается $e_x \geq e_y \geq 0$. Поляризационный тензор [11] такого излучения имеет вид

$$R_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} e_x^2 & ie_x e_y \\ -ie_x e_y & e_y^2 \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1-\xi_3 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Это, очевидно, означает, что соответствующие параметры Стокса равны: $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = -2e_x e_y$, $\xi_3 = e_z^2 - e_y^2$. В дальнейшем полезно использовать степень круговой поляризации $A \equiv \xi_2$, а также степень максимальной линейной поляризации $\rho^2 \equiv L = \sqrt{\xi_3^2} = \sqrt{1 - A^2}$ [11].

В электрическом поле (2.1) электрон осциллирует со скоростью $\mathbf{u}_E = (u_{Ex}, u_{Ey}, 0)$, где

$$u_{Ex} = -v_E e_x \sin(\omega t - \varphi_x), \quad u_{Ey} = -v_E e_y \cos(\omega t - \varphi_x). \tag{2.3}$$

Здесь

$$v_E = \left(|e|E/m\omega\right) \tag{2.4}$$

характеризует амплитуду осцилляций скорости, e — заряд, m — масса электрона. Поле будем называть слабым тогда, когда скорость (2.3) мала по сравнению с тепловой скоростью электронов $v_T = \sqrt{\kappa_B T/m}$. Напротив, в условиях

$$v_E \gg v_T \tag{2.5}$$

будем говорить о сильном поле излучения.

Частоту греющего плазму излучения будем считать много большей эффективной частоты столкновений электронов с ионами. Для последней в случае слабого поля имеет место обычное выражение (ср., например, [12]):

$$\nu_{ei} = \frac{4\sqrt{2\pi}\, Ze^4 n_e \Lambda}{3m^2 v_T^3}. \tag{2.6}$$

Здесь

$$Z = \sum_i (e_i^2 n_i / e^2 n_e),$$

суммирование ведется по всем сортам ионов, e_i — заряд иона, n_e и n_i — плотности числа электронов и ионов, Λ — кулоновский логарифм. В противоположном пределе сильного поля для эффективной электрон-ионной частоты столкновений имеем [6–8, 10]

$$\nu(E) = \frac{8\pi\sqrt{2}\,Ze^4 n_e \Lambda}{m^2 v_E^3}. \tag{2.7}$$

По сравнению с (2.6) эта частота столкновений оказывается много меньшей в силу (2.5). Подчеркнем, что в случае (2.7) кулоновский логарифм отнюдь не совпадает с соответствующим выражением в пределе слабого поля (см. ниже).

В отличие от работы [6] воспользуемся упрощенным подходом работы [8], в соответствии с которой для описания электрон-ионных столкновений будем использовать интеграл столкновений в форме Фоккера–Планка–Ландау:

$$J_{ei}[f] = \frac{2\pi Ze^4 n_e \Lambda}{m^2}\frac{\partial}{\partial v_r}\left(\frac{v^2\delta_{rs} - v_r v_s}{v^3}\frac{\partial f}{\partial v_s}\right), \tag{2.8}$$

где $f(\mathbf{v})$ — электронная функция распределения. В (2.8) пренебрежено малыми порядка отношения масс электрона и иона. При использовании такого подхода ниже нам придется эвристически вводить зависимость кулоновского логарифма от электрического поля. В то же время несомненным положительным элементом такого подхода является сравнительная простота и очевидность получаемых результатов.

Взаимодействие излучения с плазмой в дипольном приближении отвечает пренебрежению пространственной зависимостью поля и функции распределения. Соответственно кинетическое уравнение Больцмана может быть записано в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{e}{m}\mathbf{E}(t)\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = J_{ee} + J_{ei}[f]. \tag{2.9}$$

Здесь J_{ee} — электрон-электронный интеграл столкновений, вид которого нам не потребуется.

Положение о высокой частоте греющего плазму излучения позволяет в нулевом приближении пренебречь правой частью уравнения (2.9). Уравнение нулевого приближения

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{e}{m}\mathbf{E}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0 \tag{2.10}$$

имеет решение

$$f_0(\mathbf{v}, t) = F\left(\mathbf{v} - \mathbf{u}_E(t)\right). \tag{2.11}$$

Ниже будем считать $F(\mathbf{u}) = f_M(u)$, где $f_M(u)$ — максвелловское распределение с температурой T. Из формулы (2.11) вытекает следующее выражение для нулевого приближения плотности электрического тока:

$$\mathbf{j}_0 = en_e\mathbf{u}_E(t). \tag{2.12}$$

Кинетическое уравнение для поправки к функции распределения электронов

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \frac{e}{m}\mathbf{E}\frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{v}} = J_{ee} + J_{ei}\left[f_0(\mathbf{v}, t)\right] \tag{2.13}$$

умножим на заряд электрона, вектор его скорости $\mathbf{v}$ и проинтегрируем по пространству скоростей. Тогда, учитывая, что $\int d\mathbf{v}\,\delta f = 0$, для возмущения $\delta\mathbf{j}$ плотности электрического тока получаем

$$\frac{\partial \delta\mathbf{j}}{\partial t} = -\frac{4\pi Z e^4 n_e \Lambda}{m^2} \int d\mathbf{v} \frac{e\mathbf{v}}{v^3} F(\mathbf{v} - \mathbf{u}_E(t)). \tag{2.14}$$

Правая часть (2.14) обусловлена столкновениями электронов с ионами. Электрон-электронный интеграл столкновений вклада не дает в силу закона сохранения импульса при столкновениях. Анализ следствий формулы (2.14) составит последующее содержание настоящей работы.

3. Для описания генерации гармоник греющего плазму излучения следует представить (2.14) в виде разложения в ряд Фурье. Для этого прежде всего воспользуемся соотношением

$$\frac{\mathbf{v}}{v^3} = -\int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{4\pi i\mathbf{q}}{q^2} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{v}). \tag{3.1}$$

Эта формула при использовании в качестве $F(\mathbf{u})$ максвелловского распределения позволяет представить уравнение (2.14) в следующем виде;

$$\frac{\partial \delta\mathbf{j}}{\partial t} = \frac{Z e^4 n_e \Lambda}{2\pi^2 m^2} e n_e \int d\mathbf{q} \frac{i\mathbf{q}}{q^2} \exp\left[-\frac{1}{2} v_T^2 q^2 + i\mathbf{q}\mathbf{u}_E(t)\right]. \tag{3.2}$$

