

## СТРОГАЯ ТРЕХМЕРНАЯ ТЕОРИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ ВОЛН ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

Б. И. Стурман\*, А. И. Черных, Е. А. Шамонина

Сибирское отделение Международного института нелинейных исследований  
630090, Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 27 января 1998 г.

Проведен анализ устойчивости поля пространственного заряда, индуцированного в полупроводниковом кристалле бегущей световой решеткой, относительно параметрического возбуждения волн пространственного заряда. Показано, что в области достаточно малых скоростей решетки существенным элементом анализа является учет высших фурье-гармоник поля. Комбинированием аналитических и численных методов проведено исследование устойчивости относительно роста малых трехмерных возмущений общего вида. Найдено, что неустойчивость возможна лишь в одной области скоростей световой картины и приводит к преимущественному возбуждению одномерных возмущений. Результаты проведенного анализа приложены к интерпретации экспериментов по генерации пространственных субгармоник в кристаллах семейства силленитов.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Слабозатухающие низкочастотные волны пространственного заряда в полупроводниках были предсказаны около 25 лет назад [1, 2]. Это предсказание не получило, однако, прямого экспериментального подтверждения и вскоре было забыто. Реальный интерес к волнам пространственного заряда (ВПЗ) возник неожиданно при исследовании фоторефрактивных явлений в кубических кристаллах семейства силленитов,  $\text{Bi}_{12}\text{RO}_{20}$ , где  $R = \text{Si}, \text{Ge}, \text{Te}$ . Эксперименты показали [3–6], что экспонирование кристалла бегущей решеткой интенсивности,

$$I = I_0 [1 + m \cos(\mathbf{K}\mathbf{r} - \Omega t)] , \quad (1)$$

при определенных условиях (например, при наличии внешнего поля, параллельного вектору решетки  $\mathbf{K}$ ) сопровождается не только формированием поля пространственного заряда с периодом внешнего воздействия  $2\pi/K$ , но и появлением дробных пространственных частот,  $K/2$ ,  $K/3$  и  $K/4$ , т. е. удвоением, утроением и учетверением периода. Альтернативным способом возбуждения субгармоник является [7, 8] приложение знакопеременного электрического поля при нулевой частотной расстройке  $\Omega$  между световыми пучками, формирующими интерференционную картину (1). Регистрация субгармоник осуществляется по обычной фоторефрактивной схеме: поле пространственного заряда вызывает изменение показателя преломления за счет эффекта Поккельса, а дифракция волн накачки на решетке показателя преломления приводит к появлению дополнительных световых пучков (рис. 1).

\* E-mail: sturman@iae.nsk.su

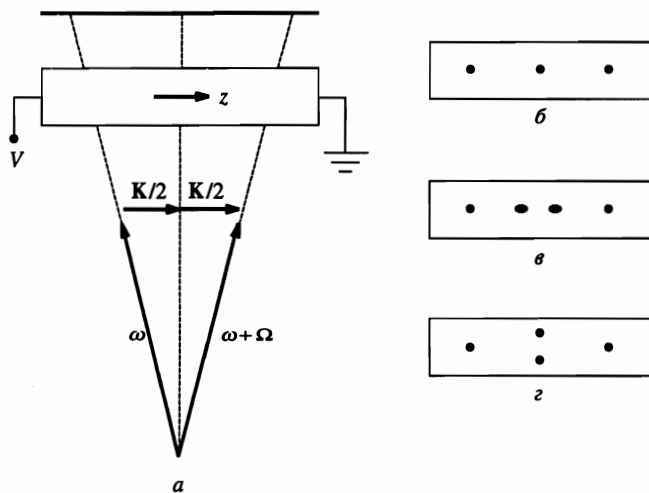


Рис. 1. Схема эксперимента по генерации субгармоник бегущей световой картиной (а) и распределения света на экране за кристаллом, отвечающие генерации нерасщепленной субгармоники  $K/2$  (б), продольно расщепленной (в) и поперечно расщепленной (г) субгармоникам

Объяснение генерации субгармоник было дано в работах [9–11]. Было показано, что распадный (параметрический) нелинейный процесс, определенный условиями резонанса

$$\Omega = \omega_{k_1} + \omega_{k_2}, \quad K = k_1 + k_2, \quad (2)$$

может приводить к неустойчивости исходного периодического состояния относительно роста ВПЗ с волновыми векторами  $k_{1,2}$  и собственными частотами  $\omega_{k_{1,2}}$ . Слабость затухания волн, необходимая для преодоления порога параметрической неустойчивости, обеспечивается достаточно большим значением произведения  $\mu\tau$  ( $\mu$  — подвижность, а  $\tau$  — время жизни фотоэлектронов), а также достаточно сильным приложенным полем  $E_0$ . Выполнение условий параметрического резонанса (2) должно обеспечиваться надлежащим выбором расстройки  $\Omega$ . Благодаря тому обстоятельству, что для ВПЗ  $\omega_k \propto (kE_0)^{-1}$ , равенства (2) могут быть выполнены только при  $\Omega \geq 4\omega_k$ .

Теория параметрической неустойчивости, линейная по амплитудам ВПЗ и контрасту  $m$  световой картины, позволила объяснить широкий круг наблюдаемых закономерностей по генерации субгармоник и сделать некоторые предсказания [12–14]. Среди последних — возможность продольного расщепления основной субгармоники  $K/2$  и уширения спектра пространственных частот (см. [15, 16] и рис. 1б, в). Основы нелинейной теории параметрически возбужденных ВПЗ были заложены в недавней работе [17]. В ряде отношений эта теория аналогична известной теории параметрического возбуждения спиновых волн в ферромагнетиках [18].

Параллельно с теоретическими исследованиями шло экспериментальное изучение возбуждения ВПЗ в кристаллах семейства силленитов. Одним из интригующих экспериментальных результатов явилось обнаружение поперечного расщепления основной субгармоники  $K/2$  (см. рис. 1г) в схеме с бегущей решеткой интенсивности [19, 20]. Такое расщепление не согласуется с линейной теорией параметрического возбуждения

ВПЗ, которая предсказывает ослабление неустойчивости с ростом поперечной (по отношению к  $\mathbf{K}$ ) компоненты волновых векторов  $\mathbf{k}_{1,2}$ .

