ЖЭТФ, 1998, том 114, вып. 3(9), стр. 1047–1066

КОЛЛЕКТИВНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ДВУХЗОННЫХ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ СИСТЕМАХ С МАЛОЙ ПЛОТНОСТЬЮ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА

Ф. Г. Кочорбэ, М. Е. Палистрант*

Институт прикладной физики Академии наук Молдовы
277028, Кишинев, Молдова

Поступила в редакцию 5 августа 1997 г.

Исследованы коллективные колебания в двухзонных сверхпроводящих системах со всеми возможными внутри- и межзонными взаимодействиями при произвольных плотностях N_0 носителей заряда в том числе и малых, когда химический потенциал $\mu \sim \Delta$. Учет процессов межзонной куперовской пары во внутризонную приводит к появлению новой экситонной моды в дополнение к акустической моде Боголюбова–Андерсона и экситонной моде «леггеттовского» типа. Наличие параметров порядка Δ_{12}, дополнительного к Δ_{11}, Δ_{22}, и несимметричное обрезание интегралов приводят к перемешиванию флуктуаций фаз и амплитуд параметров порядка разных зон. Это перемешивание и зависимость параметров порядка от N_0 дает существенную зависимость этих двух экситонных мод от плотности N_0 носителей заряда.

1. ВВЕДЕНИЕ

После открытия высокотемпературных сверхпроводников было предложено большое число моделей для описания широкого спектра магнитных и сверхпроводящих свойств этих соединений. Исследования проводились в рамках как фононного механизма сверхпроводимости [1–5], так и экситонного [6], дырочного [7], плазмонного [8, 9], магнитного [10] и других механизмов (см. обзор [11]).

Наряду с этим для описания сверхпроводящих свойств высокотемпературных сверхпроводников широко используется модель с двумя перекрывающимися зонами на поверхности Ферми [12, 13]. Термодинамические, электромагнитные и кинетические свойства двухзонных сверхпроводников описаны в монографиях [14, 15] и обзоре [16]. Эта модель, а также ее обобщения на случай анизотропных систем при наличии сингулярных точек в импульсном пространстве, приводящих к топологическим электронным переходам, дает возможность описать большое число экспериментальных данных по исследованию высокотемпературных сверхпроводников [17–24].

Важной особенностью двухзонной модели является независимость температуры сверхпроводящего перехода T_c от знака эффективных электрон-электронных взаимодействий V_{ij} $(i \neq j)$. Теория может быть применена как для обычного фононного механизма сверхпроводимости, так и для нефононного. Более того, обнаружено, что даже если существует отталкивание между носителями заряда, то возможна как низкотемпературная [14], так и высокотемпературная сверхпроводимость [25, 26] при условии $V_{11}V_{22} - V_{12}^2 < 0$.

*E-mail: statphys@cc.acad.md

Многочисленные расчеты (см., например, [27, 28]) подтверждают обоснованность многозонной теории, показывая возможность пересечения нескольких энергетических зон на поверхности Ферми в высокотемпературных сверхпроводниках. Например, в $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ [28] число энергетических зон, пересекающихся на поверхности Ферми, растет с ростом содержания кислорода.

Важно отметить, что перекрытие энергетических полос на поверхности Ферми приводит не только к количественно, но и к качественно отличным от случая одной энергетической зоны результатам. Так, например, исследование T_c на основе двухзонной модели с учетом топологических переходов [21, 23], а также трехзонной модели [29] позволяет объяснить ступенчатую зависимость этой величины от содержания кислорода в $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$, наблюдаемую экспериментально.

Другим интересным явлением, присущим только многозонным сверхпроводникам, является возникновение коллективных колебаний экситонного типа, вызванных флуктуациями фаз параметров порядка разных зон [30, 31]. Леггетт [30] первым обратил внимание на это явление. Он показал, что в двухзонных сверхпроводниках с обычным фононным механизмом сверхпроводимости возникает коллективная мода экситонного типа в дополнение к акустической моде Боголюбова–Андерсона.

В работе [31] одного из авторов исследованы коллективные колебания в трехзонной модели с фононными механизмом сверхпроводимости. В этой модели возникают две экситонные и одна акустическая моды в отличие от двухзонной модели Леггетта [30]. Коллективные колебания в двухзонных низкоразмерных сверхпроводниках исследованы в работе [32]. При этом рассмотрены как фононный, так и нефононный механизмы сверхпроводимости. В этих двухзонных системах также получена экситонная мода в дополнение к акустической моде Боголюбова–Андерсона как для квазиодномерных, так и для двумерных сверхпроводников.

Немагнитная примесь в двухзонных примесных сверхпроводниках [33–35] не приводит к затуханию коллективных мод, а способствует увеличению частоты коллективных колебаний с ростом концентрации примеси.

Коллективные колебания в двухзонной системе в состоянии бозе-конденсата локальных пар исследовались в работе [36]. В такой системе обнаружена одна экситонная мода в дополнение к акустической моде Боголюбова–Андерсона. Однако в отличие от работ [30–35], в которых предполагается, что коллективные колебания вызваны флуктуациями фаз параметров порядка разных зон, эти моды определяются перемешиванием флуктуаций фаз и амплитуд параметров порядка разных зон.

Отметим также, что многослойная модель высокотемпературного сверхпроводника [37, 38] эквивалента многозонной модели. Например, при исследовании коллективных колебаний бислойных сверхпроводников [39–41] также обнаружена «леггеттовская» мода экситонного типа. Эта мода индуцируется флуктуациями фаз параметров порядка разных слоев.

Как известно, в высокотемпературных сверхпроводниках наблюдается произвольная, в том числе и малая ($\mu \sim \Delta, T_c$, $\mu < \omega_D$, μ — химический потенциал, Δ — параметр порядка, ω_D — дебавская частота) плотность носителей заряда. В случае малой плотности носителей заряда ($\mu \sim \Delta$) в двухзонной модели необходимо учесть все возможные электронные спаривания [42] в отличие от работ [12, 14], где учитывались только внутризонные спаривания и переход куперовских пар как целого из одной зоны в другую. При этом нам следует отказаться от диагонального приближения по зонным индексам, так как в такой модели [42] $\Delta_{12} \sim \Delta_{11}$, Δ_{22}. В таких системах все наблюдаемые физические величины становятся существенно зависящими от плотности носителей заряда. При этом на температурной зависимости химического потенциала имеется излом при $T = T_c$ [43, 44]. Перекрытие двух энергетических полос в такой модели приводит к увеличению верхней границы исчезновения этого излома в два-три раза ($\sim$ 5–6 мэВ) [42], что облегчает экспериментальное обнаружение этого явления.

В этой статье исследованы коллективные колебания в двухзонном (с двумя неэквивалентными слоями, см. разд. 4) сверхпроводнике с учетом произвольной, в том числе и малой ($\mu \sim \Delta$) плотности носителей заряда. Эта двухзонная система может быть эффективно описана как псевдотрехзонная модель (с параметрами порядка Δ_{12}, Δ_{11}, Δ_{22}) с произвольной плотностью носителей заряда.

Статья построена следующим образом. Во втором разделе приведен гамильтониан исследуемой системы и основные уравнения для вершинных функций, параметров порядка и уравнение для частоты коллективных колебаний. В третьем разделе исследованы коллективные колебания для малых частот $\left(\omega^2/4\Delta_i^2 \ll 1\right)$ при $\mathbf{k} = 0$. В последнем разделе приведены основные выводы к работе. Приложения А–Г способствуют пониманию выполненных расчетов.

2. ГАМИЛЬТОНИАН СИСТЕМЫ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Гамильтониан двухзонной системы имеет вид [12–14]:

$$H = \sum_{n\mathbf{k}\sigma} [\varepsilon_n(\mathbf{k}) - \mu]\, a^+_{n\mathbf{k}\sigma} a_{n\mathbf{k}\sigma} - \\ - \frac{1}{V} \sum_{m_1 \ldots m_4} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} V^{m_3 m_4}_{m_1 m_2}\left(\mathbf{k}, -\mathbf{k}', -\mathbf{k}, \mathbf{k}'\right) a^+_{m_1\mathbf{k}\uparrow} a^+_{m_2-\mathbf{k}\downarrow} a_{m_3-\mathbf{k}'\downarrow} a_{m_4\mathbf{k}'\uparrow}, \tag{1}$$

где $a^+_{n\mathbf{k}\sigma}$ и $a_{n\mathbf{k}\sigma}$ — операторы рождения и уничтожения электрона в n-й зоне со спином σ и квазиволновым вектором $\mathbf{k}$, $V^{m_3 m_4}_{m_1 m_2}$ — константы внутризонных и межзонных взаимодействий. Выражение (1) является обобщением модельного гамильтониана БКШ–Боголюбова на двухзонный случай. При этом учитываются всевозможные способы спаривания электронов как внутри каждой зоны, так и между электронами разных зон. В случае $m_1 = m_2$, $m_3 = m_4$ гамильтониан (1) переходит в соответствующее выражение модели Москаленко [12–14] (применимой для систем с большой плотностью носителей заряда), в которой рассматриваются только внутризонные спаривания и переход куперовских пар целиком из одной зоны в другую.

Введем двухчастичную функцию Грина, описывающую корреляцию «плотность–плотность»:

$$K(\mathbf{x}\alpha\mathbf{y}\beta) = \left\langle T\, \psi^+_\alpha(\mathbf{x})\, \psi_\alpha(\mathbf{x})\, \psi^+_\beta(\mathbf{y})\, \psi_\beta(\mathbf{y}) \right\rangle. \tag{2}$$

Оператор $\psi_\alpha(\mathbf{x})$ определяется как

$$\psi_\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{n\mathbf{k}} \psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{x})\, a_{n\mathbf{k}\alpha}, \quad \psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = U_{n\mathbf{k}}(\mathbf{x})\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \tag{3}$$

здесь $\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{x})$ — функция Блоха в n-й зоне, $U_{n\mathbf{k}}(\mathbf{x})$ — ее амплитуда.