Если использовать в пространстве $\mathbf{q}$ сферические координаты $\mathbf{q} = (q, \theta, \varphi)$, то можно представить

$$\mathbf{q}\mathbf{u}_E = -q v_E \sin\theta \left[\delta_+ \sin(\omega t - \varphi_x + \varphi) + \delta_+ \sin(\omega t - \varphi_x - \varphi)\right], \tag{3.3}$$

где $\delta_\pm = (1/2)(e_x \pm e_y)$. Такая запись в соответствии с [13, с. 987, ф. 8.511.3] позволяет записать

$$\exp(i\mathbf{q}\mathbf{u}_E) = \sum_{k,l=-\infty}^{+\infty} J_l(q v_E \delta_+ \sin\theta) J_k(q v_E \delta_- \sin\theta) \exp\{i(k+l)(\omega t - \varphi_x) + i(l-k)\varphi\}, \tag{3.4}$$

где $J_l(z)$ — функции Бесселя. Отсюда очевидна конструктивная возможность представить (3.2) в виде ряда Фурье. Необходимые преобразования приведены в Приложении 1. В результате получаем:

$$\frac{\partial \delta j_x}{\partial t} = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_{xx}^{(2l+1)} \frac{\partial}{\partial t} e_x E \cos[(2l+1)(\omega t - \varphi_x)], \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial \delta j_y}{\partial t} = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_{yy}^{(2l+1)} \frac{\partial}{\partial t} (-e_y E) \sin[(2l+1)(\omega t - \varphi_x)], \tag{3.6}$$

$$\sigma_{xx}^{(2l+1)} = \frac{\omega_{Le}^2 \nu(E,l)}{4\pi(2l+1)\omega^2} \left[A_l\left(\rho^2, \frac{v_E}{2v_T}\right) - A_{l+1}\left(\rho^2, \frac{v_E}{2v_T}\right)\right], \tag{3.7}$$

$$\sigma_{yy}^{(2l+1)} = \frac{\omega_{Le}^2 \nu(E,l)}{4\pi(2l+1)\omega^2} \left[A_l\left(\rho^2, \frac{v_E}{2v_T}\right) + A_{l+1}\left(\rho^2, \frac{v_E}{2v_T}\right)\right]. \tag{3.8}$$

Здесь $\omega_{Le} = \sqrt{4\pi e^2 n_e/m}$ — электронная ленгмюровская частота, функции $A_l(\rho^2, N)$ согласно формуле (П.1.8) определяются следующим однократным интегралом:

$$A_l(\rho^2, N) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{N^2} dz \sqrt{z}\, e^{-z} I_l(\rho^2 z). \tag{3.9}$$

Последняя формула, как мы увидим, весьма удобна для необходимого анализа.

Следует остановиться на частоте столкновений $\nu(E, l)$, которая при

$$(2l+1)\omega > \omega_{Le} \tag{3.10}$$

может зависеть от номера гармоники благодаря кулоновскому логарифму. Возникающий в логарифмическом приближении Ландау кулоновский логарифм определяется отношением максимального и минимального прицельных параметров $\Lambda = \ln(r_{max}/r_{min})$, ограничивающих область существенного вклада столкновений (см. [12]). Максимальный прицельный параметр определяется отношением скорости электрона к характерной частоте. В случае слабого низкочастотного поля это — отношение тепловой скорости к ленгмюровской частоте, равное радиусу дебаевского экранирования кулоновского поля. В случае слабого поля, но столь высоких частот, что $\omega > \omega_{Le}$, как это было установлено в работах [14–16], для максимального прицельного параметра возникает отношение тепловой скорости к частоте. В нашем пределе сильного поля естественно считать $r_{max} \simeq [v_E/(2l+1)\omega]$. Минимальный прицельный параметр определяется наибольшим из двух значений: $r_{min,cl} = (Ze^2/mv_E^2)$ — классического предельного прицельного параметра, ограничивающего область малых передаваемых импульсов, или $r_{min,qu} = \hbar/mv_E$ — квантового ограничения снизу прицельных параметров логарифмического приближения Ландау. Здесь $\hbar$ — постоянная Планка. Таким образом, при (3.10) имеем

$$\Lambda = \ln \frac{mv_E^2}{\hbar\omega(2l+1)}, \quad v_E > \frac{Ze^2}{\hbar} \quad \text{или} \quad \Lambda = \ln \frac{mv_E^3}{Ze^2\omega(2l+1)}, \quad v_E < \frac{Ze^2}{\hbar}. \tag{3.11}$$

Уменьшение кулоновского логарифма при больших номерах гармоник может быть одной из причин обрывания рядов (3.5), (3.6).

Остановимся на некоторых общих следствиях уравнений (3.5) и (3.6). Заметим, что при $l = 0$ можно записать тензор диссипативной проводимости, определяемый соотношением

$$\delta j_\alpha^{(1)} = \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} E_\beta. \tag{3.12}$$

При этом имеем $\sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{yx}^{(1)} = 0$ и

$$\sigma_{xx}^{(1)} = \frac{e^2 n_e}{m\omega^2} \nu(E, 0) \left[A_0 \left(\rho^2, \frac{v_E}{2v_T} \right) - A_1 \left(\rho^2, \frac{v_E}{2v_T} \right) \right], \tag{3.13}$$

$$\sigma_{yy}^{(1)} = \frac{e^2 n_e}{m\omega^2} \nu(E, 0) \left[A_0 \left(\rho^2, \frac{v_E}{2v_T} \right) + A_1 \left(\rho^2, \frac{v_E}{2v_T} \right) \right]. \tag{3.14}$$

Помимо нелинейной зависимости такого тензора проводимости от интенсивности греющего плазму излучения существенна и нелинейная зависимость от поляризации, что проявляется в анизотропии тензора диссипативной проводимости.