Попытка объяснить поперечное расщепление была предпринята недавно в работах [21, 22]. Их авторы сконцентрировали свое внимание на области частотных расстройках  $\Omega < 4\omega_K$ , а при описании исходного периодического состояния ограничились, как и ранее [10, 11], линейным приближением по контрасту  $m$  световой картины. Это приближение дает одномерное гармоническое распределение поля пространственного заряда,

$$E = E_K \exp [i(Kz - \Omega t)] + \text{с.с.},$$

с амплитудой

$$E_K = \frac{m}{2} \frac{E_0}{\varepsilon^{-1} - 1 + iQ_K^{-1}}, \quad (3)$$

где  $\varepsilon = \omega_K/\Omega$  — безразмерный варьируемый в эксперименте параметр, а  $Q_K$  — добротность ВПЗ с волновым вектором  $K$  [11]. В рамках указанных выше предположений, при  $\Omega \simeq \omega_K$  (т. е. при  $\varepsilon \equiv \omega_K/\Omega \simeq 1$ ) и  $m = 1$  была найдена новая область неустойчивости относительно параметрического возбуждения ВПЗ и показано, что в этой области наиболее легко возбуждаются волны с ненулевыми поперечными компонентами волновых векторов. Этот результат позволил интерпретировать экспериментальные наблюдения поперечного расщепления субгармоники  $K/2$ .

Не представляет труда увидеть, что использованное в [21, 22] линейное приближение по контрасту  $m$  становится неприменимым при  $\varepsilon \simeq 1$ ,  $m \simeq 1$ . Действительно, в этом случае  $|E_K| \simeq E_0 Q_K/2 \gg E_0$ , что противоречит здравому смыслу, поскольку полное поле внутри кристалла,  $E_0 + E(z)$ , оказывается знакопеременным и много большим приложенного. На самом деле, использованное линейное приближение по контрасту применимо лишь до тех пор, пока  $|E_K| \lesssim E_0$ ; при  $\Omega \simeq \omega_K$  (т. е. в линейном резонансе) это эквивалентно ограничению  $m \lesssim Q_K^{-1} \ll 1$ . При больших значениях  $m$ , которые весьма актуальны для эксперимента, становятся существенными высшие фурье-гармоники поля  $E$  с пространственными частотами  $2K, 3K \dots$ ; амплитуда же  $E_K$  из-за нелинейной связи с этими гармониками резко уменьшается [11, 23]. При  $\varepsilon \simeq 1$ ,  $m \simeq 1$  число значимых фурье-гармоник в исходном состоянии может быть оценено как  $Q_K$ ; в кристаллах семейства силленитов это составляет обычно 6–8 [10, 11].

Теоретические результаты, полученные в [21, 22], могут быть прокомментированы следующим образом. При  $\Omega < 4\omega_K$  (т. е. при  $\varepsilon > 0.25$ ) был рассмотрен нерезонансный параметрический процесс первого порядка. Рост минимального (по  $\mathbf{k}$ ) относительного расстояния до параметрического резонанса,  $(\omega_k - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}} - \Omega)_{\min}/\Omega = 4\varepsilon - 1$ , с увеличением  $\varepsilon$  был скомпенсирован резким увеличением амплитуды  $E_K(\varepsilon)$  из-за приближения к линейному резонансу. Именно с этим ростом было связано появление новой области неустойчивости при  $\varepsilon \simeq 1$ .

В действительности, рост функции  $E_K(\varepsilon)$  при  $\varepsilon > 0.25$  испытывает насыщение из-за возбуждения высших пространственных гармоник, что должно ослаблять эффективность рассмотренного параметрического процесса. Кроме того, параметрические процессы высшего порядка, определенные условием синхронизма  $s\Omega = \omega_k + \omega_{\mathbf{s}\mathbf{k}-\mathbf{k}}$  с  $s = 2, 3, \dots$ , могут оказывать существенное влияние на эволюцию слабых возмущений. Эти нелинейные процессы могут, в частности, быть резонансными. Таким образом,

физическая ситуация в области расстройек  $\Omega \lesssim 4\omega_K$  оказывается намного более сложной по сравнению с той, которая имела место при  $\Omega \geq 4\omega_K$ . Вместе с тем рост  $E_K(\epsilon)$  и эффективная генерация высших пространственных гармоник поля пространственного заряда при  $\epsilon \approx 1$  оставляют надежду на то, что теоретические результаты работ [21, 22] и данная их авторами интерпретация поперечного расщепления субгармоники  $K/2$  являются правильными хотя бы качественно.

Цель настоящей работы — последовательный анализ устойчивости исходного периодического решения для поля пространственного заряда во всем актуальном диапазоне частотных расстройек. Он включает в себя учет как высших фурье-гармоник в исходном периодическом состоянии, так и трехмерных малых возмущений общего вида. Такой анализ необходим не только для объяснения поперечного расщепления; он важен также для определения точности аналитической линейной теории параметрического возбуждения [10, 11], построенной для  $\Omega \gtrsim 4\omega_K$  и являющейся базисом для нелинейной теории фоторефрактивных субгармоник [17].

Чисто аналитическое или численное исследование неустойчивости в общем случае весьма затруднительно. Однако комбинирование аналитических и численных методов способно значительно упростить поставленную задачу. Основная идея проведенного анализа следующая. Вначале численно решается одномерная задача по отысканию  $N$  фурье-гармоник поля пространственного заряда, представляющих с достаточно высокой точностью исходное периодическое состояние. Затем аналитически находится характеристическая матрица ранга  $2N \times 2N$ , связывающая между собой фурье-компоненты трехмерного возмущения. Элементы этой матрицы включают в себя инкремент неустойчивости  $\Gamma$ , фурье-гармоники исходного поля пространственного заряда, а также продольную и поперечную компоненты волнового вектора возмущения. Условие равенства нулю определителя этой матрицы дает характеристическое уравнение порядка  $2N$  для  $\Gamma$ . Это уравнение вновь решается численно, чтобы найти ветвь решения, отвечающую максимальному значению  $\Gamma' = \text{Re } \Gamma$ , и исследовать зависимость этого максимального значения от  $\epsilon$  и волнового вектора возмущения.

