ЖЭТФ, 1998, том 114, вып. 3(9), стр. 946–955

ГЕНЕРАЦИЯ СПИРАЛЬНОСТИ В ТУРБУЛЕНТНЫХ МГД ТЕЧЕНИЯХ

О. Г. Чхетиани, С. С. Моисеев*

Институт космических исследований Российской академии наук
117810, Москва, Россия

Е. И. Гольбрайх

Центр МГД исследований, Университет им. Бен Гуриона
Беер–Шева, 84105, Израиль

Поступила в редакцию 31 марта 1998 г.

Рассмотрено турбулентное течение проводящей жидкости во внешнем однородном магнитном поле. Показано, что при наличии среднего сдвигового течения возможна интенсивная генерация спиральности. Отмечено, что хотя средняя спиральность исходного течения и может быть равна 0, тем не менее для ее генерации необходимо присутствие внутренней топологической структуры течения, например наличия разнознаковой спиральности на разных масштабах.

1. ВВЕДЕНИЕ

Спиральность $H = \langle \mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v} \rangle$ оказывает значительное влияние на устойчивость и эволюцию как ламинарных, так и турбулентных течений [1]. Со спиральной турбулентностью тесно связаны спиральные каскады, впервые введенные в [2] и подробно проанализированные для различных частных случаев в [3]. Выделены два основных предельных случая [2] — параллельные потоки энергии и спиральности по спектру

$$E(k) \propto \bar{\varepsilon}^{2/3} k^{-5/3}, \quad H(k) \propto \bar{\eta} \bar{\varepsilon}^{-1/3} k^{-5/3},$$

соответствующие колмогоровскому каскаду, и поток спиральности без потока энергии

$$E(k) \propto \bar{\eta}^{2/3} k^{-7/3}, \quad H(k) \propto \bar{\eta}^{2/3} k^{-4/3},$$

являющийся чисто спиральным каскадом ($\bar{\varepsilon}, \bar{\eta}$ — средние диссипации энергии и спиральности).

Долгое время спиральные каскады рассматривались лишь как чисто теоретические курьезы, не имеющие никакого отношения к существующим экспериментальным данным. Однако на сегодняшний день накоплен значительный багаж экспериментальных лабораторных и естественных наблюдений спектра «минус семь третьих» в широком диапазоне пространственных масштабов. Подобные спектры наблюдаются в лабораторных МГД течениях [4–6], во вращающейся жидкости [7], стратифицированной турбулентности за решеткой [8], в пограничном слое [9], в прямых измерениях атмосферной

*E-mail: ochkheti@mx.iki.rssi.ru

турбулентности на различных высотах [10–12], в тропической предтайфунной атмосфере [13]. Отметим, что в спектрах как атмосферной, так и лабораторной МГД турбулентности нередко существуют две области скейлинга: $(-5/3)$ и $(-7/3)$.

Существование «спирального» спектра поднимает проблему происхождения спиральности. Хорошо известно, что спиральность является инвариантом «чистого» уравнения Эйлера (не учитывающего влияние факторов стратификации, фонового вращения и др.). Если генерация спиральности в атмосферах звезд и планет в основном, по-видимому, связана с вращением Земли и стратификацией [14–16, 3], то природа появления ее в МГД течениях до сих пор не выяснена. Не очевиден и ответ на вопрос о происхождении спиральности, наблюдаемой в лабораторных течениях. Авторы работы [17], где проводится качественный анализ наблюдаемых спиральных спектров, рассуждают в этой связи о спонтанном нарушении отражательной симметрии в трехмерной турбулентности.

Исследования МГД турбулентности имеют долгую историю. Широко распространено мнение о двумеризации турбулентности под воздействием магнитного поля. При этом значительное количество экспериментальных результатов [6, 18] не укладывается в двухмерную картину и имеет объяснение лишь с учетом трехмерности. К подобным трехмерным эффектам относятся и наблюдаемые спиральные спектры [4–6]. Отметим, что попытки двумерной интерпретации результатов лабораторных измерений и численного моделирования МГД турбулентности не являются единственно возможными. Спектры, объясняемые как проявление двумерного спектра «минус три», с той же степенью точности соответствуют и спектру «минус семь третьих».