В случае сверхпроводящего состояния на основании теории возмущений [45] двухчастичная функция $K(\mathbf{x}\alpha\mathbf{y}\beta)$ определяется шестнадцатью вершинными функциями, которые можно найти из четырех независимых систем уравнений. Исходим из системы уравнений для следующей четверки вершинных функций:

$$\Gamma^{\substack{+-\\+-}}, \Gamma^{\substack{--\\--}}, \Gamma^{\substack{+-\\--}}, \Gamma^{\substack{--\\+-}}. \tag{4}$$

Значки «+» и «−» соответственно означают выход стрелки из вершины и вход стрелки в вершину.

Можно показать, что функции Γ^γ $\left(\gamma = {}^{+-}_{--}, {}^{--}_{+-}\right)$ в $n\mathbf{k}\Omega$-представлении входит в систему уравнений (А.3) (см. Приложение А) с суммарным импульсом, далеким от значения на поверхности Ферми. Это обстоятельство позволяет пренебречь этими членами в (А.3) в рассматриваемом приближении типа БКШ [46, 14].

Заменяя оставшиеся вершинные функции Γ^α $\left(\alpha = {}^{+-}_{+-}, {}^{--}_{--}\right)$ их значениями на поверхности Ферми,

$$\Gamma^\alpha_{m_1m_2m_3m_4}(k) = \Gamma^\alpha_{m_1m_2m_3m_4}\left(p_F + \frac{k}{2}, -p_F + \frac{k}{2}, p_3, p_4\right), \tag{5}$$

получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma}^{\substack{+-\\+-}}(k) &= -\widehat{V} + \widehat{V}\widehat{A}(k)\widehat{\Gamma}^{\substack{+-\\+-}}(k) + \widehat{V}\widehat{B}(k)\widehat{\Gamma}^{\substack{--\\--}}, \\ \widehat{\Gamma}^{\substack{--\\--}}(-k) &= \widehat{V}\widehat{A}(-k)\widehat{\Gamma}^{\substack{--\\--}}(-k) + \widehat{V}\widehat{B}(-k)\widehat{\Gamma}^{\substack{+-\\+-}}(k), \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\widehat{\Gamma}^\alpha = \begin{pmatrix} \Gamma^\alpha_{1111}(k) & \Gamma^\alpha_{1122}(k) & \Gamma^\alpha_{1112}(k) \\ \Gamma^\alpha_{2211}(k) & \Gamma^\alpha_{2222}(k) & \Gamma^\alpha_{2212}(k) \\ \Gamma^\alpha_{1211}(k) & \Gamma^\alpha_{1222}(k) & \Gamma^\alpha_{1212}(k) \end{pmatrix}, \quad \widehat{V} = \begin{pmatrix} V_{1111} & V_{1122} & V_{1112} \\ V_{2211} & V_{2222} & V_{2212} \\ V_{1211} & V_{1222} & V_{1212} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Здесь матрицы $\widehat{A}(k)$, $\widehat{B}(k)$ строятся так же, как и матрицы $\widehat{\Gamma}^\alpha(k)$, причем

$$\begin{aligned} A_{m_1m_2m_3m_4}(k) &= \frac{1}{\beta}\sum_q G_{m_1m_2}\left(q + \frac{k}{2}\right) G_{m_3m_4}\left(-q + \frac{k}{2}\right), \\ B_{m_1m_2m_3m_4}(k) &= \frac{1}{\beta}\sum_q F_{m_1m_2}\left(q + \frac{k}{2}\right) F_{m_3m_4}\left(-q + \frac{k}{2}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Определения одночастичных функции Грина $G_{m_1m_2}(k)$, $F_{m_1m_2}(k)$ $(k = (\mathbf{k}, \omega))$ даны в Приложении Б.

Отметим, что в двухзонных сверхпроводящих системах с малой плотностью носителей $(\mu \sim \Delta)$ [42–44] необходимо учесть среднеполевую перенормировку химического потенциала:

$$\mu \to \mu_n = \mu + S_n, \tag{9}$$

где

$$S_n = \sum_{\mathbf{k}m} (2V_{mnnm} - V_{mnmn}) \left\langle a^+_{m\mathbf{k}\uparrow} a_{m\mathbf{k}\uparrow} \right\rangle. \tag{10}$$

Кроме того, наличие в этой системе дополнительного параметра порядка $\Delta_{12} \sim \Delta_{11}$, Δ_{22} приводит к возникновению недиагональных одночастичных функций Грина G_{12}, $F_{12} \sim G_{11}$, F_{22} [42].

Для новых вершинных функций $\widehat{\Gamma}^{ph}$ и $\widehat{\Gamma}^{a}$:

$$\widehat{\Gamma}^{ph} = \widehat{\Gamma}^{\ddagger=}(k) + \widehat{\Gamma}^{==}(-k), \quad \widehat{\Gamma}^{a} = \widehat{\Gamma}^{\ddagger=}(k) - \widehat{\Gamma}^{==}(-k), \tag{11}$$

имеем

$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma}^{ph} &= -\widehat{V} + \widehat{V}\widehat{\xi}^{+}\widehat{\Gamma}^{ph} + \widehat{V}\widehat{I}^{-}\widehat{\Gamma}^{a}, \\ \widehat{\Gamma}^{a} &= -\widehat{V} + \widehat{V}\widehat{I}^{+}\widehat{\Gamma}^{ph} + \widehat{V}\widehat{\xi}^{-}\widehat{\Gamma}^{a}, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{\xi}_l^{\pm}(k) &= \frac{\widehat{A}_l(k) + \widehat{A}_l(-k)}{2} \pm \frac{\widehat{B}_l(k) + \widehat{B}_l(-k)}{2}, \\ \widehat{I}_l^{\pm}(k) &= \widehat{A}_l(k) - \widehat{A}_l(-k) \pm \left[\widehat{B}_l(k) - \widehat{B}_l(-k)\right]. \end{aligned} \tag{13}$$

Вводя матрицу $\widehat{U}$, обратную матрице взаимодействий $\widehat{V}$ (7), получаем

$$\begin{pmatrix} \widehat{U} - \widehat{\xi}^{+} & -\widehat{I}^{-} \\ -\widehat{I}^{+} & \widehat{U} - \widehat{\xi}^{-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\Gamma}^{ph} \\ \widehat{\Gamma}^{a} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \widehat{1} \\ \widehat{1} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где $\widehat{1}$ — единичная матрица ранга 3×3. Отметим, что вершинные функции $\widehat{\Gamma}^{ph,a}$ расходятся, когда детерминант ранга 6×6 системы уравнений (14) обращается в нуль:

$$\begin{vmatrix} \widehat{U} - \widehat{\xi}^{+} & -\widehat{I}^{-} \\ -\widehat{I}^{+} & \widehat{U} - \widehat{\xi}^{-} \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

Здесь для произвольной матрицы $\widehat{A}$ введено обозначение: $\left|\widehat{A}\right| \equiv \det\left\|\widehat{A}\right\|$.

Заменив мацубаровские «мнимые» частоты $i\omega \to \omega$ на вещественные частоты ω, получаем уравнение для частоты коллективных колебаний:

$$\begin{vmatrix} \widehat{U} - \widehat{\xi}^{+} & -\widehat{I}^{-} \\ -\widehat{I}^{+} & \widehat{U} - \widehat{\xi}^{-} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \widehat{R}^{+} & -\omega\widehat{J}^{-} \\ -\omega\widehat{J}^{+} & \widehat{R}^{-} \end{vmatrix} = 0. \tag{16}$$

Выражения для величин, входящих в $\widehat{\xi}^{\pm}$ и $\widehat{J}^{\pm}$ приведены в Приложении В.

Вычислив отношения вершинных функций на основании (14) (см. Приложение Г), получаем следующее уравнение для частот коллективных колебаний:

$$\begin{vmatrix} \widehat{U} - \widehat{\xi}^{+} & -\omega\widehat{J}^{-} \\ -\omega\widehat{J}^{+} & \widehat{U} - \widehat{\xi}^{-} \end{vmatrix} = 0, \tag{17}$$

где

$$\widehat{\xi}^{\pm} = \begin{pmatrix} \xi_1^{\pm} & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2^{\pm} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3^{\pm} \end{pmatrix}, \quad \widehat{J}^{\pm} = \begin{pmatrix} J_1^{\pm} & 0 & 0 \\ 0 & J_2^{\pm} & 0 \\ 0 & 0 & J_3^{\pm} \end{pmatrix},$$

$$\xi_1^{\pm} = \xi_{1111}^{\pm} + \xi_{1212}^{\pm}\frac{\Gamma_{2211}^{+}}{\Gamma_{1111}^{+}} + 2\xi_{1112}^{\pm}\frac{\Gamma_{1211}^{+}}{\Gamma_{1111}^{+}},$$

$$\xi_2^{\pm} = \xi_{2222}^{\pm} + \xi_{1212}^{\pm}\frac{\Gamma_{1111}^{+}}{\Gamma_{2211}^{+}} + 2\xi_{2212}^{\pm}\frac{\Gamma_{1211}^{+}}{\Gamma_{2211}^{+}}, \tag{18}$$

$$\xi_3^{\pm} = \xi_{1122}^{\pm} + \xi_{1221}^{\pm} + \xi_{1112}^{\pm}\frac{\Gamma_{1111}^{+}}{\Gamma_{1211}^{+}} + \xi_{2212}^{\pm}\frac{\Gamma_{2211}^{+}}{\Gamma_{1211}^{+}}.$$

Величины $J_i^{\pm}$ строятся из $J_{m_1m_2m_3m_4}^{\pm}$ таким же способом, как и $\xi_i^{\pm}$.

Уравнение (17) определяет частоту коллективных колебаний для двухзонной системы с произвольной плотностью носителей заряда, в том числе и малой ($\mu \sim \Delta$, $\mu < \omega_D$) при произвольных температурах. По форме это уравнение есть не что иное, как уравнение, определяющее частоту коллективных колебаний для обычной трехзонной системы с параметрами порядка Δ_{11}, Δ_{22}, Δ_{12} и пониженной плотностью носителей заряда ($\mu < \omega_D$) [31, 42, 47].