Остановимся теперь на интенсивности генерируемых гармоник ($l > 0$). При этом будем считать

$$\varphi_x = kz \tag{3.15}$$

и соответственно

$$k^2 = \omega^2 - \omega_{Le}^2. \tag{3.16}$$

Пренебрегая диссипацией, из уравнений Максвелла для поля гармоник имеем (ср. [8])

$$E_x^{(2l+1)} = -e_x E \frac{\nu(E,l)}{4l(l+1)\omega}\left[A_l\left(\rho^2, \frac{v_E}{2v_T}\right) - A_{l+1}\left(\rho^2, \frac{v_E}{2v_T}\right)\right] \sin\left[(2l+1)(\omega t - kz)\right], \tag{3.17}$$

$$E_y^{(2l+1)} = -e_y E \frac{(2l+1)\nu(E,l)}{4l(l+1)\omega}\left[A_l\left(\rho^2, \frac{v_E}{2v_T}\right) + A_{l+1}\left(\rho^2, \frac{v_E}{2v_T}\right)\right] \cos\left[(2l+1)(\omega t - kz)\right]. \tag{3.18}$$

Отнеся усредненный по времени квадрат электрического вектора (3.17), (3.18) к усредненному квадрату электрического вектора накачки (2.1) $\overline{(\mathbf{E})^2} = E^2/2$, получаем

$$\eta^{(2l+1)} = \frac{\overline{(E^{(2l+1)})^2}}{\overline{(E)^2}} = \frac{\nu^2(E,l)}{16l^2(l+1)^2\omega^2} B_l\left(\rho^2, \frac{v_E}{2v_T}\right), \tag{3.19}$$

где

$$B_l(\rho^2, N) = A_l^2(\rho^2, N) + A_{l+1}^2(\rho^2, N) - 2\rho^2 A_l(\rho^2, N) A_{l+1}(\rho^2, N). \tag{3.20}$$

Выражение (3.19) характеризует эффективность генерации гармоник. Необходимо подчеркнуть, что правая часть (3.19) зависит от квадрата плотности плазмы (ср. [8]). Зависимость интенсивности излучения гармоник от поляризации и интенсивности накачки определяется выражением (3.20), которое мы изучим ниже. Приведем выражение для определяющихся формулами (3.17) и (3.18) параметров Стокса, характеризующих поляризацию гармоник ($l > 0$). Прежде всего укажем, что $\xi_1^{(2l+1)} = 0$. Это означает, что гармоники, как и накачка, полностью эллиптически поляризованы. Далее имеем

$$\xi_2^{(2l+1)} \equiv A^{(2l+1)} = \xi_2 \frac{A_l^2(\rho^2, v_E/2v_T) - A_{l+1}^2(\rho^2, v_E/2v_T)}{B_l(\rho^2, v_E/2v_T)}, \tag{3.21}$$

$$\xi_3^{(2l+1)} = \\ = \frac{\xi_3\left[A_l^2(\rho^2, v_E/2v_T) + A_{l+1}^2(\rho^2, v_E/2v_T)\right] - 2A_l(\rho^2, v_E/2v_T) A_{l+1}(\rho^2, v_E/2v_T)}{B_l(\rho^2, v_E/2v_T)}, \tag{3.22}$$

где $A^{(2l+1)}$ — степень круговой поляризации $(2l+1)$-ой гармоники. Последующий конкретный анализ продемонстрирует своеобразие закономерностей, описываемых этими общими выражениями.

4. В этом разделе рассмотрим асимптотические свойства полученных в предыдущем разделе соотношений, когда неравенство (2.4) выполнено настолько хорошо, что можно принять $v_E/v_T \to \infty$. Пренебрегая полностью тепловым движением, можно воспользоваться асимптотическим результатом (П.1.10). Это отвечает тому, что

$$A_l(\rho^2, \infty) \equiv A_l^{(3/2)}(\rho^2) = \frac{\Gamma(3/2 - l)}{|A|^{3/2}\Gamma(3/2)} P_{1/2}^l\left(\frac{1}{|A|}\right), \tag{4.1}$$

где $\Gamma(z)$ — функция Эйлера, $P_\nu^l(z)$ — функция Лежандра. Формула (4.1) соответствует коэффициентам, возникающим при разложении в ряд Фурье решений уравнения Лапласа [10, 17, § 33], [18, ф. (3.10)]. Функции Лежандра могут быть выражены через полные эллиптические интегралы $\mathbf{E}(k)$ и $\mathbf{K}(k)$. Соответствующие выражения, полученные на основании [18, 19], приведены в Приложении 2. Они полезны для описания свойств гармоник с небольшими номерами. Так, например, для характеристики интенсивности третьей гармоники соответствующее выражение (3.20) можно представить в следующем виде:

$$B_1(\rho^2,\infty) = \frac{4(1+\rho^2)}{\pi^2\rho^8(1-\rho^4)^2}\left\{[16-31\rho^4+15\rho^8]\,\mathbf{E}^2\left(\sqrt{\frac{2\rho^2}{1+\rho^2}}\right) + (1-\rho^2)^2(16-7\rho^4)\times\right.$$
$$\left.\times\,\mathbf{K}^2\left(\sqrt{\frac{2\rho^2}{1+\rho^2}}\right) - 2(16-9\rho^4+3\rho^8)(1-\rho^2)\mathbf{E}\left(\sqrt{\frac{2\rho^2}{1+\rho^2}}\right)\mathbf{K}\left(\sqrt{\frac{2\rho^2}{1+\rho^2}}\right)\right\}. \quad (4.2)$$

При немалой степени круговой поляризации A греющего излучения (или, что то же самое, при существенном отличии максимальной степени линейной поляризации ρ^2 от единицы) число генерируемых гармоник невелико. Это легко видеть из формулы (П.3.12) Приложения 3. Напротив, число генерируемых в плазме гармоник становится большим при малых значениях степени круговой поляризации греющего излучения,

$$|A| \ll 1, \quad (4.3)$$

когда можно говорить о почти плоской поляризации. В пределе (4.3) необходимы асимптотические формулы для функций Лежандра. Соответствующие выражения приведены в Приложении 3.

Обратимся первоначально к рассмотрению третьей гармоники ($l = 1$) в пределе (4.3). С помощью формулы (П.3.4) можем записать:

$$A_1^{(3/2)}(\rho^2) - A_2^{(3/2)}(\rho^2) = \frac{3}{\pi\sqrt{2}}\left\{\ln\frac{64}{A^2} - \frac{14}{3}\right\}, \quad (4.4)$$

$$A_1^{(3/2)}(\rho^2) + A_2^{(3/2)}(\rho^2) = \frac{2^{5/2}}{\pi A^2}. \quad (4.5)$$

Это позволяет, в частности, получить для (3.20)

$$B_1(\rho^2,\infty) = 8/\pi^2A^2. \quad (4.6)$$

Тем самым для эффективности генерации третьей гармоники имеем:

$$\eta^{(3)} = \frac{1}{8\pi^2A^2}\frac{\nu^2(E,1)}{\omega^2}. \quad (4.7)$$

Наличие в знаменателе формулы (4.7) квадрата малой степени круговой поляризации свидетельствует о важном явлении усиления генерации при малом отличии поляризации греющей накачки от плоской.