Проведению анализа неустойчивости предшествует рассмотрение свойств исходного динамического уравнения для потенциала поля пространственного заряда. Завершает статью обсуждение полученных результатов и выводы.

## 2. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Наше исследование, как, в сущности, и анализ работ [21, 22], основано на скалярном динамическом уравнении для потенциала  $\varphi$ , определенного равенством

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi.$$

Это уравнение, выведенное в [11], описывает процессы фотовозбуждения электронов с глубоких ловушек, их дрейф в поле  $\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}$ , диффузию и рекомбинацию. Оно имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{zt} - \frac{\omega_0}{l_s}\Delta\varphi - \frac{1}{l_0}\Delta\varphi_t + \omega_0\Delta\varphi_z + \frac{l_D^2}{l_0}\Delta^2\varphi_t = \\ - \frac{4\pi e}{\epsilon_0}\delta g_z + \frac{4\pi e}{\epsilon_0}\frac{1}{E_0}\nabla(\delta g\nabla\varphi) + \frac{1}{E_0}\nabla(\Delta\varphi_t\nabla\varphi), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\omega_0 = g_0/N_t$  — характеристическая частота,  $N_t$  — эффективная концентрация ловушек,  $g_0$  — пространственно-однородная часть скорости фотовозбуждения электронов (легко выражаемая через коэффициент поглощения света и интенсивность  $I_0$ ),  $\delta g = mg_0 \cos(Kz - \Omega t)$  — ее пространственно осциллирующая часть,  $\epsilon_0$  — статическая диэлектрическая проницаемость кристалла,  $l_0 = \mu\tau E_0$  — длина дрейфа фотоэлектронов,  $l_D = \sqrt{k_B T \mu \tau / e}$  — длина диффузии,  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура и  $l_s = \epsilon_0 E_0 / 4\pi e N_t$  — длина экранирования. Нижние индексы  $z$  и  $t$  означают дифференцирование по продольной координате и времени.

Два первых слагаемых в левой части уравнения (4) описывают бездиссипативное распространение ВПЗ, а три последних — затухание волн. Члены правой части характеризуют возбуждение ВПЗ и эффекты нелинейного взаимодействия. Опуская эти члены и полагая  $\varphi \propto \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega_k t - \gamma_k t)$ , легко найти собственную частоту  $\omega_k$  и декремент затухания  $\gamma_k$  волны с волновым вектором  $\mathbf{k}$  [11]:

$$\omega_k = \frac{4\pi e g_0}{\epsilon_0 E_0 k_z}, \quad \gamma_k = g_0 \left( \frac{1}{N_t} + \frac{4\pi e}{\epsilon_0 \mu \tau E_0^2} \frac{1}{k_z^2} + \frac{4\pi k_B T}{\epsilon_0 E_0^2} \frac{k^2}{k_z^2} \right). \quad (5)$$

Видно, что  $\omega_k$  и  $\gamma_k$  пропорциональны  $I_0$ , т.е. добротность волны,  $Q_k = |\omega_k|/\gamma_k$ , не зависит от интенсивности света. Максимальное (по  $\mathbf{k}$  и  $E_0$ ) значение  $Q_k$  составляет  $Q_k^{max} = \sqrt{\pi e N_t \mu \tau / \epsilon_0}$ . В последующих численных оценках и расчетах мы положим  $\epsilon_0 = 56$ ,  $N_t = 10^{16} \text{ см}^{-3}$ , а произведение  $\mu\tau$  будем варьировать в диапазоне  $(4-8) \cdot 10^{-7} \text{ см}^2/\text{В}$ . Принятые значения отвечают литературным данным по силлениатам [24, 25] и дают  $Q_k^{max} = 6 - 8$ . Близкие к максимальному значения  $Q_k$  достигаются при  $E_0 \gtrsim 6-7 \text{ кВ/см}$ ,  $k_{\perp} = 0$  ( $k_{\perp}$  — поперечная компонента волнового вектора) и периоде волны  $2\pi/k_z \simeq 15-25 \text{ мкм}$ . Отметим, что рост  $k_{\perp}$  в соответствии с (5) всегда вызывает увеличение  $\gamma_k$  и уменьшение  $Q_k$ .

В пренебрежении нелинейными по  $\varphi$  и  $\delta g$  членами уравнение (4) приводит к выражению (3) для стационарной амплитуды поля пространственного заряда. Элементарные оценки показывают, что нелинейные члены несущественны при  $|E_K| \ll E_0$ . В области  $\epsilon \lesssim 0.25$ , как видно из (3), это неравенство остается применимым вплоть до  $m \approx 1$ .

### 3. ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Уравнение (4) допускает одномерное стационарное решение  $\varphi^{(0)}(Kz - \Omega t)$ , имеющее периодичность световой картины (1). Соответствующее поле пространственного заряда имеет только  $z$ -компоненту. С достаточно хорошей точностью оно может быть представлено усеченным рядом Фурье:

$$E = E_0 \sum_{\substack{s=-20 \\ s \neq 0}}^{20} e_s e^{is\xi}, \quad (6)$$

где  $\xi = Kz - \Omega t$ , а  $e_s$  — безразмерная фурье-гармоника поля номера  $s$ . Мы нашли набор  $\{e_s(\epsilon)\}$  численно на основе уравнения (4) и убедились, что он отвечает единственному физическому решению. Последнее доказывается сопоставлением результатов, полученных путем редукции уравнения (4) к алгебраической системе нелинейных

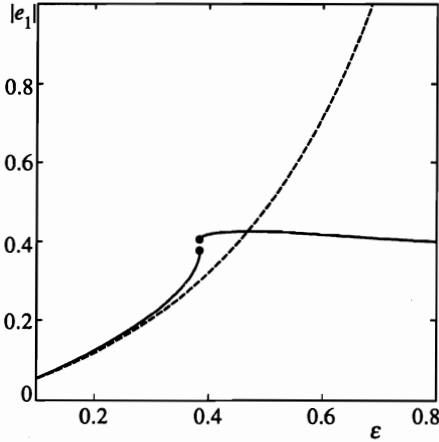


Рис. 2. Сравнение точного решения для амплитуды  $e_1$  (сплошная кривая) с результатом, полученным в линейном по контрасту приближении (штриховая кривая)