В обычных сверхпроводниках ($\mu \gg \omega_D$) выполняется условие $\widehat{I}^{\pm} = 0$. Уравнение (17) распадается на два независимых уравнения, которые определяют коллективные колебания, вызванные флуктуациями фаз $|\widehat{R}^{+}| = 0$ (полюсы вершинных функций $\widehat{\Gamma}^{ph}$ (11)) и амплитуд $|\widehat{R}^{-}| = 0$ (полюсы вершинных функций $\widehat{\Gamma}^{a}$ (11)) параметров порядка разных зон.

В сверхпроводниках с малой плотностью носителей заряда $\widehat{I}^{\pm} \neq 0$. В этом случае коллективные колебания перемешиваются и их нельзя разделить. Это обстоятельство приводит с результатам, отличным от случая обычных сверхпроводников [30, 31].

3. КОЛЛЕКТИВНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Уменьшая ранг детерминанта в (17) с 6×6 до 3×3, согласно теории блочных матриц [48], уравнение для частоты коллективных колебаний (17) представим в виде

$$R^{-}\left|\widehat{R}^{+} - \omega^2\widehat{J}^{-}(\widehat{R}^{-})^{-1}\widehat{J}^{+}\right| = R^{+}R^{-} - \Delta Z, \tag{19}$$

где

$$\Delta Z = \omega^2\,\mathrm{Tr}\left(\widehat{J}^{+\,t}\widehat{Z}^{+}\widehat{J}^{-\,t}\widehat{Z}^{-}\right) - \omega^4\,\mathrm{Tr}\left(\widehat{R}^{+\,t}\widehat{T}^{+}\widehat{R}^{-\,t}\widehat{T}^{-}\right) + \omega^6 J^{+}J^{-}. \tag{20}$$

Здесь $J^{\pm} = \det\left\|\widehat{J}^{\pm}\right\|$, $\widehat{Z}^{\pm}$ $\left(\widehat{T}^{\pm}\right)$ — матрицы алгебраических дополнений к матричным элементам матриц $\widehat{R}^{\pm}$ $\left(\widehat{J}^{\pm}\right)$; $\left({}^{t}\widehat{Z}^{\pm}\right)_{ik} = \left(\widehat{Z}^{\pm}\right)_{ki}$.

Уравнение (19) симметрично относительно замены $\mathbf{k} \to -\mathbf{k}$, $\omega \to -\omega$, поскольку $\widehat{R}^{\pm}(-k) = \widehat{R}^{\pm}(k)$, $\widehat{J}^{\pm}(-k) = -\widehat{J}^{\pm}(k)$. Это обстоятельство приводит к четным степеням по ω и $\mathbf{k}$ в разложении уравнения (19) по малым значениям этих величин.

Исследуем уравнение для частоты коллективных колебаний (19) для малых значений ω ($\omega^2 / 4\Delta_i^2 \ll 1$) и $\mathbf{k} = 0$ при $T = 0$. С этой целью выполним в (19) разложение по этому малому параметру, ограничившись квадратичными членами, а затем интегрирование по Ω. Получим

$$\xi_i^+ = \xi_i^0 + \omega^2\theta_i, \tag{21}$$

где θ_i — компоненты матрицы $\widehat{\theta}$:

$$\widehat{\theta} = \widehat{Q}\frac{\Delta_{11}\Delta_{22}}{\Delta_{12}^2}\alpha + \widehat{\overline{\theta}}^+, \quad \widehat{\theta} = \begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{pmatrix}, \quad \widehat{\overline{\theta}}^+ = \begin{pmatrix}\overline{\theta}_1^+\\ \overline{\theta}_2^+\\ \overline{\theta}_3^+\end{pmatrix}, \quad \widehat{Q} = \begin{pmatrix}\Delta_{12}^2/\Delta_{11}^2\\ \Delta_{12}^2/\Delta_{22}^2\\ -1\end{pmatrix}. \tag{22}$$

Определения величин $\overline{\theta}_i^+$ и α даны в Приложении Г. Величины ξ_i^0 определены ниже (30).

Рассмотрим простой закон дисперсии:

$$\varepsilon_i(\mathbf{k}) = \zeta_i + \frac{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}{2m_i}. \tag{23}$$

Перейдем от суммирования по $\mathbf{k}$ к интегрированию по энергии ε_i, обрезая интегралы (22), (30), (В.4)–(В.6) (см. Приложение В) в соответствии с законом дисперсии (23), полагая $\mu < \omega_D$ (малая плотность носителей заряда):

$$\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\Phi(\varepsilon_i - \mu_i) = 2N_i\int\limits_{-\overline{D}_i}^{\overline{\omega}_{D_i}} d\varepsilon\Phi(\varepsilon - S_i) = 2N_i\int\limits_{-D_i}^{\omega_{D_i}} d\varepsilon\Phi(\varepsilon), \tag{24}$$

где $\overline{\omega}_{D_i}$ — фононная частота обрезания в i-й зоне, $N_i = m_i p_{Fi}/4\pi^2$ — плотность электронных состояний в i-й зоне. Здесь

$$\overline{D}_i = \begin{cases} \overline{\omega}_{D_i} & \text{при } \overline{\omega}_{D_i} < \mu - \zeta_i, \\ \mu - \zeta_i & \text{при } \overline{\omega}_{D_i} > \mu - \zeta_i, \end{cases}$$

а S_i — среднеполевая перенормировка химического потенциала (10). Необходимость учета этой перенормировки вытекает из того, что S_i соизмерима с фононной энергией обрезания $\overline{\omega}_{D_i}$ и химическим потенциалом (см. также [42–44]).

Не приводя явных выражений для интегралов θ_i, $J_i^\pm$, ξ_i^- из-за их чрезмерной громоздкости, отметим, что $J_i^\pm \neq 0$ из-за несимметричных пределов интегрирования в (24) и $\Delta_{12} \neq 0$ в отличие от случая обычных сверхпроводников, где $J_i^\pm = 0$. Наличие дополнительного параметра порядка Δ_{12} даже при симметричных пределах интегрирования в (24) приводит к тому, что $J_i^\pm \neq 0$.

В случае малых частот ω $\left(\omega^2/4\Delta_i^2 \ll 1\right)$, величина $R^- \neq 0$ и уравнение (19) представим в виде

$$R^+\left(\widehat{\theta}\right) = \frac{\Delta Z}{R^-}. \tag{25}$$

На основании определения величин ξ_i^+ (21), когда эффективные константы внутризонных взаимодействий (V_{1111}, V_{2222}) и взаимодействий, характеризующих переходы межзонной пары в межзонную пару (V_{1212}), много больше констант взаимодействий, характеризующих переходы внутризонной пары в межзонную (V_{1112}, V_{2212}) и во внутризонную (V_{1122}),

$$V_{1111},\ V_{2222},\ V_{1212} \gg V_{1112},\ V_{2212},\ V_{1122}, \tag{26}$$

уравнение для частоты коллективных колебаний имеет вид

$$R^{+}\left(\widehat{\overline{\theta}}\right) = 0, \tag{27}$$

где

$$\begin{gathered} R^{+}\left(\widehat{\overline{\theta}}\right) = R_0^{+} - \omega^2 \operatorname{Tr}\left(\widehat{\overline{\theta}}\ {}^t\widehat{Z}_0^{+}\right) + \omega^4 \operatorname{Tr}\left(\widehat{R}_0^{+}\,\widehat{\Theta}\right) - \omega^6 \overline{\theta}, \\ \widehat{\overline{\theta}} = \begin{pmatrix} \overline{\theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\theta}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\theta}_3 \end{pmatrix}, \quad \overline{\theta} = \det\left\|\widehat{\overline{\theta}}\right\|,\ \overline{\theta}_i = \theta_i + \frac{J_i^{+}J_i^{-}}{2B_i}. \end{gathered} \tag{28}$$

Здесь ${}^t\widehat{Z}_0^{+}$ и $\widehat{\Theta}$ — матрицы алгебраических дополнений к матричным элементам матриц $\widehat{R}_0^{+}$ и $\widehat{\overline{\theta}}$. В случае малой плотности носителей заряда ($\mu \sim \Delta$, $\mu < \omega_D$) наличие дополнительного параметра порядка $\Delta_{12} \sim \Delta_{11}, \Delta_{22}$ и несимметричное обрезание в (24) приводят не только к явной зависимости от химического потенциала через функции θ_i^{+} (22), (Г.4), но и к перемешиванию флуктуаций фаз и амплитуд параметров порядка разных зон $\left(\widehat{J}^{\pm},\ \Delta Z \neq 0\right)$. В рамках приближения (26) влияние этого перемешивания сводится к замене $\theta_i \to \overline{\theta}_i$ (28) (или $\widehat{\theta} \to \widehat{\theta} + \widehat{J}^{-}(\widehat{R}^{-})^{-1}\widehat{J}^{+}$, см. (19)).