Обратимся теперь к рассмотрению поляризации третьей гармоники. В соответствии с формулами (3.21), (3.22) и выражениями (4.4) и (4.5) получаем

$$A^{(3)} = \xi_2^{(3)} = 3A\left[\ln\frac{8}{|A|} - \frac{7}{3}\right], \tag{4.8}$$

$$\xi_3^{(3)} \simeq -\left(1 - \frac{1}{2}\left[\xi_2^{(3)}\right]^2\right) \approx -1. \tag{4.9}$$

Формула (4.9) указывает в силу малости $\xi_2^{(3)}$ на то, что поляризация гармоники, как и греющего излучения, является почти плоской. Однако общий знак минус в формуле (4.9) означает, что если накачка поляризована почти вдоль оси x, то гармоника поляризована перпендикулярно, т.е. почти вдоль оси y. Это замечательное свойство резко контрастирует с результатом теории генерации гармоник плоскополяризованным излученная, когда гармоники оказывались поляризованными в плоскости поляризации накачки [6]. На другое важное свойство поляризации гармоники указывает формула (4.8), согласно которой степень круговой поляризации третьей гармоники логарифмически ($\ln|A|$) превышает степень круговой поляризации накачки.

Обратимся теперь к рассмотрению свойств высоких гармоник. Прежде всего следует указать, что для высоких гармоник формула (3.20) сводится к (4.6). Поэтому для эффективности генерации всех гармоник в холодной плазме при условии (4.3) имеем

$$\eta^{(2l+1)} = \frac{\nu^2(E,l)}{2\pi^2 l^2 (l+1)^2 \omega^2 A^2}. \tag{4.10}$$

Общей формулой для степени круговой поляризации гармоник при выполнении условия (4.3) является

$$A^{(2l+1)} = A\left\{(2l+1)\left[\ln\frac{2}{|A|} - \psi\left(l+\frac{3}{2}\right) - C\right] + 1 - \frac{2}{2l+3}\right\}. \tag{4.11}$$

Ясно, что логарифмическое ($\ln|A|$) увеличение круговой поляризации является общим свойством. Для высоких гармоник, когда $l \gg 1$, из (4.11) следует

$$A^{(2l+1)} = Al\left[\ln\frac{4}{A^2 l^2} - 2C\right]. \tag{4.12}$$

Отсюда следует свойство роста круговой поляризации гармоник с увеличением их номера. Следует подчеркнуть, что правая часть (4.12) остается малой по сравнению с единицей. Последнее утверждение прежде всего связано с тем, что асимптотическое представление (П.3.4) пригодно только при выполнении условия

$$A^2 l^2 \ll 1. \tag{4.13}$$

Малость левой части (4.13) является свидетельством аномального увеличения эффективности генерации высоких гармоник по сравнению со случаем плоской поляризации (ср. [6, 8]).

При нарушении неравенства (4.13) для коэффициентов $A_l^{(3/2)}(\rho^2)$ имеет место асимптотическое представление (П.3.13), согласно которому можно утверждать, что если зависимость кулоновского логарифма от l не приводит к обрыванию рядов гармоник (3.5), (3.6), то в рассматриваемом приближении холодной плазмы такой обрыв резко (экспоненциально) возникает при $l \sim |A|^{-1}$.

5. Установив важную роль поляризации греющего плазму излучения, укажем теперь на вытекающее из нашего рассмотрения нелинейное изменение такой поляризации по мере поглощения излучения. Для этого рассмотрим основную гармонику, для плотности тока $\mathbf{j}^{(1)}$ которой согласно (2.11), (3.12) можно записать

$$\frac{\partial j_\alpha^{(1)}}{\partial t} = \frac{\omega_{Le}^2}{4\pi} E_\alpha + \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} \frac{\partial E_\beta}{\partial t}, \tag{5.1}$$

где $\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}$ дается формулами (3.13), (3.14). Поскольку вектор электрического поля накачки подчиняется уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial \mathbf{j}^{(1)}}{\partial t}, \tag{5.2}$$

то, учитывая (3.15) и (3.16) и считая e_α и E медленными функциями координаты z, получаем для них следующие укороченные уравнения:

$$\frac{1}{E}\frac{dE}{dz} = -\frac{2\pi\omega}{kc^2}\left(\sigma_{xx}^{(1)} e_x^2 + \sigma_{yy}^{(1)} e_y^2\right) = -\frac{\omega_{Le}^2 \nu(E,0)}{2kc^2\omega}\left[A_0^{(3/2)}(\rho^2) - \rho^2 A_1^{(3/2)}(\rho^2)\right], \tag{5.3}$$

$$\frac{d\rho^2}{dz} = -\frac{2\pi\omega}{kc^2}(1-\rho^4)\left(\sigma_{xx}^{(1)} - \sigma_{yy}^{(1)}\right) = \frac{\omega_{Le}^2 \nu(E,0)}{kc^2\omega}(1-\rho^4) A_1^{(3/2)(\rho^2)}. \tag{5.4}$$

Если воспользоваться формулами (П.2.3), то уравнение (5.3) принимает вид

$$\frac{1}{E}\frac{dE}{dz} = -\frac{\omega_{Le}^2 \nu(E,0)}{\pi kc^2\omega\sqrt{1+\rho^2}} \mathbf{K}\left(\sqrt{\frac{2\rho^2}{1+\rho^2}}\right), \tag{5.5}$$

что отвечает нелинейно зависящему от поляризации излучения закону поглощения сильного поляризованного излучения в плазме, установленному в [10]. В том случае, когда выполнено условие (4.3), из (5.5) следует

$$\frac{1}{E}\frac{dE}{dz} = -\frac{\omega_{Le}^2 \nu(E,0)}{\omega kc^2\pi\sqrt{2}} \ln\frac{8}{|A|} \equiv \frac{1}{\zeta(E,A)}, \tag{5.6}$$

где $\zeta(E,A)$ — характерная длина поглощения. Если пренебречь относительно слабыми логарифмическими зависимостями, то для закона убывания поля имеем

$$E^3(z) \simeq E^3(0) - 3z/\zeta\left(E(0), A(0)\right). \tag{5.7}$$

Уравнение (5.4) описывает изменение степени максимальной линейной поляризации $L \equiv \rho^2$ греющего излучения по мере его поглощения при углублении в плазму ($z > 0$). Положительность $A_1^{(3/2)}(\rho^2)$ отвечает тому, что L при этом увеличивается. Такое свойство отвечает зависимости поляризации греющего излучения от его интенсивности, характеризуемой следующим нелинейным уравнением:

$$E\frac{d\rho^2}{dE} = -\pi(1-\rho^4)\sqrt{1+\rho^2}\, A_1^{(3/2)}(\rho^2)\left[\mathbf{K}\left(\sqrt{\frac{2\rho^2}{1+\rho^2}}\right)\right]^{-1}. \tag{5.8}$$

