

СПИНОВЫЕ ВИХРИ И СТАЦИОНАРНЫЕ СПИНОВЫЕ ПОТОКИ В НОРМАЛЬНОЙ ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ

*П. Л. Кротков, В. П. Минеев**

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
117334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 19 марта 1998 г.

Найдены решения уравнений бесстолкновительной спиновой динамики нормальной ферми-жидкости, описывающие когерентно прецессирующие в однородном магнитном поле структуры типа спиновых вихрей. Исследована их устойчивость и релаксация. Рассмотрены различные режимы стационарного переноса намагниченности по каналу.

1. ВВЕДЕНИЕ

В нормальной ферми-жидкости в бесстолкновительной области была предсказана [1] и наблюдалась в эксперименте [2] когерентно прецессирующая в слабонеоднородном магнитном поле двухдоменная спиновая структура. Время жизни этой структуры, в которой намагниченность плавно меняет направление от параллельного до антипараллельного внешнему магнитному полю, значительно превышает время расфазировки прецессии в неоднородном поле.

Подобные когерентно прецессирующие неоднородные распределения намагниченности ранее были найдены в сверхтекучей B -фазе ^3He [3, 4], где наряду с ними открыты также когерентно прецессирующие квантованные спиновые вихри и исследовано протекание спиновых потоков по каналу, сопровождающееся проскальзыванием фазы прецессии [5–10]. Представляет несомненный интерес развитие теории аналогичных явлений для нормальной ферми-жидкости. В настоящей работе рассмотрены решения уравнений бесстолкновительной спиновой динамики нормальной ферми-жидкости, описывающие стационарные спиновые потоки.

В однородном магнитном поле найдены когерентно прецессирующие структуры, имеющие вид спиновых вихрей. Толщина кора вихрей определяется, помимо величины поля и ферми-жидкостных параметров, модулем разности частоты прецессии и ларморовской частоты. Когда эти частоты равны, распределение спина в вихре соответствует известному скирмионному решению Белавина и Полякова [11].

Помимо этого в работе исследовано стационарное протекание спинового тока по каналу.

Статья устроена следующим образом. В разд. 2 выписаны уравнения бесстолкновительной спиновой динамики нормальной ферми-жидкости в удобной для дальнейшего изложения форме. В разд. 3 найдены вихревые решения этих уравнений, а также исследована их устойчивость и релаксация. Протеканию спинового тока по каналу посвящен разд. 4 работы. В Заключение кратко обсуждаются основные результаты.

*E-mail: mineev@landau.ac.ru

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Замкнутая система уравнений спиновой динамики нормальной ферми-жидкости в магнитном поле $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ в терминах макроскопических величин — квазичастичных плотностей спина $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ и спинового тока $\mathbf{J}_i(\mathbf{r}, t)$ — была получена Легтеттом в [12] из кинетического уравнения для спин-векторной части функции $\nu_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)$ распределения квазичастиц. Эти уравнения имеют вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \omega_L \times\right) \mathbf{S} + \nabla_i \mathbf{J}_i = 0, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \omega_L \times\right) \mathbf{J}_i + \frac{w^2}{3} \nabla_i \left(\mathbf{S} - \frac{\chi_n \omega_L}{\gamma^2}\right) + \kappa \frac{\gamma^2}{\chi_n} \mathbf{S} \times \mathbf{J}_i = -\frac{\mathbf{J}_i}{\tau_1}. \quad (2)$$

Здесь χ_n — магнитная восприимчивость ферми-жидкости, γ — гиромагнитное отношение для ядер ${}^3\text{He}$, $\omega_L(\mathbf{r}, t) = \gamma \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ — ларморовская частота, $w^2 = v_F^2(1 + F_0^a)(1 + F_1^a/3)$, $\kappa = (F_1^a/3 - F_0^a)/(1 + F_0^a)$, F_0^a и F_1^a — коэффициенты разложения по сферическим гармоникам антисимметричной части ферми-жидкостного взаимодействия квазичастиц, v_F — скорость Ферми, $\tau_1 = \tau/(1 + F_1^a/3)$, τ — время свободного пробега квазичастиц.

В первых слагаемых уравнений (1), (2) в скобках стоит временная производная в локальной системе координат, вращающейся с ларморовской частотой вокруг направления внешнего магнитного поля. Выделенная роль этой системы связана с неподвижностью относительно нее свободного спина. Второй член в уравнении (2) описывает момент, пропорциональный градиенту отклонения спиновой плотности от локально-равновесного значения $\chi_n \omega_L / \gamma^2$. Специфичным для ферми-жидкости является третий член в (2), относительный вклад которого не мал в меру силы ферми-жидкостного взаимодействия, представленного в уравнении в виде коэффициента κ , составленного из констант F_0^a и F_1^a . Физически он представляет собой дополнительный вращающий момент, действующий на ток благодаря молекулярному магнитному полю даже во вращающейся с локальной ларморовской частотой системе координат.

Область применимости системы уравнений (1), (2) ограничена требованием достаточно медленного пространственного изменения распределения квазичастиц. Если характерный масштаб пространственной неоднородности функции $\nu_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)$ обозначить через ξ , то это условие (см. [12]) запишется в виде

$$\xi \gg \min \left\{ l, \frac{v_F}{\omega_m} \right\}. \quad (3)$$

Здесь $l = v_F \tau$ — длина свободного пробега квазичастиц, $\omega_m = \omega_L \kappa / (1 + F_1^a/3)$ — частота, соответствующая молекулярному полю.

Помимо гидродинамической области $\xi \gg l$ при $l < v_F/\omega_m$, уравнения эволюции плотности спина и плотности тока, т. е. уравнения для нулевой и первой сферических гармоник $\nu_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)$, отцепляются от уравнений для высших гармоник также в случае $\xi \gg v_F/\omega_m$ при $l > v_F/\omega_m$ (что эквивалентно $\omega_m \tau > 1$). Последнее обстоятельство позволяет с их помощью исследовать спиновую динамику нормальных ферми-жидкостей в бесстолкновительном режиме $\omega_L \tau > 1$. Отметим, что коэффициент пропорциональности молекулярного поля ω_m внешнему полю ω_L равен $\kappa/(1 + F_1^a/3) \approx 2$ для нормального ${}^3\text{He}$ и ≈ 0.036 для насыщенного раствора ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$ при нулевых давлениях (см. [2]). В

бесстолкновительной области становится существенным необычный третий член уравнения (2), и именно к этой области относятся результаты настоящей работы.

В качестве граничного условия для уравнений (1), (2) обычно выбирают условие непротекания спинового тока сквозь стенки сосуда, содержащего ферми-жидкость:

$$\mathbf{J}_i n_i = 0, \quad (4)$$

где n_i — i -ая компонента вектора нормали к поверхности сосуда¹⁾. Пусть для определенности внешнее поле направлено по оси \hat{z} . При таком граничном условии из уравнения непрерывности (1) следует, что сохраняется полная продольная намагниченность $\int S_z dr$.