Кроме системы уравнений (14) для вершинных функций $\widehat{\Gamma}^{ph,a}$ мы также рассмотрим систему уравнений для параметров порядка двухзонной системы с малой плотностью носителей заряда [42]:

$$\Delta_{ii} = \sum_{j=1}^{2} V_{iijj}\xi_i^0 \Delta_{jj}, \tag{29}$$

где

$$\begin{aligned} \xi_1^0 &= \left\{\frac{1}{d}\left[\varepsilon_1^2 + \Delta_{11}^2 - \varepsilon_2^2 - \Delta_{22}^2 + 2\Delta_{12}^2\left(1 + \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{11}}\right)\right] + 1\right\}\frac{1}{E_1} - \\ &\quad - \left\{\frac{1}{d}\left[\varepsilon_1^2 + \Delta_{11}^2 - \varepsilon_2^2 - \Delta_{22}^2 + 2\Delta_{12}^2\left(1 + \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{11}}\right)\right] - 1\right\}\frac{1}{E_2}, \\ \xi_0^2 &= \left\{\frac{1}{d}\left[\varepsilon_2^2 + \Delta_{22}^2 - \varepsilon_1^2 - \Delta_{11}^2 + 2\Delta_{12}^2\left(1 + \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\right)\right] + 1\right\}\frac{1}{E_1} - \\ &\quad - \left\{\frac{1}{d}\left[\varepsilon_2^2 + \Delta_{22}^2 - \varepsilon_1^2 - \Delta_{11}^2 + 2\Delta_{12}^2\left(1 + \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\right)\right] - 1\right\}\frac{1}{E_2}, \\ \xi_3^0 &= 2\left\{\left(\frac{1}{d}\left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\Delta_{11} + \Delta_{22})^2\right] + 1\right)\frac{1}{E_1} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{d}\left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\Delta_{11} + \Delta_{22})^2\right] - 1\right)\frac{1}{E_2}\right\}. \end{aligned} \tag{30}$$

Определения величин E_i и d даны в Приложении Б.

Условие совместности этой системы приводит к следующему уравнению:

$$\det \left\| \widehat{U} - \widehat{\xi}^0 \right\| = 0. \tag{31}$$

В силу этого условия величина R_0^+ из (28) обращается в нуль.

Учитывая уравнения для параметров порядка (29) и вычисляя следы матриц и детерминанты в (27), (28), после небольших алгебраических преобразований получаем следующее уравнение для частоты коллективных колебаний ($\mathbf{k} = 0$):

$$\omega^6 \overline{\theta}_1 \overline{\theta}_2 \overline{\theta}_3 - \frac{\omega^4}{\det|\widehat{V}|} \left(\overline{\theta}_1 \overline{\theta}_2 B_{12} + \overline{\theta}_1 \overline{\theta}_3 B_{13} + \overline{\theta}_2 \overline{\theta}_3 B_{23} \right) + \\ + \left(\frac{\omega}{\det|\widehat{V}|} \right)^2 \left(\overline{\theta}_1 + \overline{\theta}_2 \frac{\Delta_2^2}{\Delta_1^2} + \overline{\theta}_3 \frac{\Delta_3^2}{\Delta_1^2} \right) P_1 = 0. \tag{32}$$

Здесь

$$\begin{aligned} P_1 &= (V_{1212} V_{2211} - V_{2212} V_{1211})(V_{2222} V_{1211} - V_{2211} V_{1222}) \frac{\Delta_1^2}{\Delta_2 \Delta_3} + \\ &+ (V_{1212} V_{2211} - V_{2212} V_{1211})(V_{1111} V_{1222} - V_{1122} V_{1211}) \frac{\Delta_1}{\Delta_3} + \\ &+ (V_{1111} V_{2212} - V_{1112} V_{2211})(V_{2222} V_{1211} - V_{2211} V_{1222}) \frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \\ B_{12} &= (V_{2222} V_{1211} - V_{2211} V_{1222}) \frac{\Delta_1}{\Delta_3} + (V_{1111} V_{1222} - V_{1122} V_{1211}) \frac{\Delta_2}{\Delta_3}. \end{aligned} \tag{33}$$

Коэффициент B_{13} получим из B_{12} заменой индексов $22 \leftrightarrow 12$, а B_{23} — из B_{12} заменой $11 \leftrightarrow 12$.

Уравнение (32) имеет тривиальное решение $\omega = 0$. Кроме того, существуют два нетривиальных решения, определяемых из уравнения

$$\omega^4 \overline{\theta}_1 \overline{\theta}_2 \overline{\theta}_3 - \frac{\omega^2}{\det|\widehat{V}|} \left(\overline{\theta}_1 \overline{\theta}_2 B_{12} + \overline{\theta}_1 \overline{\theta}_3 B_{13} + \overline{\theta}_2 \overline{\theta}_3 B_{23} \right) + \\ + \left(\frac{1}{\det|\widehat{V}|} \right)^2 \left(\overline{\theta}_1 + \overline{\theta}_2 \frac{\Delta_2^2}{\Delta_1^2} + \overline{\theta}_3 \frac{\Delta_3^2}{\Delta_1^2} \right) P_1 = 0, \tag{34}$$

решениями которого являются

$$\omega_\pm^2 = \frac{\overline{\theta}_1 \overline{\theta}_2 B_{12} + \overline{\theta}_1 \overline{\theta}_3 B_{13} + \overline{\theta}_2 \overline{\theta}_3 B_{23} \pm \sqrt{D}}{2 \det|\widehat{V}| \, \overline{\theta}_1 \overline{\theta}_2 \overline{\theta}_3}, \tag{35}$$

где

$$D = \left[\overline{\theta}_1 \overline{\theta}_2 B_{12} + \overline{\theta}_1 \overline{\theta}_3 B_{13} + \overline{\theta}_2 \overline{\theta}_3 B_{23} \right]^2 - 4 P_1 \overline{\theta}_1 \overline{\theta}_2 \overline{\theta}_3 \left(\overline{\theta}_1 + \overline{\theta}_2 \frac{\Delta_2^2}{\Delta_1^2} + \overline{\theta}_3 \frac{\Delta_3^2}{\Delta_1^2} \right). \tag{36}$$

В приближении (26) два решения (35) уравнения (34) являются положительными и вещественными. Этот факт позволяет утверждать, что мы имеем две экситонные моды, ω_+ и ω_-.

В дополнение к условиям (26) предположим, что переходы внутризонной пары целиком в другую зону сильнее переходов в межзонную пару ($V_{1122} \gg V_{1112}, V_{2212}$). Тогда экситонные моды примут следующий вид:

$$\omega_+^2 = \frac{\overline{\theta}_1 V_{2211}\Delta_{11}/\Delta_{22} + \overline{\theta}_2 V_{1122}\Delta_{22}/\Delta_{11}}{\overline{\theta}_1\overline{\theta}_2 \left(V_{1111}V_{2222} - V_{1122}V_{2211}\right)} + \gamma, \tag{37}$$

$$\omega_-^2 = \frac{V_{2222}V_{1211}\Delta_{11}/\Delta_{12} + V_{1111}V_{1222}\Delta_{22}/\Delta_{12}}{V_{1212}\overline{\theta}_3 \left(V_{1111}V_{2222} - V_{1122}V_{2211}\right)} \, \frac{\overline{\theta}_1\Delta_{11}^2 + \overline{\theta}_2\Delta_{22}^2 + \overline{\theta}_3\Delta_{12}^2}{\overline{\theta}_1\Delta_{11}^2 + \overline{\theta}_2\Delta_{22}^2}, \tag{38}$$

где

$$\begin{gathered} \overline{\theta}_i = \left(\overline{\theta}_i^+ + Q_i\overline{\theta}_3^+\right) g_i, \\ g_i = 1 + \frac{\left(\widehat{J}^-(\widehat{R}^-)^{-1}\,\widehat{J}^+\right)_{ii} + Q_i\left(\underline{\widehat{J}}^-(\underline{\widehat{R}}^-)^{-1}\,\underline{\widehat{J}}^+\right)_3}{\overline{\theta}_i^+ + Q_i\overline{\theta}_3^+}, \end{gathered} \tag{39}$$

γ содержит члены, пропорциональные V_{1112}, V_{2212}, а определения величин $\underline{\widehat{J}}^{\pm}$ и $\underline{\widehat{R}}^-$ даны в Приложении Г.

Из выражения (37) легко заметить, что коллективная мода ω_+ есть обобщенная мода Леггетта [30] на случай малой плотности носителей заряда. Мода соответствует, главным образом, интерференции рассеяния электронной пары как целого из первой зоны во вторую и рассеяния межзонной пары в межзонную пару (первое слагаемое в (37)) и небольшому вкладу от рассеяния межзонной пары во внутризонную. Если пренебречь этими последними процессами ($V_{1112} = V_{2212} = 0$), то мы получаем коллективную моду Леггетта [30] для случая, когда $V_{1212} \neq 0$ ($\Delta_{12} \neq 0$). В более общем случае возникают две коллективные моды, ω_+ (37) и ω_- (38).

Эти экситонные моды зависят от химического потенциала (или от плотности носителей заряда) через функции $\overline{\theta}_i$ и коэффициенты B_{ij}, P_1 (33).

Важно отметить также, что систему уравнений для вершинных функций (14) и параметров порядка (29) следует дополнить законом сохранения числа носителей заряда:

$$N_0 = \frac{2}{\beta V}\sum_{\mathbf{k}\omega}\left[G_{11}(\mathbf{k},\omega) + G_{22}(\mathbf{k},\omega)\right]e^{i\omega 0^+}. \tag{40}$$

Самосогласованная система уравнений (14), (17), (29) и (40) определяет вершинные функции (частоту коллективных колебаний), параметры порядка Δ_{ij} и химический потенциал μ при заданной плотности носителей заряда N_0 для основного состояния ($T = 0$). Характерной особенностью основного состояния системы с малой плотностью носителей заряда является существенное изменение положение уровня Ферми при возникновении сверхпроводящей щели. Параметры порядка становятся одного порядка с химическим потенциалом $(\mu \neq \Delta_{ij})$. Это обстоятельство приводит к аномальной температурной зависимости химического потенциала $\mu(T)$ [42–44] и появлению излома на зависимости $\mu(T)$ при $\mu \simeq 6$ мэВ [42]. Это значение химического потенциала в три раза превышает значение, достигаемое в однозонной модели БКШ [43] и модели Хаббарда [44]. С другой стороны, малая плотность носителей заряда ($\mu \sim \Delta_{ij}$) приводит не только к смещению обобщенной моды Леггетта [30] (из-за $\Delta_{12} \neq 0$) и возникновению дополнительной экситонной моды (из-за $V_{1112}, V_{2212} \neq 0$), но и к появлению существенной зависимости акустической и двух экситонных коллективных мод от плотности носителей заряда N_0.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В данной работе был развит единый подход к изучению коллективных колебаний в сверхпроводящих системах с двумя энергетическими зонами, перекрывающимися на поверхности Ферми при любых (в том числе и малых) плотностях носителей заряда ($\mu \sim \Delta$, $\mu < \omega_D$). Формально эта система эквивалентна трехзонной сверхпроводящей системе с параметрами порядка Δ_{11}, Δ_{22}, Δ_{12} и пониженной плотностью носителей заряда N_0 (40). Двухзонная сверхпроводящая система с $\mu \sim \Delta$ ($\mu < \omega_D$) дает коллективную моду Боголюбова–Андерсона, соответствующую акустическому спектру. Эта мода наблюдалась как для случая однозонного, так и для случаев двухзонного и трехзонного сверхпроводников [31, 32]. Также возникают две коллективные моды экситонного типа. Одна из этих мод является модифицированной модой «леггеттовского» типа [30], смещенной из-за наличия дополнительного параметра порядка Δ_{12}. Она вызвана, главным образом, интерференцией рассеяния куперовской пары как целого из первой энергетической зоны во вторую и рассеяния межзонной пары в межзонную пару. Вторая коллективная мода обусловлена рассеянием межзонной куперовской пары во внутризонную и наоборот.