уравнений для амплитуд  $e_s$  и посредством временной эволюции поля  $E = -\varphi_z$  к стационарному состоянию. Сплошная линия на рис. 2 показывает зависимость  $|e_1(\epsilon)|$ , вычисленную для  $m = 1$ ,  $E_0 = 7$  кВ/см, периода решетки  $2\pi/K = 20$  мкм и произведения  $\mu\tau = 6 \cdot 10^{-7}$  В/см. Штриховая кривая отвечает соотношению (3), полученному в линейном по контрасту  $m$  приближении при тех же значениях параметров. Видно, что в области  $\epsilon \lesssim 0.3$  кривые практически совпадают. В то же время при  $\epsilon \gtrsim 0.6$  линейное приближение дает сильно завышенные значения  $|e_1|$ . Реально рост  $|e_1(\epsilon)|$  насыщается при  $\epsilon \gtrsim 0.4$ . Любопытно, что в окрестности точки  $\epsilon = 0.4$  сплошная кривая лежит выше штриховой, т. е. учет высших гармоник приводит здесь к увеличению фундаментальной амплитуды  $E_K$ . Отметим также наличие гистерезиса при  $\epsilon \simeq 0.39$ . Эта особенность, как и смещение максимума из точки  $\epsilon = 1$  в точку  $\epsilon \simeq 0.4$ , связана с положительным нелинейным сдвигом частоты для ВПЗ [9, 11, 25]. С увеличением произведения  $\mu\tau$  гистерезис и смещение максимума становятся выраженными более сильно.

Рисунок 3 показывает зависимость  $|e_s|$  от номера  $s$  при разных значениях  $\epsilon$  и прежних значениях экспериментальных и материальных параметров. Хорошо видно, что число существенных гармоник быстро растет при изменении  $\epsilon$  от 0.35 до 0.4. Для  $\epsilon \lesssim 0.25$  высшие гармоники очень малы. На рис. 4 изображены зависимости полного поля  $E_0 + E(\xi)$  для  $m = 1$  и нескольких значений  $\epsilon$ , полученные суммированием ряда Фурье (6). При  $\epsilon = 0.25$  распределение поля подобно распределению интенсивности света (1). Увеличение вклада высших гармоник с ростом  $\epsilon$  сопровождается усилением асимметрии профиля поля и смещением в положительную сторону его максимума. Интересно отметить, что при достаточно большом значении  $\epsilon$  полное поле приближается к нулю вблизи правого конца интервала.

#### 4. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Для исследования устойчивости найденного выше периодического решения мы представим потенциал в виде  $\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)}$ , где  $\varphi^{(1)}$  — малое возмущение. В общем случае оно зависит от переменных  $\xi$ ,  $r_{\perp} = (x, y)$  и  $t$ . Линеаризация исходного динамического уравнения (4) относительно  $\varphi^{(1)}$  приводит к однородному уравнению в частных

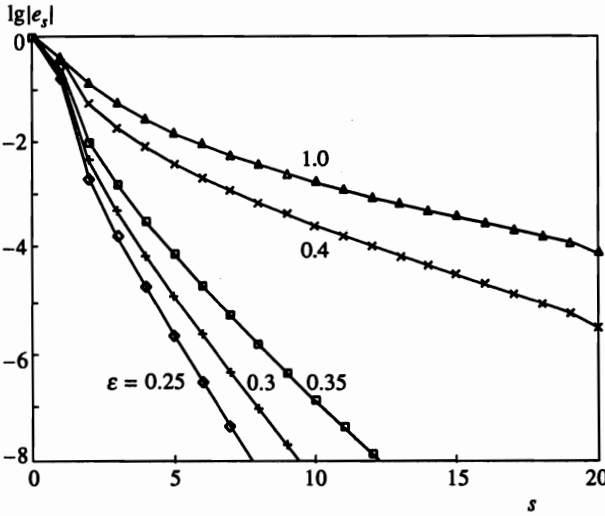


Рис. 3. Зависимость амплитуды  $|e_s|$  от номера  $s$  для разных значений  $\epsilon$ . Кривые проведены для облегчения восприятия

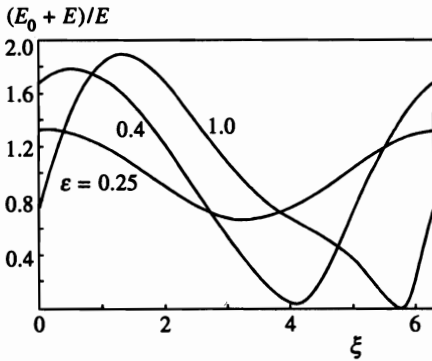


Рис. 4. Пространственный профиль электрического поля внутри одного периода для нескольких значений  $\epsilon$

производных. Существенно, что коэффициенты этого уравнения зависят от  $\xi$  (через  $\varphi^{(0)}(\xi)$ ), но не от  $r_{\perp}$  и  $t$ . Следовательно, мы можем положить в этом уравнении

$$\varphi^{(1)} = u(\xi) \exp(ik_{\perp}r_{\perp} + \Gamma t) + \text{с.с.},$$

где  $\mathbf{k}_{\perp} = (k_x, k_y)$  — поперечная компонента волнового вектора возмущения, а  $\Gamma$  — инкремент неустойчивости. Таким образом, мы приходим к однородному дифференциальному уравнению для  $u(\xi)$ , коэффициенты которого содержат  $\varphi^{(0)}(\xi)$ ,  $\Gamma$  и  $\mathbf{k}_{\perp}$ . Амплитуда  $u(\xi)$  представима в виде

$$u = e^{i\kappa\xi} \sum_{s'=-N}^{N-1} u_{s'} e^{is'\xi}, \tag{7}$$

где  $\kappa$  — безразмерное продольное волновое число, принимающее значения внутри интервала  $[0,1]$ , а  $N \leq 20$  — число фурье-гармоник в исходном состоянии, которое мы хотим принять во внимание. Разложение (7) аналогично представлению для блоховской функции электрона в одномерном периодическом потенциале. Фактически оно означает, что, рассматривая возмущение исходного состояния, мы учитываем пространственные частоты  $K(-N + \kappa) \pm \mathbf{k}_\perp, \dots, K(N - 1 + \kappa) \pm \mathbf{k}_\perp$ . Продольные компоненты этих векторов по абсолютной величине меньше чем  $NK$ . В том случае, если  $\kappa = 1/2$ , возмущение представляет собой основную субгармонику, нерасщепленную или поперечно-расщепленную в зависимости от того, равна или не равна нулю поперечная проекция  $\mathbf{k}_\perp$  волнового вектора.