Чтобы упростить формулы, пользуемся системой единиц, в которой $\chi_n = \gamma^2$. Будем рассматривать случай однородного внешнего поля: $\nabla \omega_L = 0$, и считать движения во вращающейся с частотой прецессии системе отсчета достаточно медленными: $\tau \delta \omega \sim \tau_1 \delta \omega \ll 1$. Тогда приближенно можно считать, что производная по времени в этой системе равна нулю, и опустить первый член в уравнении (2). Разрешая получающееся уравнение относительно \mathbf{J}_i , получаем для спинового тока следующее выражение:

$$\mathbf{J}_i \simeq -\frac{w^2 \tau_1 / 3}{1 + (\kappa S \tau_1)^2} [\nabla_i \mathbf{S} + \kappa \tau_1 \nabla_i \mathbf{S} \times \mathbf{S} + (\kappa \tau_1)^2 \mathbf{S} (\mathbf{S} \nabla_i \mathbf{S})]. \quad (5)$$

В бесстолкновительной области каждое последующее слагаемое в скобках больше предыдущего в $\kappa \omega_L \tau_1$ раз. Однако последнее слагаемое аномально мало. Действительно, в случае однородного в пространстве распределения абсолютной величины намагниченности оно в точности равно нулю. В то же время, как показывает оценка [13, разд. 2], характерное время выравнивания неоднородности распределения S^2 порядка $\xi^2 / w^2 \tau_1$. Это время мало по сравнению с обратной характерной частотой $\delta \omega^{-1}$, так как в нашем случае $\xi^2 \sim w^2 / \kappa \omega_L \delta \omega$ (см. ниже). Поэтому будем считать $S^2 = \text{const}$. Итак, важны первые два слагаемых. Первое, как уже упоминалось, описывает обычный диффузный ток, второе — бездиссипативный, причем если второе слагаемое не аномально мало, то первым можно пренебречь. Тогда выражение для тока принимает вид

$$\mathbf{J}_i \simeq \frac{w^2}{3\kappa S^2} \mathbf{S} \times \nabla_i \mathbf{S}. \quad (6)$$

После подстановки этого выражения в уравнение (1) эволюции спина, остается одно векторное уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = \mathbf{S} \times \omega_L - \frac{w^2}{3\kappa S^2} \mathbf{S} \times \nabla^2 \mathbf{S}. \quad (7)$$

Это и есть интересующее нас уравнение. Наряду с уже упомянутой полной продольной намагниченностью $\int S_z dr$ абсолютная величина намагниченности S также является его интегралом. Поэтому при решении будем использовать естественную параметризацию вектора \mathbf{S} сферическими координатами α и β : $\mathbf{S} = S \hat{\mathbf{S}}$, где

¹⁾ Мы будем обозначать векторы в спиновом пространстве буквами полужирного шрифта, а компоненты векторов в орбитальном пространстве — нижним индексом.

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \sin \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \sin \alpha \\ \cos \beta \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Нас будут интересовать когерентно прецессирующие решения этого уравнения. Однако переход к сферическим координатам удобнее совершать не непосредственно в (7), а заметив (см. [13]), что (7) суть уравнение Ландау–Лифшица с отрицательным (при $\kappa > 0$) коэффициентом при градиентном члене. Как известно, это уравнение гамильтоново, получающееся из гамильтониана

$$H = \int d\mathbf{r} \left[\frac{(\mathbf{S} - \boldsymbol{\omega}_L)^2}{2} - \frac{w^2}{6\kappa S^2} (\nabla_i \mathbf{S})^2 \right] \quad (9)$$

с помощью обычного правила коммутации для спина:

$$[S_\alpha(\mathbf{r}), S_\beta(\mathbf{r}')] = ie_{\alpha\beta\gamma} S_\gamma(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Введение лагранжевого множителя $\omega_P \parallel \hat{z}$, учитывающего сохранение полной продольной намагниченности (что равносильно переходу в систему отсчета, прецессирующую с этой частотой), с учетом постоянства модуля спина дает (с точностью до постоянных слагаемых)

$$H = \int d\mathbf{r} \left[(\omega_P - \omega_L) \mathbf{S} - \frac{w^2}{6\kappa S^2} (\nabla_i \mathbf{S})^2 \right], \quad (10)$$

или в сферических координатах

$$H = \int d\mathbf{r} \left[(\omega_P - \omega_L) S \cos \beta - \frac{w^2}{6\kappa} ((\nabla_i \beta)^2 + (\nabla_i \alpha)^2 \sin^2 \beta) \right]. \quad (11)$$

Уравнения для α и β , определяющие стационарные в прецессирующей с частотой ω_P системе отсчета распределения спина, находятся варьированием этого гамильтониана. Заметим, что роль частоты $\delta\omega$ движения в ларморовской системе играет величина $|\omega_P - \omega_L|$.

3. СПИНОВЫЙ ВИХРЬ

Будем искать аксиально-симметричные решения

$$\beta = \beta(\rho), \quad \alpha = \alpha(\varphi).$$

Приравнивание нулю вариационной производной функционала (11) по α дает

$$\alpha'' = 0, \quad (12)$$

откуда получаем для α зависимость

$$\alpha(\varphi) = N\varphi + \alpha_0 \quad (13)$$

с целым квантовым числом циркуляции $N = \alpha' = \text{const}$, что следует из однозначности с точностью до $2\pi N$ угла $\alpha(\varphi)$ при повороте (изменении φ) на 2π . При этом градиент α равен

$$\nabla_i \alpha = \frac{N}{\rho} \hat{\varphi}_i. \tag{14}$$

Здесь и ниже $\hat{\varphi}$, $\hat{\rho}$, \hat{z} — единичные векторы цилиндрической системы координат.

Варьирование гамильтониана (11) по β дает следующее дифференциальное уравнение для $\beta(\rho)$:

$$-(\omega_P - \omega_L)S \sin \beta + \frac{w^2}{3\kappa} \left(\Delta \beta - \frac{N^2}{\rho^2} \sin \beta \cos \beta \right) = 0, \tag{15}$$

которое после переписывания оператора Лапласа в цилиндрических координатах приводится к виду

$$\beta'' + \frac{\beta'}{\rho} - \frac{N^2}{\rho^2} \sin \beta \cos \beta - \frac{\text{sign}(\omega_P - \omega_L)}{\xi^2} \sin \beta = 0, \tag{16}$$

где введена характерная длина задачи ξ , равная

$$\xi = \sqrt{\frac{w^2}{3\kappa S |\omega_P - \omega_L|}}. \tag{17}$$

Граничные условия для уравнения (16) могут быть получены из следующих соображений. В аксиально-симметричном случае выражение для тока (6) принимает вид

$$\mathbf{J}_i = \frac{w^2}{3\kappa} \left[\beta' \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \hat{\rho}_i + \frac{N}{\rho} \begin{pmatrix} -\sin \beta \cos \beta \cos \alpha \\ -\sin \beta \cos \beta \sin \alpha \\ \sin^2 \beta \end{pmatrix} \hat{\varphi}_i \right], \tag{18}$$

где подставлено $\alpha' = N$. Воспользуемся упрощающим предположением, что сосуд, содержащий ферми-жидкость, имеет форму кругового цилиндра с образующими, параллельными оси z , и основанием радиуса R . Условие (4) отсутствия тока (6) через стенки сосуда в этом случае тождественно выполняется на основаниях цилиндра, а на боковой поверхности дает следующее граничное условие:

$$\beta'|_{\rho=R} = 0. \tag{19}$$

При $N = 0$ из (13) получаем $\alpha = \alpha_0$, т.е. все спины расположены в одной плоскости, параллельной оси \hat{z} . В задаче есть только одно выделенное направление — ось z , поэтому из симметричных соображений следует, что локальный экстремум функционала (11) может достигаться только при $\beta(\rho) \equiv 0$ или $\beta(\rho) \equiv \pi$. Первое из этих двух значений является устойчивым, второе — нет.