Проблема генерации спиральности в МГД течениях впервые была рассмотрена в контексте теории турбулентного динамо [19]. Тогда была показана генерация спиральности обратной по знаку по отношению к первоначальной, усиливающей возмущения крупномасштабного магнитного поля. Несколько позже этот эффект был объяснен с позиции сохранения инварианта магнитной спиральности $H_m = \langle(\mathrm{rot}^{-1}\mathbf{h},\mathbf{h})\rangle$. При этом спиральность генерировалась лишь для полей с ненулевым значением $(\mathbf{B}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}) \neq 0$ (здесь $\mathbf{B}$ — крупномасштабное магнитное поле). В лабораторных МГД течениях магнитная спиральность, как правило, равна 0. Тем не менее спиральный каскад энергии $E(k) \propto k^{-7/3}$ наблюдается в широком диапазоне значений внешнего магнитного поля. Выявлению возможного механизма генерации спиральности в турбулентных МГД течениях и посвящена настоящая работа.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим турбулентное МГД течение несжимаемой жидкости в однородном магнитном поле $\mathbf{B}^0$ ($\mu = 1$) и со стационарной средней компонентой средней скорости $\mathbf{U}^0$:

$$\partial_t\mathbf{v} - [\mathbf{v}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}] + \nabla\frac{\mathbf{v}^2}{2} = -\nabla P/\rho + [\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\mathbf{H}]/4\pi\rho + \nu\Delta\mathbf{v}, \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0, \tag{2}$$

$$\partial_t\mathbf{H} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{H} - (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{v} = \nu_m\Delta\mathbf{H}, \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0. \tag{4}$$

Далее будем работать в альфвеновских переменных:

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H}/\sqrt{4\pi\rho}, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}'.$$

В отсутствие магнитных полей и в пренебрежении эффектами кинематической вязкости гидродинамическая спиральность является сохраняющейся величиной:

$$\partial_t \left\langle (\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}) \right\rangle = 0 \tag{5}$$

Магнитное поле ведет к появлению «источников» в уравнении баланса спиральности:

$$\begin{gathered}\partial_t \left\langle (\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}) \right\rangle = -2\nu \langle (\mathbf{w} \operatorname{rot} \mathbf{w}) \rangle + M, \\ M = 2 \left\langle [\mathbf{w} \operatorname{rot} \mathbf{h}] \right\rangle \mathbf{B}^0 + 2 \left\langle [\mathbf{h}\mathbf{w}] \right\rangle \operatorname{rot} \mathbf{B}^0 + 2\mathbf{\Omega}^0 \left\langle [\operatorname{rot} \mathbf{h}\mathbf{h}] \right\rangle + 2 \left\langle [\mathbf{w} \operatorname{rot} \mathbf{h}]\, \mathbf{h} \right\rangle\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь

$$\mathbf{v} = \mathbf{U}^0 + \mathbf{u}, \qquad \langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{U}^0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{\Omega}^0 + \mathbf{w}, \qquad \langle \operatorname{rot} \mathbf{v} \rangle = \mathbf{\Omega}^0,$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}^0 + \mathbf{h}, \qquad \langle \mathbf{h} \rangle = 0.$$

В настоящей работе мы рассматриваем предел больших альфвеновских скоростей ($|\mathbf{B}^0| \gg |\mathbf{U}^0|$) и пренебрегаем в (6) соответствующим вкладом средней скорости. Отметим, что лишь в случае однородной и изотропной турбулентности $\langle (\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}) \rangle$ совпадает со средней спиральностью течения. В общем неоднородном случае $\langle (\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}) \rangle$ соответствует усредненной по ансамблю плотности спиральности. Рассмотрим среднее течение с нулевой спиральностью $(\mathbf{U}^0 \mathbf{\Omega}^0) = 0$. Тогда

$$\left\langle (\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}) \right\rangle = \left\langle (\mathbf{u} \operatorname{rot} \mathbf{u}) \right\rangle .$$

Первый член в (6) был впервые рассмотрен Вайнштейном в [19]. При этом учитывалась лишь анизотропия корреляций турбулентного поля скорости, вносимая квазистационарным магнитным полем. В однородном магнитном поле $\operatorname{rot} \mathbf{B}^0 = 0$. В теории нелинейного динамо при $\operatorname{rot} \mathbf{B}^0 \neq 0$ этот член ответствен за нелинейное насыщение крупномасштабной неустойчивости.

Кубическая нелинейность в (6) может быть аппроксимирована в духе приближения Орзага (S.Orszag) как τ-релаксирующий член. Ее влияние сводится к перераспределению энергии и спиральности как по масштабам, так и по направлениям (к перенормировке турбулентных вязкости и магнитной диффузии, см., например, [20]). В настоящей работе мы остановимся на детальном рассмотрении первых трех членов правой части (6).