Используя представление (7) и разложение Фурье (6), мы сводим, наконец, дифференциальное уравнение для  $u(\xi)$  к следующему матричному линейному уравнению для  $u_s$ :

$$(C_s \delta_{ss'} - A_{ss'}) u_{s'} = 0. \tag{8}$$

Здесь  $\delta_{ss'}$  — символ Кронекера, а коэффициенты  $C_s$  и  $A_{ss'}$  задаются соотношениями

$$C_s = [(s + \kappa)^2 + \theta^2] \{-i(s + \kappa)\nu - (s + \kappa)^2 + \varepsilon - i\varepsilon(s + \kappa)Kl_s + \\ + \frac{1}{Kl_0} [\nu - i(s + \kappa)] + \frac{Kl_D^2}{l_0} [(s + \kappa)^2 + \theta^2] [\nu - i(s + \kappa)]\}, \tag{9}$$

$$A_{ss'} = -\varepsilon \frac{m}{2} (\delta_{s, s'+1} + \delta_{s, s'-1}) [(s + \kappa)(s' + \kappa) + \theta^2] + \\ + e_{s-s'} \{(s - s')^2 [(s + \kappa)(s' + \kappa) + \theta^2] + (s + \kappa) [(s' + \kappa)^2 + \theta^2] (s' + \kappa + i\nu)\},$$

где  $\nu = \Gamma/\Omega$ , а  $\theta = |k_\perp|/K$  — безразмерное поперечное волновое число. Отметим, что  $2N$ -мерный вектор  $C_s$  происходит из левой части уравнения (4), а матрица  $A_{ss'}$ , включающая в себя найденные численно амплитуды  $e_{s-s'}$ , — из его правой части.

Условие разрешимости системы (8),

$$\det (C_s \delta_{ss'} - A_{ss'}) = 0, \tag{10}$$

представляет собой искомое характеристическое уравнение для инкремента неустойчивости. Это уравнение имеет  $2N$  ветвей решений для  $\Gamma$  как функции  $\varepsilon$ ,  $\kappa$  и  $\theta$ . В общем случае эти ветви могут быть найдены только численно. Аналитическое решение характеристического уравнения возможно только для случая  $N = 1$ . Такое упрощение может быть оправдано лишь при  $\varepsilon \lesssim 0.25$ ; оно ведет к известным аналитическим результатам по параметрическому возбуждению ВПЗ [10, 11].

### 5. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Характеристическое уравнение (10) решалось численно. Для каждого номера  $N$  и для каждого набора параметров  $\varepsilon = \omega_K/\Omega$ ,  $\kappa$  и  $\theta = |k_\perp|/K$  мы интересовались ветвью решения с максимально возможной скоростью экспоненциального роста возмущений  $\Gamma'_N = [\text{Re } \Gamma]_{\text{max}}$ , т.е. ветвью, отвечающей сильнейшей неустойчивости. Ниже приводятся результаты нашего анализа.

Иследуем вначале неустойчивость относительно рождения нерасщепленной субгармоники  $K/2$ , т.е. неустойчивость относительно удвоения периода. В этом случае



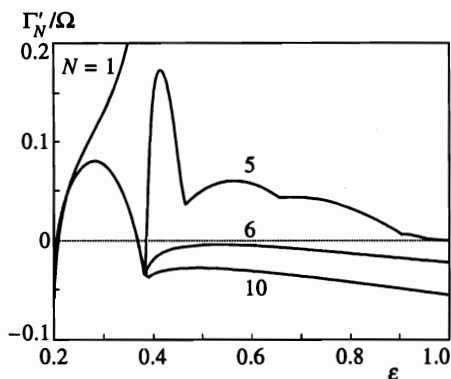


Рис. 5

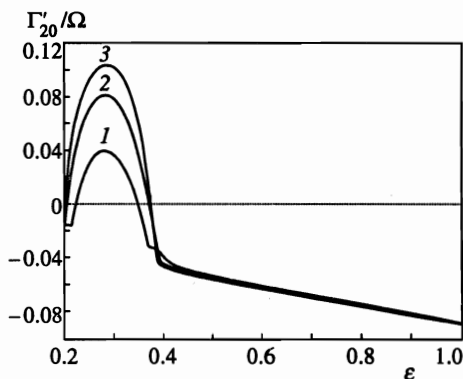


Рис. 6

Рис. 5. Зависимость  $\Gamma'_N(\epsilon)$  для  $\kappa = 1/2, \theta = 0$ , разных значений  $N$  и  $m = 1$

Рис. 6. Зависимость  $\Gamma'_{20}(\epsilon)$  для  $n = 1, \kappa = 1/2, \theta = 0$  при различных значениях произведения  $\mu\tau$ . Кривые 1, 2 и 3 отвечают  $\mu\tau = 4 \cdot 10^{-7}, 6 \cdot 10^{-7}$  и  $8 \cdot 10^{-7} \text{ см}^2/\text{В}$

мы должны ограничиться одномерным случаем ( $\theta = 0$ ) и положить  $\kappa = 1/2$ . Рисунок 5 показывает зависимость  $\Gamma'_N(\epsilon)$  для  $\mu\tau = 6 \cdot 10^{-7} \text{ см}^2/\text{В}$ , нескольких значений  $N$  и  $m = 1$ . В соответствии с ожидаемым мы видим, что при  $\epsilon \lesssim 0.25$  (т. е. при  $\Omega \gtrsim 4\omega_K$ ) разумные результаты обеспечиваются уже в рамках аналитической теории ( $N = 1$ ). Увеличение числа  $N$ , т. е. учет влияния высших пространственных гармоник, дает здесь только незначительные поправки к инкременту.