Рассмотрим теперь случай $N \neq 0$. Нас интересуют решения, не обладающие особенностями в точке $\rho = 0$. Для этого при $N \neq 0$ необходимо, чтобы $\beta(0)$ равнялось либо нулю, либо π . Уравнение (16), очевидно, инвариантно относительно преобразования

$$\begin{aligned} (\omega_P - \omega_L) &\rightarrow -(\omega_P - \omega_L), \\ \beta &\rightarrow \pi - \beta. \end{aligned} \tag{20}$$

Вместо двух асимптотик $\beta(0) = \{0, \pi\}$ можно рассматривать одну. Для определенности будем считать, что граничное условие при $\rho = 0$ имеет вид

$$\beta(0) = 0. \quad (21)$$

Таким образом, задача свелась к решению дифференциального уравнения (16) с граничными условиями (19), (21). Задача содержит N только в виде N^2 , и можно считать N натуральным числом.

Сначала рассмотрим случай бесконечного сосуда: $R \rightarrow \infty$. Тогда граничное условие (19) заменится на следующее:

$$\beta' \rightarrow 0|_{\rho \rightarrow \infty}. \quad (19')$$

При $\xi = \infty$ ($\omega_P = \omega_L$) уравнение (16) имеет масштабнo-инвариантное решение, удовлетворяющее условиям (19'), (21) и идентичное скирмиону Белавина-Полякова [11], причем топологическая степень отображения, как оказывается, совпадает с квантовым числом циркуляции:

$$\beta(\rho) = \arccos \frac{1 - A\rho^{2N}}{1 + A\rho^{2N}} \sim \begin{cases} A\rho^N, & \rho \rightarrow 0, \\ \pi - A\rho^{-N}, & \rho \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (22)$$

где $A > 0$ — произвольная постоянная. Как видно, скирмион характеризуется переворачиванием спинов от равновесного направления по ω_L в нуле до антиравновесного на бесконечности²⁾.

При конечном ξ аналитически возможно получить лишь асимптотические зависимости $\beta(\rho)$ при $\rho \rightarrow 0$ и $\rho \rightarrow \infty$, которые должны быть сшиты в промежуточной области численно. Возможность сшивания двух асимптотик и означает существование соответствующего решения.

При $\xi \neq \infty$ ($\omega_P \neq \omega_L$) дифференциальное уравнение (16) заменой $r = \rho/\xi$ сводится к уравнению для $\beta(r)$ вида

$$\beta'' + \frac{\beta'}{r} - \frac{N^2}{r^2} \sin \beta \cos \beta - \text{sign}(\omega_P - \omega_L) \sin \beta = 0. \quad (23)$$

Разложение этого уравнения вблизи нуля дает следующее линеаризованное уравнение:

$$\beta'' + \frac{\beta'}{r} - \left(\frac{N^2}{r^2} + \text{sign}(\omega_P - \omega_L) \right) \beta = 0, \quad (24)$$

которое суть обычное (при $\omega_P < \omega_L$) или модифицированное (при $\omega_P > \omega_L$) уравнение Бесселя. Его решение есть линейная комбинация двух линейно независимых функций, которые могут быть выбраны таким образом, чтобы (при $N \neq 0$) одна из них расходилась как r^{-N} при $r \rightarrow 0$, а вторая стремилась к нулю как r^N . Поскольку функция β ограничена:

$$\beta \in [0, \pi], \quad (25)$$

²⁾ В силу (20) существует, очевидно, и инверсная структура — скирмион с изменением β от π в нуле до нуля на бесконечности.

нужно оставить только нерасходящееся слагаемое, и мы получаем для интересующих нас решений асимптотику

$$\beta \sim Ar^N \Big|_{r \rightarrow 0}, \quad (26)$$

где $A > 0$.

Численное решение дифференциального уравнения (23) с начальным условием (26) показывает, что в зависимости от значения A функция $\beta(r)$ на бесконечности асимптотически выходит либо на нуль, либо на π (мы отбрасываем не удовлетворяющие ограничению (25) асимптотики $\beta \rightarrow 2\pi, 3\pi, \dots$). Аналогичное приведенному выше рассмотрению линеаризованных уравнений показывает, что при $r \rightarrow \infty$ возможны следующие нерасходящиеся асимптотики:

$$\beta \sim \begin{cases} Be^{-r}/\sqrt{r}, & \omega_P > \omega_L, \\ \pi - Be^{-r}/\sqrt{r}, & \omega_P < \omega_L, \end{cases} \quad (27)$$

где $B > 0$. Постоянные A в (26) и B в (27), конечно, могут быть определены только из условия сшивки (26) с (27). Как показывает численное решение, при $\omega_P < \omega_L$ такая сшивка возможна, а при $\omega_P > \omega_L$ — нет³⁾. Таким образом, при $\omega_P < \omega_L$ возможно существование структур с переворачиванием спина на интервале от нуля до бесконечности и асимптотиками

$$\beta(r) \sim \begin{cases} Ar^N, & r \rightarrow 0, \\ \pi - Be^{-r}/\sqrt{r}, & r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (28)$$

Эта структура напоминает скирмион (22), но характеризуется экспоненциальным выходом на пространственно-однородное распределение при $r \rightarrow \infty$. Для $N = 1$ ее вид изображен на рис. 1. Для сравнения на том же рисунке прерывистой линией представлен скирмион (22), имеющий такую же асимптотику в нуле.

Кроме асимптотик (27), как известно из теории функций Бесселя, существуют еще асимптотики при $r \rightarrow \infty$, имеющие вид затухающих осцилляций вокруг нуля, $\pi, 2\pi, \dots$, которые, конечно, не удовлетворяют ограничению (25) и должны быть отброшены. Именно, как показывает численное решение, при $\omega_P > \omega_L$ асимптотика (26) при любых A выходит на такое осциллирующее вокруг $\beta = \pi$ решение.

Однако в случае $\omega_P < \omega_L$ дело обстоит сложнее. При некотором $A = A_0$ решение выходит на экспоненциальное затухание (27), при $A > A_0$ — на осцилляции вокруг значения 2π , при $A < A_0$ — на осцилляции вокруг нуля. Таким образом, при $A > A_0$ решений не существует. При $A < A_0$, однако, возможен следующий размерный эффект: функция $\beta(r)$, выйдя из нуля, доходит до точки r_0 первого максимума, $\beta(r_0) \in (0, \pi)$, затем убывает до первого минимума, $\beta \in (-\pi, 0)$, и далее, осциллируя вокруг нуля, последовательно проходит убывающие по абсолютной величине максимумы и минимумы. Если в точке r_0 находится стенка: $r_0 = R/\xi$, то такое решение будет удовлетворять граничным условиям (19), (21) и не будет нарушать ограничения (25). Подобная структура имеет вид стоячей волны.