Отметим, что в случае малой плотности носителей заряда ($\mu \sim \Delta$, $\mu < \omega_D$) частоты коллективных колебаний (акустических и экситонных) приобретают существенную зависимость от плотности носителей заряда N_0. Такая зависимость определяется тремя факторами:

1) явной зависимостью от N_0 функций $\overline{\theta}_i$, входящих в определение частот коллективных колебаний (35), (37), через функции $\overline{\theta}_i^+ + Q_i\overline{\theta}_3^+$ (39);

2) перемешиванием флуктуаций фаз и амплитуд параметров порядка разных зон $\left(\widehat{J},\, \Delta Z \neq 0\right)$ через функции g_i (39);

3) существенной зависимостью параметров порядка Δ_i от N_0 [25, 42].

Первые два фактора обусловлены наличием дополнительного параметра порядка Δ_{12} и несимметричным обрезанием интегралов (24) в системах с малой плотностью носителей ($\mu \sim \Delta$, $\mu < \omega_D$). Эти два фактора по аналогии с трехзонной моделью [47] взаимно ослабляют друг друга в таких системах. В системах с пониженной плотностью носителей заряда ($\Delta < \mu < \omega_D$) и обычных сверхпроводниках ($\mu > \omega_D$) происходит компенсация этих факторов и имеет место соотношение $\overline{\theta}_i \approx N_i/2\Delta_{ii}^2$ ($i = 1, 2$). Таким образом, в системах с малой ($\mu \sim \Delta$) и пониженной ($\mu < \omega_D$) плотностями носителей заряда доминирующий вклад в зависимость частот коллективных колебаний от плотности носителей заряда N_0 вносит аналогичная зависимость параметров порядка. Отметим, что в системах с малой ($\mu \sim \Delta$, $\mu < \omega_D$) и пониженной ($\mu < \omega_D$) плотностями носителей заряда необходимо учитывать среднеполевую перенормировку химического потенциала [42–44], а также закон сохранения числа носителей заряда N_0, которые приводят к максимумам в зависимостях параметров порядка от N_0. Эти максимумы возникают в области пониженных (не малых) значений N_0, где $\Delta < \mu < \omega_D$. Эти обстоятельства для экситонной моды «леггеттовского» типа ω_+ (37), например, приводят к максимумам в зависимостях $\omega_+(N_0)$ и к существенной зависимости отношений $\omega_+^2/4\Delta_i^2$ ($i = 11, 22, 12$) от плотности носителей заряда N_0.

В случае $\Delta_{12} = 0$ остается только одна экситонная мода ω_+. Эта мода приобретает существенную зависимость от плотности носителей заряда только через аналогичную зависимость параметров порядка разных зон и их отношений.

Таким образом, увеличение числа параметров порядка (с двух до трех, $\Delta_{12} \neq 0$) в двухзонной сверхпроводящей системе с малой плотностью носителей заряда приводит к возникновению дополнительной экситонной моды и к существенной зависимости коллективных мод (акустических и экситонных) от плотности носителей заряда.

Отметим, что в данной работе исследование коллективных колебаний в двухзонной системе выполнено в рамках приближения среднего поля (лестничное приближение для вершинных функций). Применимость этого приближения зависит от величины плотности носителей заряда. В области больших плотностей носителей заряда (радиус электронной пары много больше среднего межчастичного расстояния) описание является точным. В области сверхнизких плотностей носителей заряда (радиус электронной пары много меньше среднего межчастичного расстояния) применимость этого приближения позволяет выявить качественно верную картину [49]. Случай же $\mu \sim \Delta$ является промежуточным и нуждается в выходе за рамки приближения среднего поля. Результаты, полученные в приближении среднего поля для этого случая, можно рассматривать как качественную интерполяцию между приведенными выше пределами.

Важно отметить, что изученная двухзонная система эквивалентна системе с двумя неэквивалентными слоями. Нетрудно показать путем диагонализации гамильтониана такой системы, что имеют место следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
&V_{1111} = \frac{1}{4}(V_1 + V_2 - 4J + 2Y + 4W), \quad V_{2222} = \frac{1}{4}(V_1 + V_2 + 4J + 2Y + 4W), \\
&V_{1122} = \frac{1}{4}(V_1 + V_2 + 4J - 2Y), \quad V_{2211} = \frac{1}{4}(V_1 + V_2 - 4J - 2Y),
\end{aligned}
\tag{41}
$$

и

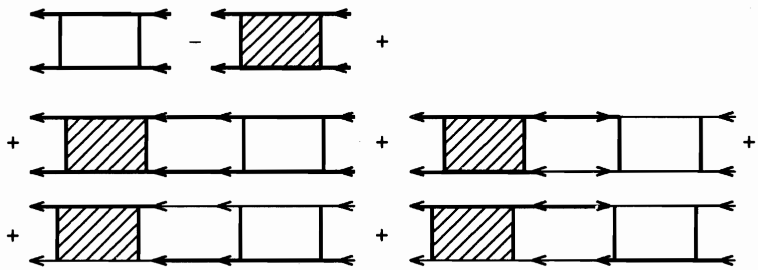
$$
\begin{aligned}
&V_{1112} = V_{1121} = V_{2212} = V_{2221} = V_{1211} = V_{2111} = V_{1222} = V_{2122} = \frac{V_2 - V_1}{4}, \\
&V_{1212} = V_{2121} = \frac{1}{4}(V_1 + V_2 - 2Y), \quad V_{1221} = V_{2112} = \frac{1}{4}(V_1 + V_2 + 2Y - 4W).
\end{aligned}
\tag{42}
$$

Здесь V_1, V_2 — внутрислоевые константы, Y, W — межслоевые константы взаимодействия. Системы с двумя эквивалентными слоями ($V_1 = V_2 = V$) изучались ранее в [50, 37, 39].

Таким образом, неэквивалентность слоев ($V_{1112} \neq 0$) приводит к появлению новой экситонной моды ω_- (35), (38). Существенная же зависимость частот коллективных колебаний от плотности носителей заряда N_0 обусловлена как наличием слоевых констант взаимодействия, дающих $\Delta_{12} \neq 0$, так и несимметричностью пределов интегрирования (24).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Уравнение для вершинной функции $\Gamma^{\ddagger=}$ имеет вид



(A.1)

Остальные три вершинные функции строятся аналогичным способом без первого свободного члена. Заштрихованная часть в уравнении (A.1) соответствует вершинной функции $\Gamma^{\overset{0+}{-}\mp}$ в нулевом приближении.

Выполнив суммирование по спиновым переменным в системе уравнений (A.1) и переходя к $n\mathbf{k}\Omega$-представлению для вершинных функций Γ^{α} $(n_1 \ldots n_4,\ m_1 \ldots m_4 = 1, 2)$, получаем $(p_3 + p_4 = k)$:

$$
\begin{gathered}
\Gamma^{\ddagger =}_{m_1 m_2 m_3 m_4}\left(p + \frac{k}{2}, -p + \frac{k}{2}, p_3, p_4\right) = -V_{m_1 m_2 m_3 m_4} + \frac{1}{\beta}\sum_q \sum_{n_1 \ldots n_4} V_{m_1 m_2 n_1 n_3} \times \\
\times \left\{ G_{n_1 n_2}\left(q + \frac{k}{2}\right) G_{n_3 n_4}\left(-q + \frac{k}{2}\right) \Gamma^{\ddagger =}_{n_2 n_4 m_3 m_4}\left(q + \frac{k}{2}, -q + \frac{k}{2}, p_3, p_4\right) + \right. \\
+ F_{n_1 n_2}\left(q + \frac{k}{2}\right) F_{n_3 n_4}\left(-q + \frac{k}{2}\right) \Gamma^{==}_{n_2 n_4 m_3 m_4}\left(-q - \frac{k}{2}, q - \frac{k}{2}, p_3, p_4\right) - \\
- G_{n_1 n_2}\left(q + \frac{k}{2}\right) F_{n_3 n_4}\left(-q + \frac{k}{2}\right) \Gamma^{\pm =}_{n_2 n_4 m_3 m_4}\left(q + \frac{k}{2}, q - \frac{k}{2}, p_3, p_4\right) + \\
\left. + F_{n_1 n_2}\left(q + \frac{k}{2}\right) G_{n_3 n_4}\left(-q + \frac{k}{2}\right) \Gamma^{\mp =}_{n_2 n_4 m_3 m_4}\left(-q - \frac{k}{2}, -q + \frac{k}{2}, p_3, p_4\right) \right\}, \\
\Gamma^{==}_{m_1 m_2 m_3 m_4}\left(p + \frac{k}{2}, -p + \frac{k}{2}, p_3, p_4\right) = \frac{1}{\beta}\sum_q \sum_{n_1 \ldots n_4} V_{m_1 m_2 n_2 n_4} \times \\
\times \left\{ G_{n_1 n_2}\left(q + \frac{k}{2}\right) G_{n_3 n_4}\left(-q + \frac{k}{2}\right) \Gamma^{==}_{n_1 n_3 m_3 m_4}\left(q + \frac{k}{2}, -q + \frac{k}{2}, p_3, p_4\right) + \right. \\
+ \overline{F}_{n_1 n_2}\left(q + \frac{k}{2}\right) \overline{F}_{n_3 n_4}\left(-q + \frac{k}{2}\right) \Gamma^{\ddagger =}_{n_1 n_3 m_3 m_4}\left(-q - \frac{k}{2}, q - \frac{k}{2}, p_3, p_4\right) - \\
- G_{n_1 n_2}\left(q + \frac{k}{2}\right) F_{n_3 n_4}\left(-q + \frac{k}{2}\right) \Gamma^{\mp =}_{n_1 n_3 m_3 m_4}\left(q + \frac{k}{2}, q - \frac{k}{2}, p_3, p_4\right) + \\
\left. + \overline{F}_{n_1 n_2}\left(q + \frac{k}{2}\right) G_{n_3 n_4}\left(-q + \frac{k}{2}\right) \Gamma^{\pm =}_{n_1 n_3 m_3 m_4}\left(-q - \frac{k}{2}, -q + \frac{k}{2}, p_3, p_4\right) \right\}.
\end{gathered}
\tag{A.2}
$$