Ситуация существенно меняется при  $\epsilon \gtrsim 0.28$ . В этой области аналитическая модель с  $N = 1$  уже неприменима и инкремент  $\Gamma'_N(\epsilon)$  значительно убывает с увеличением числа пространственных гармоник  $N$ , принятых во внимание. Важно, что для  $\epsilon \gtrsim 0.37$  и  $N \geq 6$  инкремент  $\Gamma'_N$  становится отрицательным. Таким образом, имеется только одна область частотной расстройки (область  $\epsilon$ ), в которой возможно возбуждение нерасщепленной субгармоники  $K/2$ . Утверждение о наличии второй области неустойчивости при больших  $\epsilon$ , сделанное в [21, 22], является следствием неоправданных предположений этой работы. Рисунок 5 ясно показывает, как исчезает эта нефизическая область с увеличением  $N$ . Следует отметить, что модель с  $N = 4$  дает весьма точное описание инкремента во всей области субгармонической неустойчивости,  $0.22 \lesssim \epsilon \lesssim 0.37$ .

Рисунок 6 показывает зависимость  $\Gamma'_{20}(\epsilon)$  для  $m = 1, \kappa = 1/2, \theta = 0$  при разных значениях произведения  $\mu\tau$ . Видно, что увеличение  $\mu\tau$  способствует неустойчивости, но не меняет вывода относительно наличия только одной области неустойчивости. Варьирование приложенного поля  $E_0$  и периода решетки  $2\pi/K$  вблизи рассмотренных выше значений 7 кВ/см и 20 мкм также не приводит к качественно новым результатам. Значительное уменьшение  $E_0$  или значительное изменение  $K$  приводят к подавлению неустойчивости. Для  $E_0 = 7 \text{ кВ/см}$  и  $2\pi/K = 20 \text{ мкм}$  неустойчивость исчезает при  $\mu\tau \lesssim 3 \cdot 10^{-7} \text{ см}^2/\text{В}$ .

Обратим внимание, что каждая из кривых на рис. 6 состоит из двух участков, отвечающих различным ветвям решения характеристического уравнения. Переход с одной

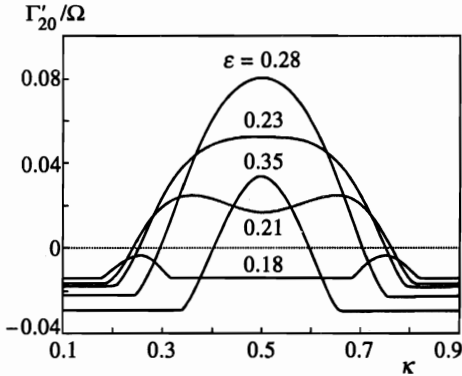


Рис. 7

Рис. 7. Зависимость  $\Gamma'_{20}$  от продольного волнового числа  $\kappa$  при  $n = 1, \theta = 0, \mu\tau = 6 \cdot 10^{-7} \text{ см}^2/\text{В}$  и разных значениях  $\epsilon$

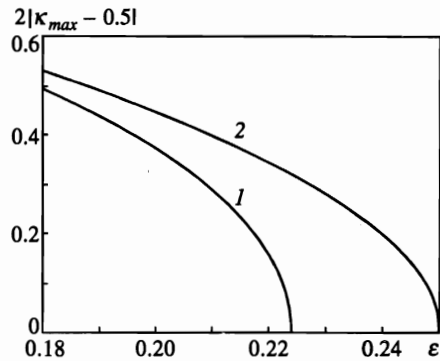


Рис. 8

Рис. 8. Зависимость величины продольного расщепления от  $\epsilon$ , полученная численно (1) и аналитически (2)

ветви на другую осуществляется в окрестности точки  $\epsilon = 0.38$ . Правые (устойчивые) участки кривых в действительности не имеют никакого отношения к генерации субгармоник. Они описывают затухание возмущений с высокими пространственными частотами, связь которых с накачкой очень слаба. Эти участки показывают, однако, что субгармонические возмущения при  $\epsilon \gtrsim 0.4$  характеризуются еще меньшими отрицательными значениями  $\Gamma'$ .

Рассмотрим теперь зависимость инкремента неустойчивости от продольного волнового числа  $\kappa$ . На рис. 7 приведены зависимости  $\Gamma'_{20}(\kappa)$  при  $\theta = 0$  и различных значениях  $\epsilon$ . При  $\epsilon \gtrsim 0.224$  кривые имеют один максимум, расположенный в точке  $\kappa = 1/2$ , в то время как при  $\epsilon < 0.224$  они характеризуются двумя максимумами, симметрично расположенными относительно точки  $\kappa = 1/2$ . Такая бифуркация согласуется с аналитической теорией [10, 11] и указывает на возможность симметричного продольного расщепления основной субгармоники  $K/2$  при уменьшении  $\epsilon$ .

Кривая 1 на рис. 8 характеризует зависимость расстояния между максимумами от параметра  $\epsilon$ , полученную численно для  $N = 20$  и  $m = 1$ , а кривая 2 отвечает результату аналитической теории,  $\sqrt{1 - 4\epsilon}$ . Основное различие результатов заключается в сдвиге точки бифуркации от  $\epsilon = 0.25$  к  $\epsilon \simeq 0.224$ . Этот сдвиг связан с влиянием высших пространственных гармоник. Разница между аналитическим и численным значениями находится в пределах точности аналитической теории.