3. УРАВНЕНИЕ ИНДУКЦИИ В СДВИГОВОМ ТЕЧЕНИИ

Флуктуационное магнитное поле $\mathbf{h}$, возбуждаемое турбулентным полем скорости, определяется уравнением индукции

$$\partial_t \mathbf{h} - \mathrm{rot}\left[\left(\mathbf{U}^0 + \mathbf{u}\right)\mathbf{h}\right] = \left(\mathbf{B}^0\nabla\right)\mathbf{u} + \nu_m \Delta \mathbf{h}. \tag{7}$$

В пренебрежении магнитной вязкостью решение этого уравнения имеет вид

$$\mathbf{h}(t) = \mathrm{e}^{-(\hat{A}+\hat{F})t}\mathbf{h}(0) + \int_0^t e^{-(\hat{A}+\hat{F})(t-s)}(\mathbf{B}^0\nabla)\mathbf{u}(s)ds, \tag{8}$$

где

$$\hat{A}\mathbf{h} = \mathrm{rot}\left[\mathbf{U}^0\mathbf{h}\right], \quad \hat{F}\mathbf{h} = \mathrm{rot}\left[\mathbf{u}\mathbf{h}\right].$$

Рассматривая разложение подынтегральной операторной экспоненты в (9) в ряд, легко заметить, что разложение флуктуационной части экспоненты ($\hat{F}$-оператор) начиная со второго члена (по степени скорости) эквивалентно учету влияния высших моментов турбулентного поля скоростей. Параметром разложения является турбулентное число Струхаля $S = u_{tur}\tau_{cor}/\lambda$, построенное из основных характеристик турбулентного потока.

Для малых чисел Струхаля ($S \ll 1$) в уравнении магнитной индукции (7) можно отбросить член rot [**uh**]. Это соответствует так называемой теории сглаживания первого порядка (First Order Smoothing Approximation — FOSA), используемой в квазилинейной теории плазмы и теории динамо [21]. В этом случае нет ограничений на магнитное число Рейнольдса Re_m. В обычных условиях число Струхаля порядка 1. Но уже при малых числах Струхаля «вылавливаются» основные физические эффекты. Более сложные аппроксимации, включающие и элементы численного моделирования, как правило, лишь перенормируют конкретные численные значения коэффициентов турбулентного транспорта (диффузии, вязкости, коэффициенты спиральной генерации и т. д.). Пренебрежение rot [**uh**] является корректным и в другом предельном случае — малых магнитных чисел Рейнольдса, $\mathrm{Re}_m \ll 1$, и произвольных чисел Струхаля [21].

Далее мы будем работать в рамках двухмасштабного приближения:

$$L \gg \lambda, \quad T \gg \tau,$$

где L, T и λ, τ — характерные пространственно-временные масштабы средних и флуктуирующих величин. В этом случае мы можем рассматривать в мелкомасштабных уравнениях сдвиг средней скорости как постоянный (однородный). Магнитное поле **h** в течении с постоянным сдвигом может быть определено через функцию Грина, впервые полученную Рэдлером (K.-H.Rädler) [21]:

$$G_{ij}(\mathbf{x}, \xi, t, \tau) = \gamma_{ij}(t - \tau)G(\mathbf{x} - \xi, t - \tau|\mathbf{U}^0).$$

Здесь

$$\gamma_{ij}(t) = \delta_{ij} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j}t,$$

$$G(\mathbf{x}, t|\mathbf{U}^0) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{4\pi\nu_m t}\right)^{3/2} \exp\left\{-\dfrac{d_{pq}x_p x_q}{4\nu_m t}\right\}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

При коротких временах корреляции член $d_{pq}(t)$ имеет вид (см. [21])

$$d_{pq}(t) = \delta_{pq} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_p}{\partial x_q} + \frac{\partial U_q}{\partial x_p}\right)t,$$

а $\gamma_{ij} \approx \delta_{ij}$. В этом случае решение уравнения (7) следующее:

$$\mathbf{h}(t) = \int G(\mathbf{x}-\xi,t)\mathbf{h}(\xi,0)d\xi + \iint G(\mathbf{x}-\xi,t-\tau)\left(\mathbf{B}^0\nabla\right)\mathbf{u}(\xi,\tau)d\xi d\tau. \qquad (9)$$

При временах $T \gg \tau$ можно пренебречь начальными значениями флуктуационного магнитного поля $\mathbf{h}$.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВУХТОЧЕЧНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ

Учитывая (9), получаем

$$\mathbf{\Omega}^0\left\langle[\operatorname{rot}\mathbf{hh}]\right\rangle = \mathbf{\Omega}^0\widehat{\mathscr{G}}_1\widehat{\mathscr{G}}_2\left(\mathbf{B}^0\nabla_1\right)\left(\mathbf{B}^0\nabla_2\right)\left\langle[\mathbf{w}|_1\mathbf{u}|_2]\right\rangle \qquad (10)$$

и

$$\left\langle[\mathbf{w}\operatorname{rot}\mathbf{h}]\right\rangle\mathbf{B}^0 = \widehat{\mathscr{G}}_1\left\langle\left[\mathbf{w}\left(\mathbf{B}^0\nabla_1\right)\right]\mathbf{w}|_1\right\rangle\mathbf{B}^0. \qquad (11)$$