Особенно просто выглядит решение этого уравнения в случае (4.3), когда уравнение (5.8) приближенно сводится к

$$\frac{dE}{4E} = \ln\frac{64}{A^2} d\left(\frac{A^2}{64}\right). \tag{5.9}$$

Отсюда вытекает следующий закон убывания степени круговой поляризации греющего плазму излучения при его обратном тормозном поглощении:

$$\frac{A^2(z)}{64}\left[\ln\frac{64}{A^2(z)} + 1\right] = \frac{A^2(0)}{64}\left[\ln\frac{64}{A^2(0)} + 1\right] - \frac{1}{4}\ln\frac{E(0)}{E(z)}. \tag{5.10}$$

Физическая причина такого явления связана с анизотропией диссипативного тензора проводимости (3.13), (3.14), для которого в случае (4.3) для холодной плазмы имеем

$$\sigma_{xx}^{(1)} = \frac{e^2 n_e}{m\omega^2}\nu(E,0)\frac{2^{1/2}}{\pi}\left[\ln\frac{8}{|A|} - 1\right], \quad \sigma_{yy}^{(1)} = \frac{e^2 n_e}{m\omega^2}\nu(E,0)\frac{2^{5/2}}{\pi A^2}. \tag{5.11}$$

При этом очевидно, что y-компонента поля относительно эффективнее поглощается по сравнению с x-компонентой. Это и ведет к росту максимальной степени линейной поляризации.

6. Установив в модели холодной плазмы ряд ярко выраженных нелинейных поляризационных свойств, следует теперь перейти к рассмотрению роли теплового движения частиц. Это позволит устранить возникшую парадоксальность, обеспечить переход к случаю плоской поляризации накачки, позволит определить количественную величину обнаруженных аномалий. Для этого обратимся к формуле (3.9) для $A_l(\rho^2, N)$, где $N = v_E/2v_T \gg 1$ согласно (2.4).

Формулу (3.9) можно переписать в виде

$$A_l(\rho^2, N) = A_l^{(3/2)}(\rho^2) - \delta a_l(A^2, N), \tag{6.1}$$

где

$$\delta a_l(A^2, N) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{N^2}^{\infty} dz\sqrt{z}\,e^{-z} I_l\left(\sqrt{1-A^2}\,z\right). \tag{6.2}$$

Для сильного греющего плазму поля в силу условия (2.4) под интегралом (6.2) можно использовать асимптотическое разложение функции $I_l(\rho^2 z)$ [13, ф. 8.451.5]. В результате получаем

$$\delta a_l(A^2, N) = \frac{2^{3/2}}{\pi}\left\{\frac{1}{A^2}\exp\left(-\frac{A^2N^2}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(l^2 - \frac{1}{4}\right)E_1\left(\frac{A^2N^2}{2}\right)\right\}, \tag{6.3}$$

где $E_1(z)$ — интегральная показательная функция [19, ф. 5.1.1]. При этом опущены малые в таком асимптотическом разложении слагаемые $\sim l^2A^2v_T^2/v_E^2$.

Поскольку при $z \gg 1$ имеем $E_1(z) \sim z^{-1}\exp(-z)$, то очевидно, что (6.3) экспоненциально мало при

$$N^2A^2 = (Av_E/2v_T)^2 \gg 1. \tag{6.4}$$

Это неравенство определяет область применимости результатов модели холодной плазмы.

Очевидно, что при условии (2.4) неравенство (6.4) может быть нарушено только при малой степени круговой поляризации, когда $A_l^{(3/2)}(\rho^2)$ имеет вид (П.3.4). Это означает, что в области важности учета теплового движения формула (6.1) может быть представлена в виде

$$A_l(\rho^2, N) = \frac{2^{3/2}}{\pi}\left\{\frac{1}{A^2}\left[1-\exp\left(-\frac{A^2N^2}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}\left(l^2-\frac{1}{4}\right)\left[\frac{1}{2}E_1\left(\frac{A^2N^2}{2}\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{2}\ln\frac{4}{A^2} + \psi\left(l+\frac{3}{2}\right) + C - \frac{1}{2}\right] - \frac{l}{2}\right\}. \tag{6.5}$$

Эта формула полностью описывает влияние теплового движения частиц в наших условиях сильного греющего поля (2.4) на все обсуждавшиеся выше аномальные поляризационные явления. Здесь же мы рассмотрим предел весьма малой степени круговой поляризации,

$$A \ll v_T/v_E, \tag{6.6}$$

когда можно усмотреть переход к изучавшемуся ранее случаю плоскополяризованного излучения. При условиях (6.6) формула (6.5) принимает вид

$$A_l\left(\rho^2, \frac{v_E}{2v_T}\right) = \frac{2^{3/2}}{\pi}\left\{\frac{v_E^2}{8v_T^2} - \frac{1}{4}\left(l^2-\frac{1}{4}\right)\left[\ln\frac{v_E^2}{2v_T^2} - 2\psi\left(l+\frac{3}{2}\right) - C + 1\right] - \frac{l}{2}\right\}, \tag{6.7}$$

не зависящий от поляризации. Для высоких гармоник ($l \gg 1$) отсюда имеем

$$A_l\left(\rho^2, \frac{v_E}{2v_T}\right) = \frac{2^{3/2}}{\pi}\left\{\frac{v_E^2}{8v_T^2} - \frac{l^2}{4}\left[\ln\frac{v_E^2}{2l^2v_T^2} - C + 1\right] + o(1)\right\}. \tag{6.8}$$

Эта формула, в частности, указывает на то, что при $l > v_E/v_T$ ряд гармоник обрывается [8]. В таких условиях для высоких гармоник получаем

$$B_l\left(\rho^2, \frac{v_E}{2v_T}\right) = \frac{2}{\pi^2}\left(l^2\left[\ln\frac{v_E^2}{2l^2v_T^2} - C\right]^2 + A^2\frac{v_E^4}{16v_T^4}\right). \tag{6.9}$$

Соответственно для степени круговой поляризации высоких гармоник получаем

$$A^{(2l+1)} = \frac{A(v_E^2/2v_T^2)l\left[\ln(v_E^2/2l^2v_T^2) - C\right]}{(Av_E^2/4v_T^2)^2 + l^2\left[\ln(v_E^2/2l^2v_T^2) - C\right]^2}. \tag{6.10}$$

Степень круговой поляризации гармоник может быть не малой. Однако в пределе плоской поляризации ($A = 0$) (6.10) обращается в нуль. Также обращается в нуль уравнение (3.6), а эффективность генерации высоких гармоник при $A \to 0$ по закону

$$\eta^{(2l+1)} = \frac{\nu^2(E,l)}{8l^2\pi^2\omega^2}\left\{\left[\ln\frac{v_E^2}{2l^2v_T^2} - C\right]^2 + \frac{A^2v_E^4}{16l^2v_T^4}\right\} \tag{6.11}$$

стремится к формуле, отвечающей случаю плоской поляризации накачки [6, 8].