Поскольку максимум зависимости  $\Gamma'(\kappa)$  в общем случае не отвечает  $\kappa = 1/2$ , представляет интерес вычислить максимальное по  $\kappa$  значение  $\Gamma'$  как функцию внешнего параметра  $\epsilon$ . Именно эта зависимость,  $\Gamma'_{max}(\epsilon)$ , есть наиболее важная характеристика неустойчивости в одномерном случае. Сплошная кривая на рис. 9 дает  $\Gamma'_{max}(\epsilon)$  в актуальном интервале  $\epsilon$ . Точка на этой кривой отвечает появлению продольного расщепления. Максимум инкремента достигается при  $\epsilon \simeq 0.265$ . Штриховая кривая характеризует  $\Gamma'(\epsilon)$  для  $\kappa = 1/2$  в области расщепления. Видно, что учет расщепления существенно

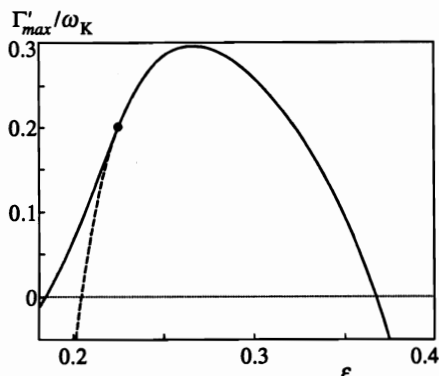


Рис. 9

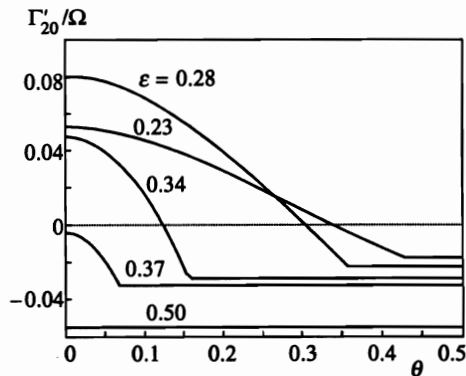


Рис. 10

Рис. 9. Сплошная кривая — зависимость максимального по  $\kappa$  значения инкремента от  $\epsilon$  для  $N = 20$  и  $\theta = 0$ . Штриховая кривая отвечает  $\kappa = 1/2$

Рис. 10. Зависимость  $\Gamma'_{20}$  от поперечного волнового числа  $\theta$  для  $m = 1$ ,  $\kappa = 1/2$ ,  $\mu\tau = 6 \cdot 10^{-7} \text{ см}^2/\text{В}$  и разных значений  $\epsilon$

сдвигает левую границу неустойчивости в сторону больших расстройек (малых  $\epsilon$ ).

Из сравнения результатов наших расчетов с аналитической теорией [10,11] видно, что последняя дает качественно (или даже полуколичественно) верные результаты для  $\epsilon \lesssim 0.25$ . В области  $\epsilon \gtrsim 0.25$ , где последовательная аналитическая теория бессильна, а неустойчивость может быть еще весьма сильна, численные результаты имеют самостоятельную ценность. Напомним, что учет двадцати пространственных гармоник не является необходимым в области неустойчивости. С хорошей точностью приведенные выше результаты могут быть получены уже при  $N = 4$ . Отметим, что при уменьшении коэффициента модуляции  $m$  роль высших гармоник резко уменьшается, точность аналитической теории соответственно растет, а неустойчивость ослабевает.

Исследуем, наконец, зависимость  $\Gamma'$  от безразмерного поперечного волнового числа  $\theta = |\mathbf{k}_\perp|/K$ . Такое исследование важно для интерпретации поперечного расщепления субгармоники  $K/2$ . Рисунок 10 показывает зависимость  $\Gamma'_{20}(\theta)$  для  $m = 1$ ,  $\kappa = 1/2$  и разных значений  $\epsilon$ . Закономерности, следующие из приведенных графических данных, весьма просты. В том случае, когда значение  $\Gamma'(\theta = 0)$  положительно (и даже слегка отрицательно), рост  $\theta$  приводит к уменьшению  $\Gamma'$ , т. е. не способствует неустойчивости; скорость убывания  $\Gamma'(\theta)$  растет с увеличением  $\epsilon$  в области положительности инкремента. При достаточно больших значениях  $\theta(\epsilon)$ , когда инкремент уже становится отрицательным, убывание функции  $\Gamma'(\theta)$  резко насыщается. При  $\epsilon \gtrsim 0.385$  зависимость  $\Gamma'(\theta)$  практически отсутствует. Постоянные (устойчивые) участки кривых на рис. 10 не связаны с параметрическим возбуждением субгармоник. Как и правые (отрицательные) участки кривых на рис. 6, они характеризуют затухание возмущений с высокими пространственными частотами, которые очень слабо связаны с накачкой. Рост инкремента  $\Gamma'$  с увеличением  $\theta$  не исключен для более низких ветвей решения характеристического уравнения (8), однако для этих ветвей  $\Gamma' < 0$ . Варьирование продольного волнового числа  $\kappa$ , а также произведения  $\mu\tau$  не приводит к росту  $\Gamma'(\theta)$ .

## 6. ОБСУЖДЕНИЕ

По нашему мнению, настоящая работа представляет интерес в двух основных аспектах. Во-первых, развит новый метод для исследования устойчивости высококонтрастных фоторефрактивных решеток в полупроводниковых кристаллах относительно трехмерных возмущений. Этот метод способен дать решение задачи в случаях, когда использование чисто аналитического или численного подходов весьма затруднительно. Он, несомненно, может быть приложен к исследованию устойчивости фоторефрактивных решеток, возбуждаемых знакопеременным внешним полем. Этот случай весьма актуален для различных приложений фоторефрактивного эффекта [25, 26], а высшие пространственные гармоники здесь не менее существенны, чем при использовании техники бегущих решеток.

Во-вторых, стало ясно, что интерпретация поперечного расщепления, данная недавно в работах [21, 22], глубоко ошибочна. Последовательная линейная теория параметрического возбуждения ВПЗ (включающая в себя высшие гармоники поля пространственного заряда) показывает отсутствие как дополнительной области неустойчивости, так и преимущественного возбуждения поперечно-расщепленных субгармоник.