При $A \rightarrow A_0$ местоположение r_0 первого максимума стремится к бесконечности, а при $A \rightarrow 0$ решение уравнения (23), всюду мало отклоняющееся от нуля, переходит,

³⁾ Конечно, в силу инвариантности по отношению к преобразованию (20) ясно, что при $\omega_P > \omega_L$ асимптотика (27) на бесконечности сшивается с асимптотикой $\pi - Ar^N$ вблизи нуля.

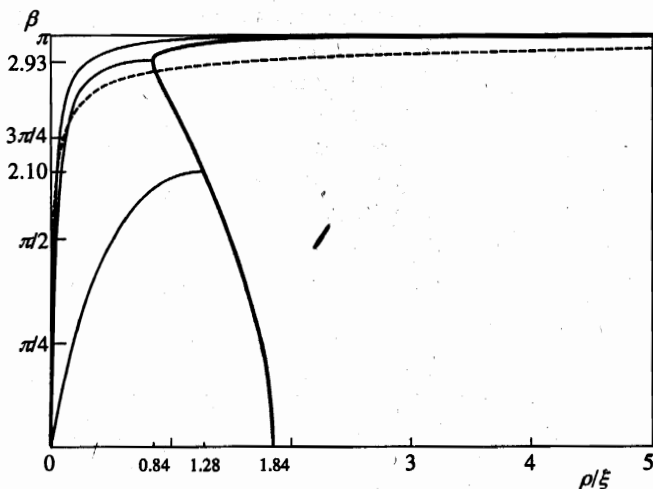


Рис. 1. Зависимость угла наклона намагниченности от безразмерного расстояния до оси для трех спиновых вихрей с квантовым числом циркуляции $N = 1$ (тонкие сплошные линии): верхняя линия — вихрь (28), нижняя линия — «стоячая волна» с полной продольной составляющей направления намагниченности, равной нулю, средняя линия — «стоячая волна», соответствующая минимальному эффективному размеру сосуда; жирная линия — геометрическое множество точек значений угла β на границе сосуда для вихревых решений с $N = 1$; штриховой линией показан скирмион (22) Белавина–Полякова с тем же значением производной в нуле, что и вихрь (28)

как уже упоминалось, в функцию Бесселя (первого рода) порядка N , и, соответственно, точка r_0 первого максимума стремится к корню производной функции Бесселя, численно равному 1.84118 для вихрей с $N = 1$, 3.05424 для $N = 2$ и 4.20119 для $N = 3$. Значение функции $\beta(r)$ в точке r_0 первого максимума меняется от π при $A = A_0$ до 0 при $A = 0$. Множество точек $\beta(r_0)$, полученное численными методами, изображено на рис. 1 жирной линией. Там же изображены две структуры типа стоячей волны.

Как видно из рисунка, множество точек $\beta(r_0)$ описывает непрерывную трансформацию спинового вихря при изменении эффективного размера сосуда R/ξ , начиная с бесконечного. Существует минимальное значение $r_{0m} \approx 0.84$, задающее минимальный радиус сосуда, необходимый для образования подобной структуры. Значение $\beta(r_{0m})$ равно приблизительно 2.93 рад. Таким образом, собственно спиновый вихрь (28) оказывается предельным случаем «стоячей волны» при бесконечном размере сосуда. Поэтому в дальнейшем будем называть обе структуры, не различая их, спиновыми вихрями.

Начальными условиями эксперимента фиксируется полная продольная намагниченность $S \int dr \cos \beta$, которая впоследствии не меняется в соответствии с уравнениями Леггетта. Каждый спиновый вихрь однозначно характеризуется значением любой из двух величин: 1) полной продольной составляющей направления намагниченности $\int dr \cos \beta$ и 2) угла $\beta(R/\xi)$, на который отклоняются спины на границе сосуда. Начальное значение модуля намагниченности S можно считать равным равновесному значению ω_L . Таким образом, начальными условиями фиксируется конечный угол $\beta(R/\xi)$ (см. рис. 1). Для изображенной на рис. 1 структуры с $\beta(R/\xi) \approx 2.10$ полная продольная составляющая направления намагниченности $\int dr \cos \beta$ равна нулю. Для вихрей

с $\beta(R/\xi) < 2.10$ полная продольная составляющая направления намагниченности больше нуля, а для $\beta(R/\xi) > 2.10$ — меньше нуля.

Как уже отмечалось, при $\omega_P > \omega_L$ все приведенные на рис. 1 структуры отобразятся симметрично относительно прямой $\beta = \pi/2$.

Заметим, что из существования минимального значения r_{0m} следует, что при заданном действительном размере сосуда R образование спинового вихря возможно при произвольном значении разности $|\omega_P - \omega_L|$, большем минимального, равного, как это следует из определения ξ ,

$$|\omega_P - \omega_L|_{min} = \frac{w^2}{3\kappa\omega_L} \left(\frac{r_{0m}}{R}\right)^2.$$

Поскольку применимость настоящей теории ограничена условием $|\omega_P - \omega_L|\tau_1 \ll 1$, в рамках этого приближения утверждать о существовании подобной структуры правомочно лишь при достаточно больших R .

3.1. Устойчивость

В аксиально-симметричном случае гамильтониан (11) легко приводится к виду

$$H = -\frac{w^2}{3\kappa} \int_0^{R/\xi} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{\beta'^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha'}{r}\right)^2 \sin^2 \beta - \text{sign}(\omega_P - \omega_L) \cos \beta \right]. \quad (29)$$

Его вторая вариация равна

$$\delta^2 H = -\frac{w^2}{3\kappa} \int r dr \int d\varphi \left[(\delta\beta')^2 + \left(\frac{\alpha'}{r}\right)^2 \cos 2\beta (\delta\beta)^2 + 2 \frac{\alpha' \delta\alpha'}{r^2} \sin 2\beta \delta\beta + \left(\frac{\delta\alpha'}{r}\right)^2 \sin^2 \beta + \text{sign}(\omega_P - \omega_L) \cos \beta (\delta\beta)^2 \right]. \quad (30)$$

Интегрируя по частям, пишем

$$\int d\varphi \alpha' \delta\alpha' = - \int d\varphi \alpha'' \delta\alpha, \quad \int r dr (\delta\beta')^2 = - \int dr (r\delta\beta')' \delta\beta = - \int r dr (\delta\beta'' + \delta\beta'/r) \delta\beta.$$

Найденные выше структуры описываются дифференциальными уравнениями (12), (23). После варьирования второго из них и подстановки в выражение для второй вариации энергии имеем окончательно

$$\delta^2 H = -\frac{w^2}{3\kappa} \int d^2 r \left(\frac{\delta\alpha'}{r}\right)^2 \sin^2 \beta. \quad (31)$$

Здесь $\int d^2 r = \int r dr \int d\varphi$. Таким образом, все описанные структуры являются локальными максимумами (при $\kappa > 0$ и, соответственно, минимумами при $\kappa < 0$) функционала энергии. Поэтому ввиду сохранения энергии все они устойчивы.