7. Яркие поляризационные эффекты, характеризующие генерацию гармоник в плазме, приводят к значительному увеличению эффективности такого процесса. Действительно, оценка с помощью (6.10) на границе применимости этого выражения, оправдываемая формулой (6.5), при $(A^2 v_E^2/8v_T^2) \sim 1$ согласно (6.9) дает следующую оценку эффективности (3.19) генерации высоких гармоник:

$$\eta^{(2l+1)} \sim \frac{\nu^2(E,l)}{2\pi^2\omega^2}\frac{v_E^2}{8l^4 v_T^2}. \tag{7.1}$$

Это выражение превышает эффективность (6.11) (в пределе $A = 0$) генерации гармоник плоскополяризованным греющим плазму излучением в силу выполнения практически для всех гармоник условия

$$\frac{v_E^2}{2l^2 v_T^2} \gg \left[\ln\frac{v_E^2}{2l^2 v_T^2} - C\right]^2. \tag{7.2}$$

Помимо такого поляризационного увеличения интенсивности гармоник, излучаемых при когерентной осцилляции электронов в поле лазерного излучения, необходимо обратить внимание на возникающую аномалию поляризации гармоник. Действительно, параметр Стокса $\xi_3^{(2l+1)}$ гармоник при небольшой, но конечной степени круговой поляризации поля накачки, оказался согласно (4.9), (4.12) отличающимся знаком от параметра Стокса ξ_3 греющего излучения. Это означает, что в данном случае гармоники оказываются поляризованными с большой точностью перпендикулярно плоскости поляризации накачки. В переходной области с уменьшением степени круговой поляризации накачки возрастает $A^{(2l+1)}$, достигая согласно (6.11) единицы при

$$|A|\frac{v_E^2}{4v_T^2} = l\left[\ln\frac{v_E^2}{2l^2 v_T^2} - C\right],$$

а затем убывает до нуля при $A = 0$. Соответственно этому параметр Стокса $\xi_3^{(2l+1)}$ изменяется от значения близкого к -1, проходя через нуль, возрастая до значения $+1$, отвечающего при $A = 0$ поляризации гармоники в плоскости поляризации накачки. Мы указали на свойства нелинейного явления изменения поляризации греющего излучения из-за обратного тормозного излучения, имея в виду важность для обсуждаемых эффектов поляризации накачки.

Приведем в удобном для оценок виде несколько формул, которые, во-первых, позволяют видеть условия применимости полученных результатов, а во-вторых, указывают величину эффективности преобразования излучения накачки в высокие гармоники. Прежде всего для демонстрации очевидности выполнения условия (2.5) запишем следующее соотношение:

$$\frac{v_E^2}{v_T^2} = 3.7\cdot 10^3\frac{q\lambda^2}{T}.$$

Здесь и далее q — плотность потока энергии излучения накачки в единицах 10^{16} Вт/см^2, λ — длина волны накачки в микронах, T — температура электронов в электрон-вольтах. Для того чтобы увидеть возможность использования нерелятивистского приближения, приведем соотношение

$$\frac{v_E^2}{c^2} = 7.3\cdot 10^{-3} q\lambda^2.$$

В соответствии с формулой (6.11) зависящая от номера эффективность генерации высоких гармоник в случае плоской поляризации накачки определяется соотношением

$$\frac{\nu^2(E)}{\pi^2\omega^2}\left(\ln\frac{v_E}{v_T}\right)^2 = 5\cdot 10^{-10}\frac{Z^2 n_e^2}{\lambda^4 q^3}\left(\frac{\Lambda}{10}\right)^2\left(\ln\frac{v_E}{v_T}\right)^2.$$

Здесь и ниже n_e — плотность числа электронов в единицах 10^{20} см$^{-3}$.

Зависящий от номера гармоник закон (7.1) эффективности генерации высоких гармоник при малой степени круговой поляризации характеризуется параметром

$$\frac{\nu^2(E)v_E^2}{(2\pi\omega)^2 v_T^2} = 4\cdot 10^{-7}\frac{Z^2 n_e}{\lambda^2 q^2 T}\left(\frac{\Lambda}{10}\right)^2.$$

Совокупность представленных в настоящей статье теоретических результатов позволяет надеяться на постановку детальных экспериментов по изучению явления когерентной тормозной генерации гармоник в плазме. Сравнение используемой нами плазменной модели с атомарной моделью генерации гармоник работы [21] позволяет надеяться на проявление установленных нами свойств при достаточно большой интенсивности излучения и в неионизованных газах.

Настоящая работа выполнена при государственной поддержке ведущих научных школ (проект 96-15-96750), при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-02-17002) и в рамках объединенного российско-итальянского проекта «Новые когерентные источники ультракоротких импульсов», подготовленного в соответствии с законом № 212/92 Правительства Италии.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Подстановка разложения Фурье (3.4) в уравнение (3.2) дает

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\begin{matrix} j_x \\ j_y \end{matrix}\right\} = -E\frac{\omega_{Le}^2}{4\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\nu(E,l)}{\omega}\left\{\begin{matrix} M_l^{(+)}\left(\delta_+,\delta_-\dfrac{v_T^2}{2v_E^2}\right)\sin\left[(2l+1)(\omega t-\varphi_x)\right], \\ M_l^{(-)}\left(\delta_+,\delta_-\dfrac{v_T^2}{2v_E^2}\right)\cos\left[(2l+1)(\omega t-\varphi_x)\right], \end{matrix}\right. \qquad (\text{П.1.1})$$

где $\omega_{Le} = \sqrt{4\pi e^2 n_e/m}$ — электронная ленгмюровская частота, а

$$M_l^{(\pm)}(a,b;\alpha^2) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\int_0^{\infty}dx\,x\int_0^{\pi}d\theta\exp\left(-\frac{x^2\alpha^2}{\sin^2\theta}\right)\times$$
$$\times\left[J_{l+1}(ax)J_l(bx)\pm J_{l+1}(bx)J_l(ax)\right]. \qquad (\text{П.1.2})$$

Если воспользоваться формулой 3.363.1 из [13, с. 329], то можно показать, что

$$\int_0^{\pi}d\theta\exp\left(-\frac{\alpha^2x^2}{\sin^2\theta}\right) = \pi\left[1-\Phi(\alpha x)\right], \qquad (\text{П.1.3})$$