Здесь обозначения $|_1$ и $|_2$ соответствуют $(\mathbf{x}_1, t_1)$ и $(\mathbf{x}_2, t_2)$. Необходимо определить следующие двухточечные корреляции:

$$\left(\mathbf{B}^0\nabla_1\right)\left(\mathbf{B}^0\nabla_2\right)\left\langle\left[\mathbf{w}|_1\mathbf{u}|_2\right]\right\rangle, \quad \left\langle\left[\mathbf{w}\left(\mathbf{B}^0\nabla_1\right)\right]\mathbf{w}|_1\right\rangle. \qquad (12)$$

В однородной изотропной турбулентности лишь член $\left\langle\left[\mathbf{w}\left(\mathbf{B}^0\nabla_1\right)\right]\mathbf{w}|_1\right\rangle$ отличен от 0 (см. [19]). Эффекты слабой анизотропии, вызванной однородным магнитным полем, были также рассмотрены в [22]. Присутствие среднего сдвигового течения ведет к неоднородности и дополнительной анизотропии корреляционных свойств турбулентного поля скоростей. Основные линейные члены напряжений Рейнольдса имеют схожую градиентную форму в различных моделях турбулентного замыкания. Небольшие отличия имеются в определении транспортных коэффициентов (K–l-, K–ε-модели и др.). Нелинейные обобщения напряжений Рейнольдса имеют смысл лишь для течений с твердыми границами (прямоугольные и круглые каналы и т. д.). В рамках приближения FOSA можно пренебречь нелинейностью в уравнении, определяющем анизотропные свойства турбулентности.

Сравнивая члены в уравнении для скорости, видим, что основным параметром, характеризующим степень влияния магнитного поля, является безразмерная комбинация $({B^0}^2/U^0 v_{tur})S$, где B^0 (в альфвеновских переменных) совпадает по величине с альфвеновской скоростью, U^0 — характерная средняя скорость, v_{tur} — характерная турбулентная скорость, S — число Струхаля. В дальнейшем мы будем полагать, что

$$\frac{{B^0}^2}{U^0 v_{tur}}S \gg 1. \qquad (12a)$$

В частности, в лабораторной установке в Центре МГД исследований Университета им. Бен Гуриона характерные магнитные поля равнялись $(3-4)\cdot 10^3$ Гс, скорость потока ртути, прогоняемого по цилиндрической трубе диаметром 10 см, равнялось 20 см/с, характерная скорость турбулентных пульсаций — 1–2 см/с. Для выполнения критерия (12а) достаточно, чтобы число Струхаля было больше $5 \cdot 10^{-3}$. При этих значениях выполняется требование $S \ll 1$, необходимое для применимости теории сглаживания первого порядка.

Отметим, что этот критерий выполняется и в солнечной плазмосфере.

Соответственно, влияние сдвига средней скорости на двухточечные корреляции можно рассматривать как линейную поправку к основному состоянию, определяемому магнитным полем.

Влияние однородного магнитного поля на корреляционные характеристики турбулентности анализировалось в [21, 18, 19, 23]. Основной эффект состоит в том, что однородное магнитное поле отбирает часть энергии турбулентных пульсаций, переизлучая ее в виде альфвеновских волн, распространяющихся вдоль линий магнитного поля. Тензор двухточечных корреляций в фурье-пространстве сохраняет свою структуру. Лишь коэффициенты становятся зависящими от угла между волновым вектором и магнитным полем. Отметим, что вид корреляционного тензора, полученный в [19, 23], справедлив при малых магнитных полях и может быть получен соответствующим разложением более общего выражения, полученного в [21].

Предположим однородность и изотропность турбулентных пульсаций поля скоростей в отсутствие внешнего магнитного поля. Тогда корреляционный тензор скоростей в фурье-пространстве имеет вид

$$\hat{\mathcal{Q}}^0_{ij}(\mathbf{k},\omega) = \frac{E(k,\omega)}{4\pi k^2}\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) + i\frac{H(k,\omega)}{8\pi k^4}\varepsilon_{ijk}k_k. \tag{13}$$

Средняя энергия и спиральность турбулентного потока равны соответственно

$$\langle(\mathbf{uu})\rangle = \int E(k,\omega)dkd\omega, \qquad \langle(\mathbf{u}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u})\rangle = \int H(k,\omega)dkd\omega. \tag{14}$$