3.2. Релаксация

В работе [1] показано, что для функций S и J_i , являющихся решениями уравнений Лэгетта, столкновительный член в уравнении (2) для спинового тока приводит в замкнутом объеме ферми-жидкости к следующему релаксационному поведению:

$$\frac{d}{dt} \int dr \left[\frac{(S - \omega_L)^2}{2} + \frac{3J_i^2}{2w^2} \right] = -\frac{3}{w^2\tau_1} \int dr J_i^2. \tag{32}$$

В силу сохранения полной продольной намагниченности в левой части этого уравнения производная $d \int (\omega_L S) dr / dt$, как и, конечно, $d\omega_L^2 / dt$, равна нулю.

Для качественного рассмотрения релаксации структуры достаточно в это уравнение подставить найденные в предположении стационарности зависимости $S(r)$ и $J_i(r)$, т. е. $S(r) = \text{const}$ и выражение (6). Несложные вычисления показывают, что это дает

$$\frac{3}{w^2} J_i^2 = \frac{w^2}{3\kappa^2 S^2} (\nabla_i S)^2,$$

т. е. токовый член пропорционален энергии неоднородности распределения S . Эта величина оценивается по определению (17) характерного масштаба ξ как $\sim w^2 / 3\kappa^2 \xi^2 \sim \sim |\omega_P - \omega_L| S / \kappa$. Поэтому в силу того что в начале релаксации модуль намагниченности приближенно равен равновесному ($S \sim \omega_L$) и, кроме того, $\kappa\omega_L\tau_1 \gg 1$ (бесстолкновительный режим), а $|\omega_P - \omega_L|\tau_1 \ll 1$, токовым членом в левой части можно пренебречь по сравнению с членом S^2 . Таким образом, объемная релаксация сводится к затуханию абсолютной величины намагниченности, определяемому малой правой частью:

$$\frac{dS^2}{dt} = -\frac{2w^2}{3\kappa^2\tau_1} \frac{1}{\pi R^2} \int d^2r (\nabla_i \hat{S})^2. \tag{33}$$

Далее, подставляя известные зависимости, пишем

$$\int d^2r (\nabla_i \hat{S})^2 = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi (\beta'^2 + \alpha'^2 \sin^2 \beta) = 2\pi \int_0^{R/\xi} r dr \left(\beta'^2 + \frac{\sin^2 \beta}{r^2} N^2 \right),$$

где совершен переход от ρ к $r = \rho/\xi$. Учитывая, что на границе сосуда $\beta' = 0$, интегрирование по частям члена β'^2 и последующая подстановка выражения (23) дает окончательно

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{2|\omega_P - \omega_L|}{\kappa\tau_1} C, \tag{34}$$

где C — безразмерный интеграл, зависящий только от формы конкретного вихря:

$$C = \frac{1}{\pi(R/\xi)^2} \int_0^{R/\xi} 2\pi r dr \left[\frac{N^2}{r^2} \sin \beta (\sin \beta - \beta \cos \beta) - \beta \text{sign}(\omega_P - \omega_L) \sin \beta \right]. \tag{35}$$

В пределе $\beta \rightarrow 0$ в интеграле C можно провести разложение по малому углу β . Разложение вплоть до квадратичного члена выражается через полную продольную составляющую направления намагниченности, усредненную по сосуду:

$$C \approx \frac{\int \beta^2 dr}{\int d^2r} \approx -2 + \frac{2 \int d^2r \cos \beta}{\int d^2r},$$

что в меру малости β мало.

Сказанное позволяет предположить, что и в общем случае значение C невелико, так что не нарушает медленности релаксации, т. е. время, за которое S линейно обращается в нуль, $k\omega_L\tau_1/2|\omega_P - \omega_L| \gg \tau_1$. Заметим, что это время велико в силу условия $|\omega_P - \omega_L|\tau_1 \ll 1$ применимости данной теории. Поскольку полная продольная намагниченность $S \int dr \cos \beta$ является интегралом уравнений Леггетта, то медленное уменьшение S приведет к (медленному же) увеличению абсолютной величины полной продольной составляющей намагниченности $\int dr \cos \beta$.

Устойчивость семейства решений-вихрей и медленность их релаксации позволяют сделать интуитивно самое простое предположение, что при релаксации вихря общий вид решения не изменится. Именно, в процессе релаксации будет происходить трансформация вихревого распределения в классе решений из указанного семейства, такая что в каждый данный момент времени реализуется распределение, определяющееся мгновенным значением полной продольной составляющей направления намагниченности. Поскольку, однако, вихрь с фиксированной полной продольной составляющей направления может образоваться только при фиксированном эффективном радиусе сосуда R/ξ , то изменение полной составляющей направления намагниченности в процессе релаксации по решениям семейства должно приводить к подстройке частоты прецессии ω_P таким образом, чтобы характерный масштаб ξ (17) обеспечивал «правильный» эффективный радиус.

На рис. 1 изображен вихрь с $\beta(R/\xi) \approx 2.10$ и полной составляющей направления намагниченности, равной нулю. Эта вихревая структура является граничной в том плане, что вихри с $\beta(R/\xi) < 2.10$ (и полной продольной составляющей направления намагниченности большей нуля) будут в таком случае релаксировать с уменьшением $\beta(R/\xi)$, т. е. к пространственно-однородному распределению $\beta \equiv 0$, а вихри с $\beta(R/\xi) > 2.10$ (и полной составляющей направления намагниченности меньшей нуля) — с увеличением $\beta(R/\xi)$, т. е. к предельному распределению (28). В первом случае эффективный радиус $R/\xi \sim |\omega_P - \omega_L|^{1/2}$ увеличивается до ≈ 1.84 (соответственно частота прецессии ω_P уменьшается⁴⁾), а во втором — эффективный радиус сначала уменьшается до ≈ 0.84 , а затем увеличивается (соответственно ω_P сначала увеличивается, а потом уменьшается).

В случае $\omega_P > \omega_L$ поведение будет иным: для вихрей с полной составляющей направления намагниченности большей нуля частота ω_P будет сначала уменьшаться, а затем увеличиваться, а для вихрей с полной составляющей направления намагниченности меньшей нуля частота ω_P будет монотонно увеличиваться.

4. ОДНОМЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ

Рассмотрим стационарное течение спина по длинному (длина $L \gg \xi$) и тонкому (поперечный размер $a \ll \xi$) каналу постоянного сечения, ориентированному перпендикулярно магнитному полю. В такой геометрии течение можно считать одномерным и α и β изменяющимися только в направлении вдоль канала:

$$\beta = \beta(y), \quad \alpha = \alpha(y).$$

⁴⁾ Напомним, что рассматривается случай $\omega_P < \omega_L$.