Невозможность объяснения поперечного расщепления субгармоник в рамках линейной теории вовсе не означает тупика в исследовании этого интересного эффекта. Более того, полученные результаты проливают свет на его природу. Как указано в [17], преимущество поперечного расщепления перед продольным должно проявляться на нелинейной стадии неустойчивости. На основе результатов, полученных в [17], в недавней работе [27] установлено, что для поперечно-расщепленной субгармоники  $K/2$  конечной амплитуды существует область устойчивости относительно малых возмущений, в то время как нерасщепленная и продольно-расщепленная субгармоники  $K/2$  всегда модуляционно неустойчивы. Полученные в настоящей работе результаты означают, что интерпретация поперечного расщепления в рамках нелинейной теории, данная в работе [27], становится единственной.

Справедливости ради следует отметить еще один аспект рассмотренной выше проблемы. Эксперимент дает обычно значения высших гармоник поля пространственного заряда,  $E_{2K}, E_{3K} \dots$ , заметно меньшие расчетных. Одна из очевидных причин такого расхождения связана с неидеальностью условий эксперимента, в частности, с неизбежно присутствующим уширением фурье-спектра распределения интенсивности света. Из общих соображений ясно, что такое уширение наиболее сильно сказывается именно на высших полевых пространственных гармониках. Вопрос о том, как влияет это уширение на параметрическую неустойчивость, остается открытым.

## 7. ВЫВОДЫ

Высшие гармоники поля пространственного заряда существенны при анализе устойчивости высококонтрастных фоторефрактивных решеток, индуцируемых в полупроводниковых кристаллах бегущей интерференционной световой картиной, в области частотных расстройок  $\Omega \lesssim 4\omega_K$ .

Комбинирование аналитических и численных методов способно дать полный анализ устойчивости упомянутых выше фоторефрактивных решеток относительно малых трехмерных возмущений.

Результаты недавних работ [21, 22] по интерпретации поперечного расщепления субгармоники  $K/2$  ошибочны. Последовательная теория параметрического возбуждения ВПЗ, включающая в себя высшие пространственные гармоники, предсказывает наличие лишь одной области неустойчивости и дает количественную модификацию известных аналитических результатов [10, 11] в этой области.

Авторы признательны Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку (грант № 96-02-19126). А. И. Черных благодарен М. Г. Степанову за ценные замечания.

## Литература

1. Р. Ф. Казаринов, Р. А. Сурис, Б. И. Фукс, ФТП **6**, 572 (1972).
2. Р. А. Сурис, Б. И. Фукс, ФТП **9**, 1717 (1975).
3. S. Mallick, B. Imbert, H. Ducollet, J. P. Hessian, and J.-P. Huignart, J. Appl. Phys. **63**, 5660 (1988).
4. D. J. Webb and L. Solymar, Opt. Commun. **74**, 386 (1990).
5. D. J. Webb, L. B. Au, D. C. Jones, and L. Solymar, Appl. Phys. Lett. **57**, 1602 (1990).
6. J. Takacs, M. Schaub, and L. Solymar, Opt. Comm. **91**, 252 (1992).
7. J. Takacs and L. Solymar, Opt. Lett. **17**, 247 (1992).
8. C. H. Kwak, M. Shamonin, J. Takacs, and L. Solymar, Appl. Phys. Lett. **62**, 328 (1993).
9. А. Бледовский, Д. Оттен, К. Рингхофер, Б. И. Стурман, ЖЭТФ **102**, 406 (1992).
10. B. I. Sturman, M. Mann, and K. H. Ringhofer, Appl. Phys. A **55**, 325 (1992).
11. B. I. Sturman, M. Mann, J. Otten, and K. H. Ringhofer, J. Opt. Soc. Amer. B **10**, 1919 (1993).
12. B. I. Sturman, M. Mann, J. Otten, K. H. Ringhofer, and A. Bledowski, Appl. Phys. A **55**, 55 (1992).
13. T. E. McClelland, D. J. Webb, B. I. Sturman, and K. H. Ringhofer, Phys. Rev. Lett. **73**, 3082 (1994).
14. B. I. Sturman, T. E. McClelland, D. J. Webb, T. Shamonina, and K. H. Ringhofer, J. Opt. Soc. Amer. B **12**, 1621 (1995).
15. H. C. Pedersen and P. M. Johansen, J. Opt. Soc. Amer. B **12**, 1065 (1995).
16. P. Buchhave, S. Lynksyntov, M. Vasnetsov, and C. Heyde, J. Opt. Soc. Amer. B **13**, 2595 (1996).
17. B. I. Sturman, M. Aguilar, F. Agullo-Lopez, and K. H. Ringhofer, Phys. Rev. E **55**, 6072 (1997).
18. В. С. Львов, *Нелинейные спиновые волны*, Наука, Москва (1987) (перевод: V. S. L'vov, *Wave Turbulence Under Parametric Excitation. Application to Magnets*, Springer Series in Nonlinear Dynamics, Springer-Verlag, Berlin (1994)).
19. J. Takacs and L. Solymar, private communication (1992).
20. H. C. Pedersen and P. M. Johansen, Opt. Lett. **19**, 1418 (1994).
21. H. C. Pedersen and P. M. Johansen, Phys. Rev. Lett. **77**, 3166 (1996).
22. H. C. Pedersen and P. M. Johansen, J. Opt. Soc. Amer. B **14**, 1418 (1997).
23. T. E. McClelland, D. J. Webb, B. I. Sturman, E. Shamonina, M. Mann, and K. H. Ringhofer, Opt. Comm. **131**, 315 (1996).
24. P. Refregier, L. Solymar, H. Rajbenbach, and J.-P. Huignard, J. Appl. Phys. **58**, 45 (1985).
25. M. P. Petrov, S. I. Stepanov, and A. V. Khomenko, *Photorefractive Crystals in Coherent Optical Systems*, Springer Series in Optical Sciences, Springer-Verlag, Berlin (1991).
26. A. A. Kamshilin, E. Raita, and A. V. Khomenko, J. Opt. Soc. Amer. B **13**, 2536 (1996).
27. E. V. Podivilov, H. C. Pedersen, P. M. Johansen, and B. I. Sturman, submitted to Phys. Rev. E (1998).