В рамках приближения БКШ для вершинных функций Γ^{α} (11) получаем систему уравнений (6) в матричном виде.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Одночастичные функции G и F для сверхпроводящих систем с малой плотностью носителей заряда имеют вид [42] ($z = i\omega$):

$$
\begin{aligned}
G_{11}(\mathbf{k}, z) &= \frac{1}{D(z)}\left[(z+\bar{\varepsilon}_1)\left(z^2-\xi_2^2\right)-\Delta_{12}^2(z+\bar{\varepsilon}_2)\right], \\
G_{12}(\mathbf{k}, z) &= \frac{\Delta_{12}}{D(z)}\left[\Delta_{11}(z+\bar{\varepsilon}_2)-\Delta_{22}(z+\bar{\varepsilon}_1)\right], \\
F_{11}(\mathbf{k}, z) &= -\frac{\Delta_{11}}{D(z)}\left(z^2-\xi_2^2+\Delta_{12}^2\frac{\Delta_{22}}{\Delta_{11}}\right), \\
F_{12}(\mathbf{k}, z) &= -\frac{\Delta_{12}}{D(z)}\left[\Delta_{11}\Delta_{22}-\Delta_{12}^2+(z+\bar{\varepsilon}_1)(z+\bar{\varepsilon}_2)\right].
\end{aligned}
\tag{Б.1}
$$

Функции G_{22}, G_{21}, F_{22}, F_{21} получаются из G_{11}, G_{12}, F_{11}, F_{12} заменой индексов $1 \leftrightarrow 2$. Здесь

$$
\begin{aligned}
&\bar{\varepsilon}_n = \varepsilon_n - \mu - S_n, \quad \xi_n^2 = \bar{\varepsilon}_n^2 + \Delta_{nn}^2, \\
&D(z) = \left(z^2-\xi_1^2\right)\left(z^2-\xi_2^2\right) + 2\Delta_{12}^2\left(\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2 - z^2\right) + \left(\Delta_{11}\Delta_{22}-\Delta_{12}^2\right)^2 - \Delta_{12}^4,
\end{aligned}
\tag{Б.2}
$$

S_n определена в (10). Из определений (Б.1), (Б.2) вытекают следующие свойства симметрии ($k = \mathbf{k}, z$):

$$
G_{nm}(k) = G_{mn}(k), F_{nm}(-k) = F_{mn}(k) = \overline{F}_{nm}(k). \tag{Б.3}
$$

Для интегрирования функций $\xi^{\pm}_{n_1n_2n_3n_4}$ и $I^{\pm}_{n_1n_2n_3n_4}$ по Ω представим нормальные и аномальные функции Грина в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
G_{ij} &= \frac{a_{ij}}{\omega-E_1+i\delta}+\frac{b_{ij}}{\omega-E_2+i\delta}+\frac{c_{ij}}{\omega+E_1-i\delta}+\frac{d_{ij}}{\omega+E_2-i\delta}, \\
F_{ij} &= \frac{l_{ij}}{\omega-E_1+i\delta}+\frac{m_{ij}}{\omega-E_2+i\delta}+\frac{k_{ij}}{\omega+E_1-i\delta}+\frac{n_{ij}}{\omega+E_2-i\delta}, \\
\overline{F}_{ji} &= F_{ij},
\end{aligned}
\tag{Б.4}
$$

где

$$\begin{aligned}
&a_{ii} = p_{i1} + q_{i1}, \quad b_{ii} = -(p_{i2} + q_{i2}), \quad c_{ii} = p_{i1} - q_{i1}, \quad d_{ii} = -(p_{i2} - q_{i2}), \\
&p_{ij} = \frac{E_j^2 - \xi_{3-i}^2 - \Delta_{12}^2}{2d}, \quad q_{ij} = \frac{(-1)^i \Delta_{12} h + \varepsilon_i a_{ij}}{E_j}, \\
&h = -\Delta_{12} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2d}, \quad c = \Delta_{12} \frac{\Delta_{11} + \Delta_{22}}{2d}, \\
&a_{12} = a_{21} = c + r_1, \quad b_{12} = b_{21} = -(c + r_2), \\
&c_{12} = c_{21} = c - r_1, \quad d_{12} = d_{21} = -(c - r_2), \\
&r_i = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \Delta_{22} h}{E_i}, \quad s_i = -\Delta_{12} \frac{E_i^2 - \Delta_{12}^2 + \Delta_{11}\Delta_{22} - \varepsilon_1 \varepsilon_2}{2E_i d}, \\
&l_{ii} = -k_{ii} = t_{i1}, \quad -m_{ii} = n_{ii} = t_{i2}, \quad t_{ij} = -\frac{\Delta_{ii} a_{ii} + \Delta_{12} c}{E_i}, \\
&l_{12} = -k_{21} = s_1 + h, \quad -m_{12} = n_{21} = s_2 + h, \\
&k_{12} = -l_{21} = s_1 - h, \quad -n_{12} = m_{21} = s_2 - h.
\end{aligned} \tag{Б.5}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Проинтегрировав величины $\widetilde{\xi}^{\pm}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(k)$ и $\widetilde{I}^{\pm}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(k)$ по $\Omega(T=0)$, получаем

$$\widetilde{\xi}^{+}_{lrnm} = \widetilde{A}^{+}_{lrnm} + \widetilde{B}^{+}_{lrnm}, \quad \widetilde{\xi}^{-}_{lrnm} = \widetilde{A}^{+}_{lrnm} - \widetilde{B}^{+}_{lrnm},$$

где

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}^{+}_{lrnm}(k) = \frac{1}{2} \sum_p \Bigg\{ & \frac{a^+_{lr} a^-_{nm} + a^+_{mn} a^-_{lr} + c^+_{lr} c^-_{nm} + c^+_{nm} c^-_{lr}}{(E_1^+ + E_1^-)^2 - \omega^2} (E_1^+ + E_1^-) + \\
& + \frac{a^+_{lr} b^-_{nm} + a^+_{mn} b^-_{lr} + c^+_{lr} d^-_{nm} + c^+_{nm} d^-_{lr}}{(E_1^+ + E_2^-)^2 - \omega^2} (E_1^+ + E_2^-) + \\
& + \frac{b^+_{lr} a^-_{nm} + b^+_{mn} a^-_{lr} + d^+_{lr} c^-_{nm} + d^+_{nm} c^-_{lr}}{(E_2^+ + E_1^-)^2 - \omega^2} (E_2^+ + E_1^-) + \\
& + \frac{b^+_{lr} b^-_{nm} + b^+_{mn} b^-_{lr} + d^+_{lr} d^-_{nm} + d^+_{nm} d^-_{lr}}{(E_2^+ + E_2^-)^2 - \omega^2} (E_2^+ + E_2^-) \Bigg\},
\end{aligned} \tag{В.1}$$

$$\widetilde{B}^{+}_{lrnm}(k) = \frac{1}{2} \sum_p \Bigg\{ \frac{l^+_{lr} l^-_{nm} + l^+_{nm} l^-_{lr} + k^+_{lr} k^-_{nm} + k^+_{nm} k^-_{lr}}{(E_1^+ + E_1^-)^2 - \omega^2} (E_1^+ + E_1^-) +$$

$$+ \frac{l^+_{lr}m^-_{nm} + l^+_{mn}m^-_{lr} + k^+_{lr}n^-_{nm} + k^+_{nm}n^-_{lr}}{\left(E^+_1 + E^-_2\right)^2 - \omega^2}\left(E^+_1 + E^-_2\right) +$$

$$+ \frac{m^+_{lr}l^-_{nm} + m^+_{mn}l^-_{lr} + n^+_{lr}k^-_{nm} + n^+_{nm}k^-_{lr}}{\left(E^+_2 + E^-_1\right)^2 - \omega^2}\left(E^+_2 + E^-_1\right) +$$

$$+ \left.\frac{m^+_{lr}m^-_{nm} + m^+_{mn}m^-_{lr} + m^+_{lr}m^-_{nm} + m^+_{nm}m^-_{lr}}{\left(E^+_2 + E^-_2\right)^2 - \omega^2}\left(E^+_2 + E^-_2\right)\right\}.$$

Здесь величины, стоящие в правой части (B.1), являются функциями от $p \pm k/2$, например

$$a^{\pm}_{lr} = a_{lr}\left(p \pm \frac{k}{2}\right), \quad E^{\pm}_i = E_i\left(p \pm \frac{k}{2}\right). \tag{B.2}$$