Варьирование функционала (11) по α дает $(\alpha' \sin^2 \beta)' = 0$, откуда

$$\alpha' \sin^2 \beta = h = \text{const}. \quad (36)$$

Из этого выражения видно, что если хотя бы в одной точке $\alpha'(y) = 0$ или $\sin \beta(y) = 0$, то $h = 0$ и $\alpha'(y) \equiv 0$ или $\sin \beta(y) \equiv 0$. Интерес представляет случай $\alpha' \neq 0$, поэтому из (36) заключаем, что либо $\sin \beta(y) \equiv 0$, либо $\sin \beta(y) \neq 0$ при любом y и

$$\alpha' = h / \sin^2 \beta. \quad (37)$$

Варьирование функционала (11) по β дает уравнение

$$\beta'' - (\alpha')^2 \sin \beta \cos \beta - \frac{\text{sign}(\omega_P - \omega_L)}{\xi^2} \sin \beta = 0. \quad (38)$$

Случай $\sin \beta(y) \equiv 0$ является решением задачи, а в случае (37), подставляя выражение для α' , получим уравнение, описывающее распределение $\beta(y)$, а в силу (37) и $\alpha(y)$, вдоль канала:

$$\beta'' - \frac{h^2 \cos \beta}{\sin^3 \beta} - \frac{\text{sign}(\omega_P - \omega_L)}{\xi^2} \sin \beta = 0. \quad (39)$$

Это уравнение имеет вид уравнения Ньютона движения частицы единичной массы в потенциале

$$U(\beta) = \frac{h^2}{2 \sin^2 \beta} + \frac{\text{sign}(\omega_P - \omega_L)}{\xi^2} \cos \beta, \quad (40)$$

причем роль времени играет координата y . Этот потенциал для $\xi = 1$, $h^2 = 1/2$ изображен на рис. 2. Минимум его достигается, когда $\cos \beta = -\text{sign}(\omega_P - \omega_L) \sin^4 \beta / (h\xi)^2$. После введения обозначений $\sin^2 \beta = z$, $(h\xi)^4 = b$ приходим к уравнению $z^4 = b(1-z)$, при любых $b > 0$ имеющему в интервале $z \in (0, 1)$ только один корень. Уравнение (39) инвариантно относительно преобразования (20). Для определенности полагаем $\omega_P \leq \omega_L$.

Выражение (6) для бездиссипативного тока в одномерном случае принимает вид (из орбитальных компонент отлична от нуля лишь компонента вдоль канала, и нижний индекс опускаем)

$$J = \frac{w^2}{3\kappa} \left[\begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \beta' + \begin{pmatrix} -\sin \beta \cos \beta \cos \alpha \\ -\sin \beta \cos \beta \sin \alpha \\ \sin^2 \beta \end{pmatrix} \alpha' \right]. \quad (41)$$

Из этого выражения видно, что

$$J^z = \frac{w^2}{3\kappa} \alpha' \sin^2 \beta = \frac{w^2}{3\kappa} h = \text{const}, \quad J \equiv |J| = \frac{w^2}{3\kappa} \sqrt{\beta'^2 + \alpha'^2 \sin^2 \beta}.$$

Будем считать, что концы канала соединены с двумя резервуарами, содержащими ферми-жидкость. Предположим, что в обоих резервуарах спины отклонены на одинаковый угол β от направления магнитного поля. Кроме того, в резервуарах величина β от y не зависит, поэтому граничное условие для уравнения (39) имеет вид

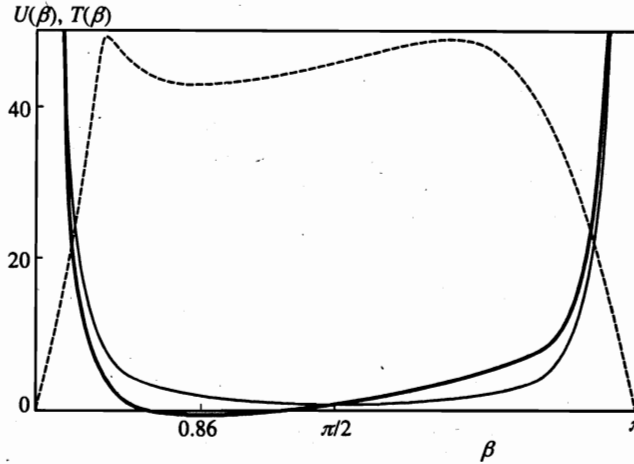


Рис. 2. Эффективный ньютоновский потенциал для угла отклонения намагниченности при одномерном переносе спина и период движения в этом потенциале: тонкая сплошная линия — потенциал в случае $\omega_P = \omega_L$, т. е. первое слагаемое в (40); жирная сплошная линия — потенциал в случае $\omega_P \neq \omega_L$ (для частного случая $\xi = 1, h^2 = 1/2$); штриховой линией нарисована зависимость периода от начальной точки поворота (в произвольных единицах)

$$\beta(0) = \beta(L), \quad \beta'(0) = \beta'(L) = 0. \tag{42}$$

С таким граничным условием аналогия с классическим движением приобретает предельно простой смысл: начальный угол отклонения β_0 фиксируется экспериментом, в силу условия (42) начальная «кинетическая энергия» β'^2 равна нулю, т. е. «движение» стартует с точки поворота потенциала $U(\beta_0)$ и, в силу (42), должно в ней же и заканчиваться, т. е. на длине L должно укладываться целое число «периодов» движения $\beta(y)$ в потенциале (40).

Рассмотрим сначала случай $\omega_P = \omega_L$ ($\xi = \infty$). Тогда $U(\beta) = h^2/2 \sin^2 \beta$ и $\beta' = \sqrt{2[U(\beta_0) - U(\beta)]}$. Можно написать

$$dy = \frac{d\beta}{\beta'} = \frac{\sin \beta_0 \sin \beta d\beta}{h \sqrt{x_0^2 - x^2}} = -\frac{\sin \beta_0}{h} \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}}, \tag{43}$$

где введено обозначение $x = \cos \beta$ и $x_0 = \cos \beta_0$. Полупериод движения в этом случае равен

$$T = \int dy = \frac{\sin \beta_0}{h} \arcsin \frac{x}{x_0} \Big|_{-x_0}^{x_0} = \pi \frac{\sin \beta_0}{h}. \tag{44}$$

Разность фаз, набегающая за это время, равна

$$\Delta\alpha_T = \int \alpha' dy = \sin \beta_0 \int_{-x_0}^{x_0} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{x_0^2-x^2}} = \pi, \tag{45}$$

т. е. разность фаз не зависит от h .

В соответствии со сказанным, условие (42) приводит к $L = 2nT$, $n = 1, 2, \dots$, откуда

$$J^z \equiv \frac{w^2}{3\kappa} h = \frac{w^2}{3\kappa} \frac{2\pi n \sin \beta_0}{L}$$

при разности фаз на концах канала $\Delta\alpha = 2\pi n$. Как видно из решения, в такой задаче с граничным условием (42) при всех других разностях фаз стационарные токонесящие состояния не возникают. Отметим, что в этом случае $J = h/\sin \beta_0 = \text{const}$.