В условиях применимости теории сглаживания первого порядка (FOSA) $\min(S, \mathrm{Re}_m) \ll$ $\ll 1$ корреляционный тензор с учетом внешнего однородного магнитного поля имеет вид (см. [21])

$$\hat{\mathcal{Q}}^h_{ij}(\mathbf{k},\omega) = \frac{\hat{\mathcal{Q}}^0_{ij}(\mathbf{k},\omega)}{1 + (\mathbf{B}^0\mathbf{k})^2 \dfrac{2\nu\nu_m k^4 - 2\omega^2 + \left(\mathbf{B}^0\mathbf{k}\right)^2}{\left(\nu_m^2 k^4 + \omega^2\right)\left(\nu^2 k^4 + \omega^2\right)}} \tag{15}$$

Поле турбулентных пульсаций условно можно разделить на однородную (без учета сдвига) $\mathbf{u}^h$ и неоднородную (с учетом сдвига) $\mathbf{u}^{nh}$ составляющие. Неоднородная составляющая удовлетворяет линеаризованному уравнению

$$(\partial_t - \nu\Delta)\,\mathbf{u}^{nh} = -\nabla p^{nh} + \left[\mathrm{rot}\,\mathbf{h}\mathbf{B}^0\right] - \left(\mathbf{U}^0\nabla\right)\mathbf{u}^h - \left(\mathbf{u}^h\nabla\right)\mathbf{U}^0, \tag{16}$$

$\mathbf{h}$ определяется из (9). В нашем случае при получении вида неоднородных напряжений Рейнольдса можно пренебречь влиянием средней скорости на индуцируемое турбулентными пульсациями магнитное поле. Тогда уравнение для $\mathbf{u}^{nh}$ имеет вид

$$\left(\partial_t - \nu\Delta - \left(\mathbf{B}^0\nabla\right)^2\hat{G}\right)\mathbf{u}^{nh} = -\nabla p^{nh} - \left(\mathbf{U}^0\nabla\right)\mathbf{u}^h - \left(\mathbf{u}^h\nabla\right)\mathbf{U}^0. \tag{17}$$

1. Вычисление $(\mathbf{B}^0\nabla_1)(\mathbf{B}^0\nabla_2)\left\langle\left[\mathbf{w}|_1\mathbf{u}|_2\right]\right\rangle$. Умножая уравнение для $\mathbf{w}(\mathbf{x}_1,t_1)$ на $\mathbf{u}(\mathbf{x}_2,t_2)$ и проводя пространственное усреднение, получим

$$\left(\partial_{t_1}-\nu\Delta_\xi-\left(\mathbf{B}^0\nabla_\xi\right)^2\hat{G}\right)\left\langle\left[\mathbf{w}|_1\mathbf{u}|_2\right]\right\rangle^{nh}=\left\langle\left[\operatorname{rot}\left(\left[\mathbf{U}^0\mathbf{w}\right]+\left[\mathbf{u}\Omega^0\right]\right)\Big|_1\mathbf{u}\Big|_2\right]\right\rangle, \qquad \xi=\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1. \tag{18}$$

После ряда вычислений приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{B}^0\nabla_1\right)\left(\mathbf{B}^0\nabla_2\right)\left\langle\left[\mathbf{w}|_1\mathbf{u}|_2\right]\right\rangle\Big|_i^{nh}=\hat{\mathcal{G}}^{B^0}B_u^0B_v^0\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm}\varepsilon_{tpr}(\delta_{tm}\delta_{ks}+\delta_{tk}\delta_{ms})\times\\&\times\frac{\partial}{\partial x_l^1}\left\{\frac{\partial U_p^0}{\partial x_u^1}\left\langle w_r\frac{\partial u_s}{\partial\xi_v}\right\rangle+U_p^0\Big|_1\left\langle\frac{\partial w_r}{\partial\xi_u}\frac{\partial u_s}{\partial\xi_v}\right\rangle+\right.\\&\left.+\Omega_r^0\Big|_1\left\langle\frac{\partial u_p}{\partial\xi_u}\frac{\partial u_s}{\partial\xi_v}\right\rangle+\frac{\partial\Omega_r^0}{\partial x_u^1}\left\langle u_p\frac{\partial u_s}{\partial\xi_v}\right\rangle\right\}.\end{aligned} \tag{19}$$

Здесь

$$\left(\hat{\mathcal{G}}^{B^0}\mathbf{v}\right)_{\mathbf{k},w}=\left[-i\omega+\nu k^2+\frac{\left(\mathbf{B}^0\mathbf{k}\right)^2}{-i\omega+\nu_m k^2}\right]^{-1}\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\omega).$$

Для однородной компоненты турбулентного поля скоростей получаем

$$\left(\mathbf{B}^0\nabla_1\right)\left(\mathbf{B}^0\nabla_2\right)\left\langle\left[\mathbf{w}|_1\mathbf{u}|_2\right]\right\rangle\Big|_i^{h}=B_{0m}B_{0n}\left\{\left\langle\frac{\partial^2u_i}{\partial\xi_m\partial\xi_k}\frac{\partial u_k}{\partial\xi_n}\right\rangle-\left\langle\frac{\partial^2u_k}{\partial\xi_m\partial\xi_i}\frac{\partial u_k}{\partial\xi_n}\right\rangle\right\}.$$

После интегрирования по углам однородная часть обращается в 0.