где $\Phi(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z dt\, e^{-t^2}$ — интеграл вероятности. Это позволяет представить формулу (П.1.2) в виде

$$M_l^{(\pm)}(a, b; \alpha^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\infty d\tau \int_0^\infty dx\, x^2 e^{-x^2\tau^2} \left[J_{l+1}(ax)J_l(bx) \pm J_{l+1}(bx)J_l(ax)\right]. \quad \text{(П.1.4)}$$

Это выражение при использовании рекуррентных соотношений

$$J_{l+1}(z) = -\frac{d}{dz} J_l(z) + \frac{l}{z} J_l(z)$$

для функций Бесселя [13, ф. 8.472.2] может быть сведено к известному интегралу

$$M^{(\pm)}(a, b; \alpha^2) = \left[\frac{l}{a} - \frac{\partial}{\partial a} \pm \left(\frac{l}{b} - \frac{\partial}{\partial b}\right)\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\infty d\tau \int_0^\infty dx\, x J_l(ax)J_l(bx)e^{-x^2\tau^2}. \quad \text{(П.1.5)}$$

Действительно, согласно формуле 6.333.2 из [13, с. 732] имеем

$$\int_0^\infty dx\, x J_l(ax)J_l(bx)e^{-x^2\tau^2} = \frac{1}{2\tau^2} \exp\left(-\frac{a^2+b^2}{4\tau^2}\right) I_l\left(\frac{ab}{2\tau^2}\right), \quad \text{(П.1.6)}$$

где $I_l(z)$ — функция Бесселя мнимого аргумента. Если теперь использовать рекуррентное соотношение [13, ф. 8.486]

$$lI_l(z) - z\frac{dI_l(z)}{dz} = -zI_{l+1}(z),$$

то формулу (П.1.5) можно представить в виде

$$M^{(\pm)}(a, b; \alpha^2) = \frac{(a \pm b)2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(1/8\alpha^2)} dz\sqrt{z} \exp\left(-2[a^2+b^2]z\right) \left[I_l(4abz) \mp I_{l+1}(4abz)\right]. \quad \text{(П.1.7)}$$

В пределе холодной плазмы, $\alpha^2 \to 0$, это соотношение принимает вид

$$M_l^{(\pm)}(a, b; 0) = \frac{(a \pm b)2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{dz\sqrt{z}}{(4ab)^{3/2}} \exp\left(-\frac{[a^2+b^2]z}{2ab}\right) \left[I_l(z) \mp I_{l+1}(z)\right]. \quad \text{(П.1.8)}$$

Используя теперь формулу 6.624.5 (см. [13, с. 727]):

$$\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{tz}{\sqrt{z^2-1}}\right\} I_\mu(t)t^\nu dt = \Gamma(\nu+1-\mu)(z^2-1)^{(1+\nu)/2} P_\nu^\mu(z), \quad \text{(П.1.9)}$$

где $P_\nu^\mu(z)$ — функция Лежандра, получаем

$$M_l^{(\pm)}(a, b; 0) = \frac{(a \pm b)\Gamma(3/2-l)}{\left|2(a^2-b^2)\right|^{3/2}\Gamma(3/2)} P_{1/2}^l\left(\left|\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right|\right). \quad \text{(П.1.10)}$$

Последняя формула позволяет, в частности, записать выражение для следующего несобственного интеграла:

$$\int_0^\infty dx\, x\, [J_{l+1}(ax)J_l(bx) \pm J_{l+1}(bx)J_l(ax)] = \frac{(a \pm b)\Gamma(3/2-l)}{|a^2-b^2|^{3/2}\Gamma(3/2)} P^l_{1/2}\left(\left|\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right|\right). \quad (\text{П.1.11})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Приведем здесь несколько выражений для коэффициентов разложения Фурье (4.1), которые представлены через полные эллиптические интегралы. При этом мы используем, во-первых, соотношение 8.13.5 из [19, с. 159]:

$$P_{1/2}(z) = \frac{2}{\pi}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)^{1/2} \mathbf{E}\left(\sqrt{\frac{2(z^2-1)^{1/2}}{z+(z^2-1)^{1/2}}}\right) \quad (\text{П.2.1})$$

и, во-вторых, соотношение 3.6.1.4 из [18, с. 149]:

$$P^m_\nu(z) = (z^2-1)^{m/2}\frac{d^m}{dz^m}P_\nu(z). \quad (\text{П.2.2})$$

Эти соотношения приводят к следующим выражениям для коэффициентов (4.2)

$$\begin{aligned}
A_0^{(3/2)}(\rho^2) &= \frac{2}{\pi}\,\frac{\sqrt{1+\rho^2}}{1-\rho^4}\,\mathbf{E}(k),\\
A_1^{(3/2)}(\rho^2) &= \frac{2}{\pi}\,\frac{\sqrt{1+\rho^2}}{1-\rho^4}\left\{\mathbf{E}(k) + \frac{1-\rho^2}{\rho^2}\,[\mathbf{E}(k)-\mathbf{K}(k)]\right\},\\
A_2^{(3/2)}(\rho^2) &= \frac{2}{\pi}\,\frac{\sqrt{1+\rho^2}}{1-\rho^4}\left\{\mathbf{E}(k) + 4\frac{1-\rho^4}{\rho^4}\left[\mathbf{E}(k) - \frac{1}{1+\rho^2}\,\mathbf{K}(k)\right]\right\}, \qquad (\text{П.2.3})\\
A_3^{(3/2)}(\rho^2) &= \frac{2}{\pi}\,\frac{\sqrt{1+\rho^2}}{1-\rho^4}\left\{\mathbf{E}(k) - \frac{(1-\rho^4)(1+\rho^2)}{12\rho^4}\,\times\right.\\
&\left.\times\ \left[(27k^4 - 128k^2 + 128)\mathbf{K}(k) + (-3k^4 + 64k^2 - 128)\mathbf{E}(k)\right]\right\},
\end{aligned}$$

где

$$k = \sqrt{\frac{2\rho^2}{1+\rho^2}} \quad \text{и} \quad 1-k^2 = \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}. \quad (\text{П.2.4})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Необходимое для нашего рассмотрения асимптотическое разложение функций Лежандра $P^l_\nu(z)$ при полуцелых ν и больших значениях аргумента z можно найти в книге Гобсона [17]. Удерживая старшие необходимые члены асимптотического разложения и делая удобные преобразования, можем записать:

$$P^l_{1/2}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(3/2-l)}(2z)^{1/2}\times$$
$$\times\left\{1-\frac{2l}{(2z)^2}+\frac{1}{(2z)^2}\left(l^2-\frac{1}{4}\right)\left[-2\ln(2z)+2\psi\left(l+\frac{3}{2}\right)+2C-1\right]\right\}, \qquad (\text{П.3.1})$$