В случае $\omega_P \neq \omega_L$ ($\xi \neq \infty$) уравнение $U(\beta) = U(\beta_0)$, $\beta \neq \beta_0$ для точек поворота сводится к квадратному уравнению $x^2 + ax + ax_0 - 1 = 0$ с корнями

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4ax_0 + 4}}{2}, \quad \text{где } a = \frac{h^2 \xi^2}{2(1-x_0^2)}. \quad (46)$$

Коль скоро $x_0 \in (-1, 1)$, эти корни не выходят из следующих областей: $x_1 \in (-1, 1)$, $x_2 < -1$, причем, как и должно быть, $x_1 = x_0$, если β_0 совпадает с точкой минимума потенциала $U(\beta)$. Ниже мы везде будем считать, что $x_1 < x_0$, т.е. β_0 находится правее точки минимума, и интегрировать в пределах от x_1 до x_0 . В противном случае во всех формулах надо сделать замену $x_1 \leftrightarrow x_0$.

Итак, можно написать

$$dy = \frac{d\beta}{\beta'} = - \frac{\xi dx}{\sqrt{2(x_0-x)(x-x_1)(x-x_2)}}, \quad (47)$$

а формулы для периода и разности фаз заменой $t = \sqrt{(x_0-x)(x_0-x_1)}$ сводятся к полным эллиптическим интегралам в канонической форме Лежандра (см., например, [14])⁵⁾:

$$T = \xi \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{2(x_0-x)(x-x_1)(x-x_2)}} = \sqrt{\frac{2}{x_0-x_2}} K(k), \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_T &= h\xi \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{2(x_0-x)(x-x_1)(x-x_2)}} = \\ &= \frac{h\xi}{\sqrt{2(x_0-x_2)}} \left[\frac{1}{1+x_0} \Pi(k, m) + \frac{1}{1-x_0} \Pi(k, p) \right], \end{aligned} \quad (49)$$

где $\Pi(k, p) \equiv \Pi(\pi/2, k, p)$ и введены обозначения

$$k = \sqrt{\frac{x_0-x_1}{x_0-x_2}}, \quad p = \frac{x_0-x_1}{1-x_0}, \quad m = -\frac{x_0-x_1}{1+x_0}.$$

⁵⁾ В связи с существующими разночтениями в определении параметра p выпишем в явном виде интеграл третьего рода:

$$\Pi(\varphi, k, p) = \int_0^{\sin \varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}(1+pt^2)}.$$

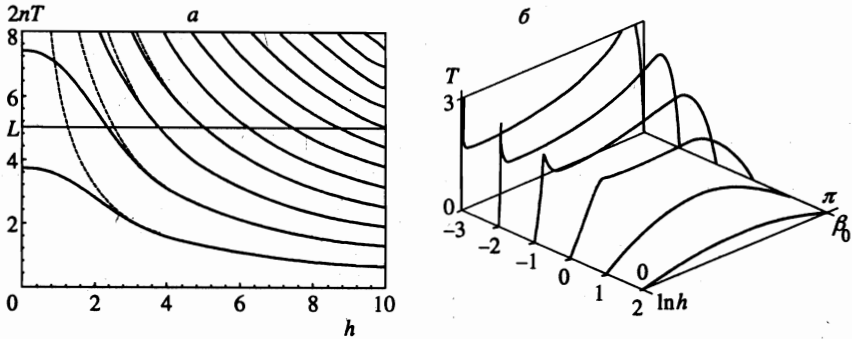


Рис. 3. Кратные значения полупериода T движения в потенциале (40) при $n = 1, 2, \dots$ как функции от h при фиксированном начальном угле $\beta_0 = \pi/2$ (рис. а), а также зависимости полупериода от β_0 при некоторых значениях h (рис. б). Принимается $\xi = 1$. Для больших h зависимость от β_0 синусоидальная, как в случае $\omega_P = \omega_L$, и стремится к нулю как $1/h$; при малых h полупериод имеет локальный минимум в точке минимума потенциала (40) и два локальных максимума, стремящихся один к нулю, другой к π при уменьшении h . Как видно из рис. а, при фиксированной длине L канала условие $L = 2nT$ выполняется при бесконечном ряде значений h , причем уже при $h > 3$ зависимость $T(h)$ хорошо описывается формулами $T = \pi \sin \beta_0/h$ (соответствующие кратные приведены на рис. а штриховыми линиями) и $h = 2\pi n \sin \beta_0/L$, как в случае $\omega_P = \omega_L$

Отметим, что в таких обозначениях абсолютная величина тока равна $J = (w^2/3\kappa)(\sqrt{2}/\xi)\sqrt{x-x_3}$, где введено дополнительно обозначение $x_3 = x_0 - a$, и втекающий ток (ток на входе в канал) и вытекающий ток (ток на выходе из канала), т. е. когда $x = x_0$, равны $h/\sin \beta_0$. Средний модуль тока, текущего через канал, равен в этом случае

$$\langle J \rangle = \frac{w^2}{3\kappa} \frac{2n}{L} \int_{x_1}^{x_0} \frac{\sqrt{x-x_3} dx}{\sqrt{(x_0-x)(x-x_1)(x-x_2)}} = -\frac{w^2}{3\kappa} \frac{2n}{L} \frac{2(x_1-x_3)}{\sqrt{(x_0-x_3)(x_1-x_2)}} \Pi \left(\sqrt{\frac{x_0-x_1}{x_0-x_3} \frac{x_3-x_2}{x_1-x_2}}, \frac{x_0-x_1}{x_0-x_3} \right). \quad (50)$$

Хотя в этом случае и нельзя выразить явно зависимости $h(\Delta\alpha)$, основные черты протекания остаются такими же, как и в случае $\omega_P = \omega_L$. А именно, как видно из рис. 3а, условие $L = 2nT$ при фиксированном L дает дискретный ряд возможных значений h , каждому из которых соответствует свое число полных периодов n , укладывающихся в длину канала, и своя разность фаз $\Delta\alpha$ на концах канала.

В пределе $h\xi \gg 1$ можно, очевидно, пренебречь вторым членом в потенциале $U(\beta)$. Тогда задача сведется к более простому случаю $\omega_P = \omega_L$.

Выделенной является ситуация, когда величина β постоянна вдоль канала: $\beta' = 0$. Такая ситуация имеет место, если β реализует минимум потенциала (40) (эта точка выделена тем, что начавшееся с нее движение не обладает свойством периодичности). В этом случае из (37) следует, что производная $\alpha' = g = \text{const}$ постоянна вдоль канала. Разность фаз на концах равна соответственно $\Delta\alpha = gL$.