Аналогично для $\widetilde{I}^{\pm}_{n_1n_2n_3n_4}(k)$ имеем

$$I^+_{lr\,nm} = \widetilde{A}^-_{lr\,nm} + \widetilde{B}^-_{lr\,nm} = \omega J^+_{lr\,nm}, \quad I^-_{lr\,nm} = \widetilde{A}^-_{lr\,nm} - \widetilde{B}^-_{lr\,nm} = \omega J^-_{lr\,nm},$$

где

$$\widetilde{A}^-_{lr\,nm}(k) = \frac{\omega}{2}\sum_p \left\{\frac{a^+_{lr}a^-_{nm} + a^+_{mn}a^-_{lr} - \left(c^+_{lr}c^-_{nm} + c^+_{nm}c^-_{lr}\right)}{\left(E^+_1 + E^-_1\right)^2 - \omega^2}\left(E^+_1 + E^-_1\right) +\right.$$

$$+ \frac{a^+_{lr}b^-_{nm} + a^+_{mn}b^-_{lr} - \left(c^+_{lr}d^-_{nm} + c^+_{nm}d^-_{lr}\right)}{\left(E^+_1 + E^-_2\right)^2 - \omega^2}\left(E^+_1 + E^-_2\right) +$$

$$+ \frac{b^+_{lr}a^-_{nm} + b^+_{mn}a^-_{lr} - \left(d^+_{lr}c^-_{nm} + d^+_{nm}c^-_{lr}\right)}{\left(E^+_2 + E^-_1\right)^2 - \omega^2}\left(E^+_2 + E^-_1\right) +$$

$$+ \left.\frac{b^+_{lr}b^-_{nm} + b^+_{mn}b^-_{lr} - \left(d^+_{lr}d^-_{nm} + d^+_{nm}d^-_{lr}\right)}{\left(E^+_2 + E^-_2\right)^2 - \omega^2}\left(E^+_2 + E^-_2\right)\right\}, \tag{B.3}$$

$$\widetilde{B}^-_{lrnm}(k) = \frac{\omega}{2}\sum_p \left\{\frac{l^+_{lr}l^-_{nm} + l^+_{nm}l^-_{lr} - \left(k^+_{lr}k^-_{nm} + k^+_{nm}k^-_{lr}\right)}{\left(E^+_1 + E^-_1\right)^2 - \omega^2}\left(E^+_1 + E^-_1\right) +\right.$$

$$+ \frac{l^+_{lr}m^-_{nm} + l^+_{mn}m^-_{lr} - \left(k^+_{lr}n^-_{nm} + k^+_{nm}n^-_{lr}\right)}{\left(E^+_1 + E^-_2\right)^2 - \omega^2}\left(E^+_1 + E^-_2\right) +$$

$$+ \frac{m^+_{lr}l^-_{nm} + m^+_{mn}l^-_{lr} - \left(n^+_{lr}k^-_{nm} + n^+_{nm}k^-_{lr}\right)}{\left(E^+_2 + E^-_1\right)^2 - \omega^2}\left(E^+_2 + E^-_1\right) +$$

$$+ \left.\frac{m^+_{lr}m^-_{nm} + m^+_{mn}m^-_{lr} - \left(m^+_{lr}m^-_{nm} + m^+_{nm}m^-_{lr}\right)}{\left(E^+_2 + E^-_2\right)^2 - \omega^2}\left(E^+_2 + E^-_2\right)\right\}.$$

Здесь величины, стоящие в правой части (B3), являются функциями от $p \pm k/2$ (см. (B.2)).

Для случая $\mathbf{k} = 0$ выражения (В.1), (В.3) для $\widetilde{A}^{\pm}$, $\widetilde{B}^{\pm}$ существенно упрощаются:

$$\widetilde{A}^{+}_{lr\,nm} = \sum_{p} \left\{ 2E_1 \frac{a_{lr}a_{nm} + c_{lr}c_{nm}}{4E_1^2 - \omega^2} + 2E_2 \frac{b_{lr}b_{nm} + d_{lr}d_{nm}}{4E_2^2 - \omega^2} + \right.$$
$$\left. + (E_1 + E_2) \frac{a_{lr}b_{nm} + a_{mn}b_{lr} + c_{lr}d_{nm} + c_{nm}d_{lr}}{(E_1 + E_2)^2 - \omega^2} \right\},$$
$$\widetilde{B}^{+}_{lr\,nm} = \sum_{p} \left\{ 2E_1 \frac{l_{lr}l_{nm} + k_{lr}k_{nm}}{4E_1^2 - \omega^2} + 2E_2 \frac{m_{lr}m_{nm} + n_{lr}n_{nm}}{4E_2^2 - \omega^2} + \right.$$
$$\left. + (E_1 + E_2) \frac{l_{lr}m_{nm} + l_{mn}m_{lr} + k_{lr}n_{nm} + k_{nm}n_{lr}}{(E_1 + E_2)^2 - \omega^2} \right\}. \tag{В.4}$$

Аналогично для $\widetilde{A}^{-}$, $\widetilde{B}^{-}$ имеем

$$\widetilde{A}^{-}_{lr\,nm} = \omega A_{lr\,nm}, \quad \widetilde{B}^{-}_{lr\,nm} = \omega B_{lr\,nm}, \tag{В.5}$$

где

$$A_{lr\,nm} = \sum_{p} \left\{ \frac{a_{lr}a_{nm} - c_{lr}c_{nm}}{4E_1^2 - \omega^2} + \frac{b_{lr}b_{nm} - d_{lr}d_{nm}}{4E_2^2 - \omega^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{a_{lr}b_{nm} + a_{mn}b_{lr} - (c_{lr}d_{nm} + c_{nm}d_{lr})}{(E_1 + E_2)^2 - \omega^2} \right\},$$
$$B_{lr\,nm} = \sum_{p} \left\{ \frac{l_{lr}l_{nm} - k_{lr}k_{nm}}{4E_1^2 - \omega^2} + \frac{m_{lr}m_{nm} - n_{lr}n_{nm}}{4E_2^2 - \omega^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{l_{lr}m_{nm} + l_{mn}m_{lr} - (k_{lr}n_{nm} + k_{nm}n_{lr})}{(E_1 + E_2)^2 - \omega^2} \right\}. \tag{В.6}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Из системы уравнений (14) получим уравнение для определения отношений вершинных функций Грина:

$$\begin{pmatrix} \underline{\widehat{R}}^{+} & -\omega \underline{\widehat{J}}^{-} \\ -\omega \underline{\widehat{J}}^{+} + \widehat{I}_1^{+} & \underline{\widehat{R}}^{-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\Gamma}^{+} \\ \widehat{\Gamma}^{-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\widehat{R}_I^{+} \\ \omega \widehat{J}_I^{+} \end{pmatrix}, \tag{Г.1}$$

где

$$\underline{\widehat{R}}^{+} = \begin{pmatrix} 1 & R_{12}^{+} & R_{13}^{+} \\ 0 & R_{22}^{+} & R_{23}^{+} \\ 0 & R_{32}^{+} & R_{33}^{+} \end{pmatrix}, \quad \underline{\widehat{R}}^{-} = \begin{pmatrix} R_{11}^{-} & R_{12}^{-} & R_{13}^{-} \\ R_{21}^{-} & R_{22}^{-} & R_{23}^{-} \\ R_{31}^{-} & R_{32}^{-} & R_{33}^{-} \end{pmatrix}, \quad \widehat{R}_I^{+} = \begin{pmatrix} R_{11}^{+} \\ R_{21}^{+} \\ R_{31}^{+} \end{pmatrix},$$

$$\underline{\widehat{J}}^{+} = \begin{pmatrix} 0 & J_{33}^{-} & 2J_{13}^{-} \\ 0 & J_{22} & 2J_{23}^{+} \\ 0 & 2J_{23}^{-} & 2J_{12} \end{pmatrix}, \quad \underline{\widehat{J}}^{-} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{33}^{+} & 2J_{13}^{+} \\ J_{33}^{-} & J_{22} & 2J_{23}^{-} \\ 2J_{13}^{-} & 2J_{23}^{+} & 2J_{12} \end{pmatrix}, \quad \widehat{J}_I^{+} = \begin{pmatrix} J_{11} \\ J_{33} \\ 2J_{13}^{+} \end{pmatrix}, \tag{Г.2}$$

$$\underline{\widehat{\Gamma}}^{+} = \begin{pmatrix} 1/\Gamma_{1111}^{+} \\ \Gamma_{2211}^{+}/\Gamma_{1111}^{+} \\ \Gamma_{1211}^{+}/\Gamma_{1111}^{+} \end{pmatrix}, \quad \underline{\widehat{\Gamma}}^{-} = \begin{pmatrix} \Gamma_{1111}^{-}/\Gamma_{1111}^{+} \\ \Gamma_{2211}^{-}/\Gamma_{1111}^{+} \\ \Gamma_{1211}^{-}/\Gamma_{1111}^{+} \end{pmatrix}, \quad \widehat{I}_1^{+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

С точностью до членов порядка ω^2 имеем

$$\underline{\widehat{\Gamma}}^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta_{22}/\Delta_{11} \\ \Delta_{12}/\Delta_{11} \end{pmatrix} + \omega^2 \widehat{\alpha}, \qquad (\Gamma.3)$$