где $C = 0.577\ldots$ — постоянная Эйлера. Это асимптотическое выражение позволяет для коэффициента Фурье $A_l(\rho^2,\infty)$ использовать следующее приближение:

$$A_l^{(3/2)}(\rho^2) = \frac{2^{3/2}}{\pi}\left\{\frac{1}{A^2}+\frac{1}{2}\left(\left[l^2-\frac{1}{4}\right]\left[-\ln\frac{2}{|A|}+\psi\left(l+\frac{3}{2}\right)+C-\frac{1}{2}\right]-l\right)\right\}. \qquad (\text{П.3.2})$$

Это выражение годится и при небольших номерах гармоник. С другой стороны, для высоких гармоник ($l\gg 1$), когда $\psi(l+3/2)\approx \ln l + 1/l$, с точностью до линейных по l слагаемых включительно имеем

$$A_l^{(3/2)}(\rho^2) = \frac{2^{3/2}}{\pi}\left\{\frac{1}{A^2}+\frac{l^2}{2}\left[-\ln\frac{2}{|A|l}+C-\frac{1}{2}\right]+o(1)\right\}. \qquad (\text{П.3.3})$$

Асимптотическое разложение (П.3.1) непригодно при $l^2 > z^2$. Получим теперь необходимое асимптотическое представление для коэффициентов Фурье $A_l^{(3/2)}(\rho^2)$ в пределе

$$l^2 \gg z^2. \qquad (\text{П.3.4})$$

Для этого используем формулу 8.702 из [13, с. 1013]

$$P^\mu_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\mu/2} F\left(-\nu,\nu+1;1-\mu;\frac{1-z}{2}\right), \qquad (\text{П.3.5})$$

которая выражает функции Лежандра через гипергеометрическую функцию. Имея в виду также соотношение

$$P^{-l}_{1/2}(z) = \frac{\Gamma(3/2-l)}{\Gamma(3/2+l)}P^l_{1/2}(z), \qquad (\text{П.3.6})$$

можем теперь следующим образом выразить коэффициенты Фурье $A_l^{(3/2)}(\rho^2)$ через гипергеометрические ряды:

$$A_l^{(3/2)}(\rho^2) = \frac{\Gamma(3/2+l)}{|A|^{3/2}\Gamma(3/2)\Gamma(l+1)}\left(\frac{1-|A|}{1+|A|}\right)^{l/2} F\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2};l+1;\frac{1}{2}-\frac{1}{2|A|}\right). \qquad (\text{П.3.7})$$

Поскольку гипергеометрический ряд $F(a,b;c;\zeta)$ при больших значениях c является асимптотическим разложением по c, то для получения искомого асимптотического представления коэффициентов $A_l^{(3/2)}(\rho^2)$ используем

$$F\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2};l+1;\frac{1}{2}-\frac{1}{2|A|}\right)\simeq 1+\frac{3(1-|A|)}{8l|A|}+o\left(\frac{1}{l^2A^2}\right). \qquad (\text{П.3.8})$$

Поскольку далее согласно [20, с. 87]

$$\frac{\Gamma(3/2+l)}{\Gamma(l+1)}\simeq\sqrt{l}\left(1+\frac{3}{8l}+\ldots\right), \qquad (\text{П.3.9})$$

то получаем

$$A_l^{(3/2)}(\rho^2) \simeq \frac{2\sqrt{l}}{\sqrt{\pi}\,|A|^{3/2}} \left(1 + \frac{3}{8l|A|} + \ldots\right) \exp\left\{-\frac{l}{2} \ln \frac{1+|A|}{1-|A|}\right\}. \qquad (\text{П.3.10})$$

Эта асимптотическая формула пригодна и не при малых значениях степени круговой поляризации. Если же теперь принять $|A| \ll 1$, то из (П.3.10) следует

$$A_l^{(3/2)}(\rho^2) \simeq \frac{2\sqrt{l}}{\sqrt{\pi}\,|A|^{3/2}} \exp\left(-l|A|\right). \qquad (\text{П.3.11})$$

Приведем, наконец, интерполяционную формулу, описывающую главные члены асимптотик (П.3.2) и (П.3.11) при больших номерах гармоник:

$$A_l^{(3/2)}(\rho^2) = \frac{2^{3/2}l}{\pi|A|} K_1\left(l|A|\right), \qquad (\text{П.3.12})$$

где $K_1(z)$ — функция Макдональда.

Литература

1. W. H. Knox, IEEE J. Quantum Electr. **24**, 388 (1988).
2. H. Schulz and D. von der Linde, Proc. SPIE **1268**, 30 (1990).
3. S. Svanberg, J. Larsson, A. Persson, and C.-G. Wahlström, Physica Scripta **49**, 187 (1994).
4. С. М. Гладков, Н. И. Коротеев, УФН **160**, 105 (1990).
5. C.-G. Wahlström, Physica Scripta **49**, 201 (1994).
6. В. П. Силин, ЖЭТФ **47**, 2254 (1964).
7. F. Giammanco, P. Ceccherini, C. Tagliavini, M. Malvezzi, P. Villoresi, and G. Tondello, Laser Physics **7**, 22 (1997).
8. G. Ferrante, S. A. Uryupin, M. Zarcone, and P. I. Porshnev, J. Opt. Soc. Am. B **14**, 1716 (1997).
9. *Plasma collective effects in atomic physics*, ed. by F. Giammanco, N. Spinelli, Edizioni ETS, Pisa (1996).
10. В. П. Силин, ЖЭТФ **111**, 478 (1997).
11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1973).
12. В. П. Силин, *Введение в кинетическую теорию газов*, Наука, Москва (1971).
13. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, Москва (1962).
14. H. A. Kramers, Phil. Mag. **46**, 836 (1923).
15. В. Л. Гинзбург, *Распространение электромагнитных волн в плазме*, Физматгиз, Москва (1960).
16. В. П. Силин, ЖЭТФ **38**, 1771 (1960).
17. Е. В. Гобсон, *Теория сферических и эллипсоидальных функций*, ИЛ, Москва (1952).
18. Г. Бейтман, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 1, Наука, Москва (1965).
19. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, Наука, Москва (1979).
20. Э. Т. Копсон, *Асимптотические разложения*, Мир, Москва (1966).
21. Р. В. Карапетян, В. Б. Федоров, *Краткие сообщения по физике*, ФИАН, № 7–8,с. 76 (1995).