При малых числах Струхаля (коротких временах корреляции) можно воспользоваться теоремой о среднем при вычислении интегралов — вынести из-под знака интеграла пространственные производные средних и турбулентных скоростей, взяв их средние (локальные) значения. После скалярного умножения (19) на $\mathbf{\Omega}^0$ получаем

$$\begin{aligned}M_A=&\chi_1\left(\mathbf{\Omega}^{0^2}\mathbf{B}^{0^2}-(\mathbf{\Omega}^0\mathbf{B}^0)^2+\mathbf{\Omega}^0\left(\mathbf{B}^0\nabla\right)\left[\mathbf{B}^0\mathbf{U}^0\right]\right)+\\&+\chi_0\left(\mathbf{\Omega}^0\nabla\right)\left(\mathbf{B}^0\nabla\right)\left(\mathbf{B}^0\mathbf{\Omega}^0\right)+\varepsilon_1(\mathbf{\Omega}^0\nabla)(\mathbf{B}^0\nabla)(\mathbf{B}^0\mathbf{U}^0)+\\&+\varepsilon_2\left(2\mathbf{B}^{0^2}\left(\mathbf{\Omega}^0\Delta\mathbf{U}^0\right)-\left(\mathbf{\Omega}^0\left(\mathbf{B}^0\nabla\right)^2\mathbf{U}^0\right)-\left(\mathbf{\Omega}^0\nabla\right)\left(\mathbf{B}^0\nabla\right)\left(\mathbf{B}^0\mathbf{U}^0\right)\right).\end{aligned} \tag{20}$$

Здесь

$$\chi_0\simeq\frac{2}{3}\tau_A^3\langle(\mathbf{uw})\rangle,\quad \chi_1\simeq\frac{2}{15}\tau_A^3\langle(\mathbf{w}\operatorname{rot}\mathbf{w})\rangle, \tag{21}$$

$$\varepsilon_1\simeq\frac{1}{3}\tau_A^3\langle(\mathbf{ww})\rangle,\quad \varepsilon_2\simeq\frac{2}{15}\tau_A^3\langle(\operatorname{rot}\mathbf{w}\operatorname{rot}\mathbf{w})\rangle \tag{22}$$

пропорциональны турбулентной спиральности, суперспиральности, энстрофии и суперэнстрофии соответственно.

$$\begin{aligned}\tau_A^3\simeq&\int G(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1,t-t_1)G(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2,t-t_2)\hat{\mathcal{G}}^{B^0}(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2-\mathbf{x}^*,t_1-t^*)\times\\&\times g(\mathbf{x}^*,t^*)d\mathbf{x}_1d\mathbf{x}_2d\mathbf{x}^*dt_1dt_2dt^*.\end{aligned}$$

Под $g(\mathbf{x}^*, t^*)$ понимается пространственно-временная зависимость для соответствующей корреляционной функции.

2. Вычисление $\langle([\mathbf{w}(\mathbf{B}^0\nabla_1)]\,\mathbf{w}|_1)\rangle$. Умножая уравнение для $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ на $\mathbf{w}(\mathbf{x}_1, t_1)$ и проводя пространственное усреднение, получим

$$\left(\partial_t - \nu\Delta_\xi - \left(\mathbf{B}^0\nabla_\xi\right)^2 \hat{G}\right) \left\langle \left[\mathbf{w}\mathbf{w}|_1\right] \right\rangle^{nh} = \left\langle \left[\operatorname{rot}\left(\left[\mathbf{U}^0\mathbf{w}\right] + \left[\mathbf{u}\boldsymbol{\Omega}^0\right]\right) \mathbf{w}|_1\right] \right\rangle, \qquad \xi = \mathbf{x} - \mathbf{x}_1. \tag{23}$$

После ряда вычислений приходим к следующему выражению:

$$\left\langle\left(\left[\mathbf{w}\left(\mathbf{B}^0\nabla_1\right)\right]\mathbf{w}|_1\right)\right\rangle\Big|_i^{nh} = \hat{\mathscr{G}}^{B^0} B_t^0(\delta_{kl}\delta_{im}-\delta_{km}\delta_{il})(\varepsilon_{kfn}\varepsilon_{mpr}+(\delta_{pk}\delta_{rf}-\delta_{pf}\delta_{rk})\delta_{mn})\times$$
$$\times\left\{\frac{\partial U_p^0}{\partial x_l}\left\langle w_r \frac{\partial^2 u_n}{\partial\xi_f\partial\xi_t}\right\rangle + \frac{\partial\Omega_r^0}{\partial x_l}\left\langle u_p\frac{\partial^2 u_n}{\partial\xi_f\partial\xi_t}\right\rangle\right\}. \tag{24}$$