где

$$\widehat{\alpha} = \left(\underline{\widehat{R}}^+\right)^{-1} \begin{pmatrix} \widetilde{\theta}_1 \\ \widetilde{\theta}_2 \Delta_{22}/\Delta_{11} \\ 2\widetilde{\theta}_3 \Delta_{12}/\Delta_{11} \end{pmatrix}, \quad \left(\underline{\widehat{R}}^+\right)^{-1} = \frac{1}{Z_{11}^+} \begin{pmatrix} Z_{11}^+ & Z_{21}^+ & Z_{31}^+ \\ 0 & R_{33} & -R_{23} \\ 0 & -R_{32} & R_{22} \end{pmatrix},$$

$$\underline{\widehat{J}}^+ = \begin{pmatrix} \overline{J}_{11} \\ \overline{J}_{22}\Delta_{22}/\Delta_{11} \\ 2\overline{J}_{12}\Delta_{12}/\Delta_{11} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \overline{\theta}_i = \overline{\theta}_i^+ &+ \left(\widehat{J} - \left(\widehat{R}^-\right)^{-1}\right)_{i1} \overline{J}_{11} + \left(\widehat{J}^- \left(\widehat{R}^-\right)^{-1}\right)_{i2} \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{11}} \overline{J}_{22} + \\ &+ 2\left(\widehat{J}^- \left(\widehat{R}^-\right)^{-1}\right)_{i3} \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} \overline{J}_{12}, \end{aligned} \qquad (\Gamma.4)$$

$$\overline{\theta}_1^+ = \theta_{11}^+ + \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{11}}\theta_{33}^+ + 2\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}}\theta_{13}^+, \quad \overline{J}_{11} = J_{11} + \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{11}} J_{33}^- + 2\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} J_{13}^-,$$

$$\overline{\theta}_2^+ = \theta_{22}^+ + \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\theta_{33}^+ + 2\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{22}}\theta_{23}^+, \quad \overline{J}_{22} = J_{22} + \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}} J_{33}^+ + 2\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{22}} J_{23}^+,$$

$$\overline{\theta}_3^+ = \theta_{12}^+ + \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}}\theta_{13}^+ + \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{12}}\theta_{23}^+, \quad \overline{J}_{12} = J_{12} + \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}} J_{13}^+ + \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{12}} J_{23}^-,$$

В обозначениях (Г.2)–(Г.4) использовано «псевдозонное» представление [42]:

$$11 \to 1, \quad 22 \to 2, \quad 12 \to 3. \qquad (\Gamma.5)$$

Например,

$$J_{11} = J_{1111}, \quad J_{33} = J_{1212}, \quad J_{12} = J_{1122} + J_{1221}, \quad R_{11} = U_{11} - \xi^0_{1111}, \quad R_{12} = U_{12} - \xi^0_{1212}.$$

Представив отношения вершинных функций как

$$\frac{\Gamma_{2211}^+}{\Gamma_{1111}^+} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{11}}\left(1 + \omega^2\alpha_{12}\right), \quad \frac{\Gamma_{1211}^+}{\Gamma_{1111}^+} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}}\left(1 + \omega^2\alpha_{13}\right), \qquad (\Gamma.6)$$

получаем выражение для α из (22):

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha_{12} - 2\alpha_{13})\,\xi^0_{33} = \\ &= \frac{\xi^0_{33}}{Z_{11}^+}\left[\left(R_{32}\frac{\Delta_{22}}{\Delta_{12}} - R_{31}\frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}}\right)\widetilde{\theta}_2 + \left(4R_{21}\frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}} + 2R_{23}\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{22}}\right)\widetilde{\theta}_3\right]. \end{aligned} \qquad (\Gamma.7)$$

В приближении (26) для отношений, составленных из $\widehat{\Gamma}^-$ (11), имеем

$$\frac{\Gamma_{2211}^-}{\Gamma_{1111}^-} = \frac{Z_{12}^-}{Z_{11}^-}, \quad \frac{\Gamma_{1211}^-}{\Gamma_{1111}^-} = \frac{Z_{13}^-}{Z_{11}^-}. \qquad (\Gamma.8)$$

Тогда

$$J_1^- = J_{11} + \frac{Z_{12}^-}{Z_{11}^-} J_{33}^- + 2\frac{Z_{13}^-}{Z_{11}^-} J_{13}^-,$$
$$J_2^- = J_{22} + \frac{Z_{11}^-}{Z_{12}^-} J_{33}^+ + 2\frac{Z_{13}^-}{Z_{12}^-} J_{23}^+, \qquad (\Gamma.9)$$
$$J_3^- = J_{12} + \frac{Z_{11}^-}{Z_{13}^-} J_{13}^+ + \frac{Z_{12}^-}{Z_{13}^-} J_{23}^-.$$

Аналогично для J_i^+ (18) имеем

$$J_1^+ = J_{11} + \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{11}} J_{33}^+ + 2\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} J_{13}^+,$$
$$J_2^+ = J_{22} + \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}} J_{33}^- + 2\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{22}} J_{23}^-, \qquad (\Gamma.10)$$
$$J_3^+ = J_{12} + \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}} J_{13}^- + \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{12}} J_{23}^+.$$

Величины ξ_i^- (18), B_i (28) строятся так же, как и J_i^- (Г.9).

Литература

1. J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. P. Schrieffer, Phys. Rev. **106**, 162 (1957).
2. Н. Н. Боголюбов, Д. Н. Зубарев, Ю. А. Церковников, ДАН СССР **177**, 788 (1957).
3. Н. Н. Боголюбов, ЖЭТФ **34**, 58 (1958).
4. Н. Н. Боголюбов, В. В. Толмачев, Д. В. Ширков, *Новый метод в теории сверхпроводимости*, Наука, Москва (1955).
5. А. С. Элиашберг, ЖЭТФ **38**, 960 (1960).
6. А. А. Александров, Письма ЖЭТФ **46**, 128 (1987).
7. J. E. Hircsh and F. Marsigilio, Phys. Rev. B **39**, 11515 (1989).
8. V. Z. Kresin, Phys. Rev. B **35**, 8716 (1987).
9. J. Ruvalds, Phys. Rev. B **35**, 8869 (1987).
10. P. W. Anderson, Science **235**, 1196 (1987).
11. В. М. Локтев, ФНТ **22**, 3 (1996).
12. В. А. Москаленко, ФММ **8**, 503 (1959).
13. H. Suhl, B. T. Matthias, and L. K. Walker, Phys. Rev. Lett. **3**, 552 (1959).
14. В. А. Москаленко, Л. З. Кон, М. Е. Палистрант, *Низкотемпературные свойства металлов с особенностями зонного спектра*, Штиинца, Кишинев (1989).
15. В. А. Москаленко, *Электромагнитные и кинетические свойства сверхпроводящих сплавов с перекрывающимися энергетическими зонами*, Штиинца, Кишинев (1976).
16. Б. Т. Гейликман, УФН **89**, 327 (1966).
17. D. H. Lee and J. Ihm, Sol. St. Commun. **62**, 811 (1987).
18. В. А. Москаленко, М. Е. Палистрант, В. М. Вакалюк, *Механизмы высокотемпературной сверхпроводимости*, ОИЯИ, Дубна (1988).
19. В. А. Москаленко, М. Е. Палистрант, В. М. Вакалюк, ФНТ **15**, 378 (1989).
20. V. A. Moscalenco, M. E. Palistrant, V. M. Vackalyuk, and I. V. Padure, Sol. St. Commun. **69**, 747 (1989).

21. М. Е. Палистрант, В. М. Вакалюк, СФХТ **3**, 1805 (1990).
22. V. Z. Kresin and S. A. Wolf, Phys. Rev. B **41**, 4278 (1990).
23. В. А. Москаленко, М. Е. Палистрант, В. М. Вакалюк, УФН **161**, 155 (1991).
24. V. Z. Kresin and S. A. Wolf, Phys. Rev. B **46**, 6458 (1992).
25. M. E. Palistrant and F. G. Kochorbe, Physica C **194**, 351 (1992).
26. М. Е. Палистрант, М. Г. Калалб, Изв. АН Молдовы **1**, 70 (1992).
27. H. Krakauer and W. E. Pickett, Phys. Rev. Lett. **60**, 1665 (1988).
28. J. F. Herman, R. V. Kasowski, and W. J. Hsau, Phys. Rev. B **36**, 6904 (1987).
29. М. Г. Калалб, Ф. Г. Кочорбэ, М. Е. Палистрант, ТМФ **91**, 483 (1992).
30. A. J. Leggett, Prog. Theor. Phys. **36**, 901 (1966).
31. М. Е. Палистрант, ТМФ **95**, 101 (1993).
32. M. E. Palistrant, V. M. Vackalyuk, and M. G. Calalb, Physica C **208**, 170 (1993).
33. M. E. Palistrant, Physica C **235–240**, 2135 (1994).
34. М. Е. Палистрант, ТМФ **103**, 312 (1995).
35. M. E. Palistrant and F. G. Kochorbe, Physica C **241**, 345 (1995).
36. М. Е. Палистрант, М. Г. Калалб, Изв. АН Молдовы **1**, 30 (1996); ТМФ **110**, 162 (1996).
37. Э. В. Горбар, В. М. Локтев, С. Г. Шарапов, ФНТ **21**, 21 (1995).
38. M. Frick and T. Scheider, Z. Phys. B **81**, 337 (1990).
39. M. Helm, F. Forsthofer, and J. Keller, Phys. Rev. B **53**, 14481 (1996).
40. H. A. Fertig and S. Das Sarma, Phys. Rev. Lett. **65**, 1482 (1990).
41. W. C. Wu and A. Griffin, Phys. Rev. Lett. **74**, 158 (1995).
42. Ф. Г. Кочорбэ, М. Е. Палистрант, ЖЭТФ **103**, 3084 (1993); ТМФ **96**, 559 (1993).
43. D. Van der Marel, Physica C **165**, 35 (1990).
44. S. Robaszkiewicz, R. Michas, and K. A. Chao, Phys. Rev. B **26**, 3915 (1982).
45. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Э. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Наука, Москва (1962).
46. В. А. Москаленко, М. Е. Палистрант, ЖЭТФ **49**, 770 (1965).
47. F. G. Kochorbe and M. E. Palistrant, Czech. J. Phys. **46**, 983 (1996); M. E. Palistrant and F. G. Kochorbe, Czech. J. Phys. **46**, 981 (1996).
48. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, Москва (1966).
49. A. J. Leggett, Mod. Trends Theory Cond. Matt. **115**, 13 (1980).
50. Z. Tesanovic, Phys. Rev. B **36**, 2364 (1987).