Для однородной компоненты турбулентного поля скоростей имеем

$$M_B^0 = \hat{\mathscr{G}}^1 \left\langle\left(\left[\mathbf{w}\left(\mathbf{B}^0\nabla_1\right)\right]\mathbf{w}|_1\right)\right\rangle\Big|_i^h \simeq -\frac{1}{6}\left(\mathbf{B}^{0^2}\right)\tau_0\langle(\mathbf{w}\operatorname{rot}\mathbf{w})\rangle, \tag{25}$$

где

$$\tau_0 \simeq \int G(\mathbf{x}, t) g(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}\, dt.$$

Этот член пропорционален турбулентной суперспиральности $\langle(\mathbf{w}\operatorname{rot}\mathbf{w})\rangle$. В работе [19] он рассматривался лишь как диссипативный. Однако, поскольку спиральность не является знакоопределенной величиной, он может быть как диссипативным, так и генерационным. Действительно, если средняя спиральность равна 0, это не означает нулевую суперспиральность. Положительная и отрицательная плотность спиральности на разных масштабах может быть источником как для последующего перераспределения спиральности, так и ее генерации. При больших числах Рейнольдса магнитная генерация спиральности существенно превосходит диссипативную.

После умножения (24) на $\mathbf{B}^0$ и использования теоремы о среднем получим

$$M_B \simeq -\varepsilon_1'\left(\mathbf{B}^0\nabla\right)\left(\mathbf{B}^0\boldsymbol{\Omega}^0\right) + \chi_1'\left(\mathbf{B}^0\nabla\right)\left(\mathbf{B}^0\mathbf{U}^0\right). \tag{26}$$

Здесь

$$\varepsilon_1' \simeq \frac{1}{3}\tau_B^2\langle(\mathbf{w}\mathbf{w})\rangle, \qquad \chi_1' \simeq \frac{1}{3}\tau_B^2\langle(\mathbf{w}\operatorname{rot}\mathbf{w})\rangle \tag{27}$$

пропорциональны турбулентной энстрофии и суперспиральности соответственно,

$$\tau_B^2 \simeq \int G(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1, t-t_1)\hat{\mathscr{G}}^{B^0}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1-\mathbf{x}^*, t-t^*)g(\mathbf{x}^*, t^*)d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}^* dt_1 dt^*.$$

Окончательно уравнение баланса спиральности приобретает вид

$$\partial_t\left\langle(\mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{v})\right\rangle = M_A + M_B^0 + M_B - 2\nu\left\langle(\mathbf{w}\operatorname{rot}\mathbf{w})\right\rangle.$$

Новые члены (20), (26) в уравнении баланса спиральности являются функциями внешнего магнитного поля, сдвига (завихренности) средней скорости и корреляционных функций турбулентного поля скоростей. Эффект генерации спиральности является существенно нелинейным. Зависимость от внешнего магнитного поля является более сложной вследствие его влияния на коэффициенты ε, χ.

Следовательно, турбулентное течение с неоднородным сдвигом средней скорости и внешним однородным магнитным полем может генерировать гидродинамическую спиральность.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы получили уравнение баланса гидродинамической спиральности в турбулентном МГД течении. Прямой анализ выявляет, что сдвиг средней скорости и вызванная им анизотропия корреляционных свойств случайного поля скоростей являются достаточными условиями генерации спиральности. Подчеркнем, что в лабораторных МГД течениях спиральные спектры наблюдались лишь при помещении в поток решетки (honeycomb), приводящей к появлению резких пространственных градиентов средней скорости. Особо отметим, что при этом в основном течении либо регулярная средняя, либо турбулентная компоненты скорости должны иметь внутреннюю (скрытую) топологическую структуру, в частности, ненулевую суперспиральность $\langle(\mathbf{w}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{w})\rangle$. Именно суперспиральность ответственна за хорошо известный диссипативный механизм генерации спиральности, впервые продемонстрированный в [24]. При больших числах Рейнольдса этот эффект может оказаться основным механизмом появления спиральности. Ненулевая суперспиральность является общим свойством систем с флуктуациями спиральности. В уравнении баланса спиральности содержатся члены, связанные с другими подобными топологическими характеристиками. Следует подчеркнуть, что речь идет не только о средней турбулентной суперспиральности (или иной подобной квадратичной комбинации), но и о суперспиральности среднего течения. Другими словами, присутствие скрытых топологических свойств крупномасштабных и мелкомасштабных вихревых движений при воздействии внешнего магнитного поля является основным источником генерации средней гидродинамической спиральности. Внешнее магнитное поле служит спусковым крючком к генерации спиральности.

На наш взгляд, в основе генерации спиральности лежит следующее. Предположим, что в отсутствие внешнего магнитного поля существует баланс лево- и правовинтовых регулярных (случайных) движений. Во внешнем магнитном поле распространяются случайные альфвеновские моды, пространственный спектр которых отражает пространственную структуру невозмущенных регулярных и случайных движений. Однако частота альфвеновских волн зависит от их масштаба, т. е. эти моды входят уже с различным «весом», что и приводит, в конце концов, к нарушению симметрии лево- и правовинтовых движений. Этот эффект оказывается схожим с механизмом диссипативной генерации спиральности [24], где различие диссипации для разных масштабов также приводит к нарушению изначальной зеркальной симметрии.

Как мы уже подчеркивали, скорость роста спиральности зависит от корреляционных характеристик основного состояния, которые, в свою очередь, убывают с ростом магнитного поля $\propto (1 + aB^{0^2} + bB^{0^4})^{-1}$. Соответственно, генерация спиральности $\propto B^{0^2}/(1 + aB^{0^2} + bB^{0^4})$ и, как видно, имеет критические значения магнитного поля с максимальной скоростью роста. Величина критического магнитного поля зависит от основных усредненных характеристик турбулентного течения. Именно подобное поведение наблюдалось в экспериментах Центра МГД исследований (Беер–Шева, Израиль): при возрастании внешнего магнитного поля устойчиво наблюдаемый спектр «минус семь третьих» сменялся двумерным спектром «минус четыре».

Авторы выражают благодарность А. Эйдельману (Беер–Шева, Израиль) за предоставленные лабораторные данные и плодотворные обсуждения. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-02-19506).

Литература

1. H. K. Moffat and A. Tsinober, Ann. Rev. Fluid Mech. **24**, 281 (1992).
2. A. Brissaud A. et al., Phys. Fluids **16**, 1363 (1973).
3. С. С. Моисеев, О. Г. Чхетиани, ЖЭТФ **110**, 357 (1996).
4. I. Platnieks and S. F. Seluto, in *Liquid Metal Magnetohydrodynamics*, ed. by J. Lielpeters and R. Moreay, Kluwer, Dordrecht (1989).
5. C. Henoch, M. Hoffert, H. Branover, and S. Sukoriansky, Progress in Astr. and Aeron., AIAA **149**, 190 (1993).
6. H. Branover, A. Eidelman, M. Nagorny, and M. Kireev, Progress in Astr. and Aeron., AIAA **162**, 64 (1994).
7. M. Mory and E. J. Hopfinger, Phys. Fluids **29**, 2140 (1986).
8. E. C. Itsweire and K. N. Hellavel, in *Proc. Second Symp. on Turbulence and diffusion*, Colorado (1985), p. 172.
9. T. Wei and W. W. Willmarth, J. Fluid Mech. **204**, 57 (1989).
10. S. J. Caughey and S. G. Palmer, Quart. J. Roy. Meteorol. Soc. **805**, 811 (1979).
11. G. I. Boer and T. G. Shepred, J. Atmos. Sci. **40**, 164 (1983).
12. K. S. Gage and G. D. Nastrom, J. Atmos. Sci **43**, 729 (1986).
13. И. Н. Клепиков, И. В. Покровская, Е. А. Шарков, Исследования Земли из космоса, № 3, 13 (1995).
14. D. K. Lilly, J. Atmos. Sci. **43**, 126 (1986).
15. R. Hide, Geophys. Asrophys. Fluid Dyn. **48**, 69 (1989).
16. М. В. Курганский, Физ. атм. и океана **29**, 464 (1993).
17. A. Bershadskii, E. Kit, and A. Tsinober, Proc. R. Soc. Lond. A **441**, 147 (1993).
18. R. Moreau and A. Alemany, in *MHD-flows and turbulence, Proc. of the Beer-Sheva Int. Seminar* (1975), p. 51.
19. С. И. Вайнштейн, ЖЭТФ **61**, 612 (1971).
20. E. Golbraikh, O. G. Chkhetiani, and S. S. Moiseev, ЖЭТФ **114**(7), (1998).
21. Ф. Краузе, К.-Х. Рэдлер, *Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо*, Мир, Москва (1984).
22. Л. Л. Вайнштейн, С. И. Вайнштейн, Геомагн. и аэроном. **13**, 149 (1973).
23. W. H. Matthaeus, Phys. Rev. A **24**, 2135 (1981).
24. J. C. Andre and M. Lesieur, J. Fluid Mech. **81**, 207 (1977).