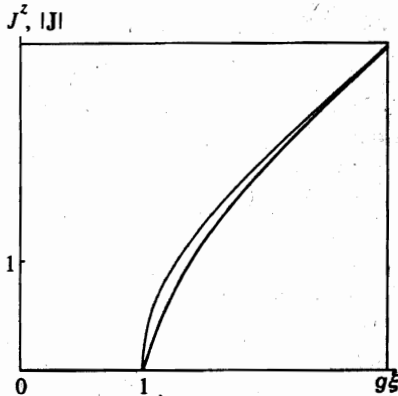


Рис. 4. Зависимость тока через канал (в единицах $w^2/3\kappa\xi$) от разности фаз на концах канала в случае, когда отклонение намагниченности соответствует минимуму потенциала (38): тонкая линия — модуль тока, жирная линия — компонента вдоль поля. При больших градиентах фазы $g\xi$ обе зависимости асимптотически стремятся к линейной

Условие минимума потенциала в таких обозначениях принимает вид

$$\cos \beta = -\frac{\text{sign}(\omega_P - \omega_L)}{(g\xi)^2}$$

Из области допустимых значений косинуса отсюда следует, что такое решение имеет место только при $g\xi \geq 1$. В противном случае возможно лишь $\sin \beta \equiv 0$. Таким образом, ток зависит от градиента g азимутального угла α следующим образом:

$$J^z = \begin{cases} 0, & g\xi \leq 1, \\ \frac{w^2}{3\kappa} g \left(1 - \frac{1}{(g\xi)^4} \right), & g\xi > 1, \end{cases} \quad (51)$$

$$|J| = \begin{cases} 0, & g\xi \leq 1, \\ \frac{w^2}{3\kappa} g \sqrt{1 - \frac{1}{(g\xi)^4}}, & g\xi > 1. \end{cases} \quad (52)$$

Эта зависимость представлена на рис. 4.

Для каждого значения градиента спины в канале отклоняются от направления магнитного поля на фиксированный угол β_0 , равный 0 для $g\xi < 1$ и стремящийся к $\pi/2$ при $g\xi \rightarrow \infty$:

$$\beta_0 = \begin{cases} 0, & g\xi \leq 1, \\ \arccos \frac{1}{g^2 \xi^2}, & g\xi > 1. \end{cases} \quad (53)$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовались аксиально-симметричные и одномерные квазистационарные решения уравнений спиновой динамики нормальной ферми-жидкости в однородном магнитном поле в бесстолкновительном режиме. В аксиально-симметричном случае обнаружены устойчивые по отношению к малым возмущениям структуры типа спиновый вихрь с целым числом циркуляции. В каждой такой структуре намагниченность,

направленная по или против поля на оси вихря при удалении от оси плавно отклоняется вплоть до определенного угла на границе сосуда. Этот угол, как и точная зависимость отклонения намагниченности от расстояния до оси, определяется полной продольной составляющей направления намагниченности $\int dr \cos \beta$. Начальным условием эксперимента определяется полная продольная намагниченность $S \int dr \cos \beta$, величина которой в соответствии с уравнениями Леггетта не изменяется при дальнейшей эволюции системы. Величину S в начале эксперимента можно считать совпадающей с равновесным значением $\chi_n \omega_L / \gamma^2$.

Требование непротекания спинового тока через стенки камеры (при фиксированном ее размере) ставит в соответствие каждому углу отклонения на боковой поверхности сосуда свое значение разности частоты прецессии и ларморовской частоты таким образом, чтобы обеспечить нужный эффективный (т. е. в единицах характерной длины ξ) размер сосуда. Эффективный размер камеры, необходимый для образования вихря, ограничен снизу значением ≈ 0.84 (для вихря с числом циркуляции $N = 1$). При стремлении же эффективного размера к бесконечности угол отклонения на боковой поверхности стремится к π , при этом случаю равенства частоты прецессии и ларморовской частоты соответствует распределение намагниченности, описываемое скирмионным решением Белавина–Полякова.

Поиск решений осуществлялся в приближении квазистационарности — медленности движения относительно ларморовской системы отсчета, т. е. в пределе, когда мал модуль разности частоты прецессии и ларморовской частоты.

Столкновительный интеграл в уравнении Леггетта для спинового тока приводит к релаксации абсолютной величины намагниченности S . Приближение квазистационарности тогда может быть эквивалентно переформулировано как условие медленности этой релаксации. Последнее обстоятельство, а также устойчивость всего семейства вихревых решений позволяют предположить, что в этом случае релаксация будет происходить по решениям семейства, т. е. распределение спина в системе в каждый момент времени будет соответствовать вихрю с таким значением $\int dr \cos \beta$, чтобы величина $S \int dr \cos \beta$ оставалась постоянной, как этого требуют уравнения Леггетта. Поскольку, однако, каждый вихрь однозначно характеризуется не только полной составляющей направления намагниченности, но и своим значением разности частоты прецессии и ларморовской частоты (см. выше), релаксация в этом случае должна приводить к изменению со временем частоты прецессии.

В работе также исследовался стационарный перенос намагниченности по тонкому каналу, соединяющему два резервуара с ферми-жидкостью. Оказалось, что зависимость полярного угла от координаты вдоль канала в этом случае описывается уравнением Ньютона движения частицы в потенциальной яме с единственным минимумом. Роль времени играет координата вдоль канала. Спиновый ток через канал, разность «фаз» (т. е. азимутальных углов) на концах канала, а также точная форма потенциальной ямы зависят от одного параметра h . При фиксации определенных граничных условий на концах канала отсюда получается параметрическая зависимость тока через канал от разности фаз на концах.

Выбранные в работе граничные условия соответствовали тому, что движение в потенциальной яме должно начинаться и заканчиваться в одной и той же точке поворота. При этом на длине канала будет укладываться целое число периодов движения. Поэтому при фиксированном полярном угле β_0 в резервуарах токонесящие состояния могут возникать только при определенных дискретных значениях разности фаз, образующих

бесконечную последовательность, причем каждому из них соответствует свое значение тока. В общем случае ток как явная функция разности фаз не может быть выражен аналитически. Однако качественные черты этой зависимости такие же, как в более простом случае (который является также и предельным при больших h) равенства частоты прецессии ларморовской частоте, когда для протекания тока нужна разность фаз, кратная 2π , при этом

$$J^z \equiv \frac{w^2}{3\kappa} h = \frac{w^2}{3\kappa} \frac{2\pi n \sin \beta_0}{L}.$$

Из подобного рассмотрения выпадает только случай, когда β_0 соответствует минимуму потенциала (при данном h). В этом случае движение не обладает свойством периодичности — полярный угол постоянен вдоль канала (и совпадает с полярным углом в резервуарах). При этом оказывается, что образование токнесущего состояния возможно лишь при градиентах фазы, больших обратного характерного масштаба ξ^{-1} .

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке программы Министерства науки Российской Федерации «Статистическая физика», грантов Российского фонда фундаментальных исследований № 96-02-160416 и № 96-15-96632 (Государственная программа поддержки научных школ), а также Программы INTAS (грант 96-0610).

Литература

1. В. В. Дмитриев, И. А. Фомин, Письма в ЖЭТФ 59, 352 (1994).
2. В. В. Дмитриев, С. Р. Заказов, В. В. Мороз, Письма в ЖЭТФ 61, 309 (1995).
3. А. С. Боровик-Романов, Ю. М. Буньков, В. В. Дмитриев и др., ЖЭТФ 88, 2025 (1985).
4. И. А. Фомин, ЖЭТФ 88, 2039 (1985).
5. А. С. Боровик-Романов, Ю. М. Буньков, В. В. Дмитриев и др., Письма в ЖЭТФ 45, 98 (1987).
6. A. S. Borovik-Romanov, Yu. M. Bunkov, V. V. Dmitriev et al., Jap. J. Appl. Phys. 26, Suppl. 26-3, 175 (1987).
7. А. С. Боровик-Романов, Ю. М. Буньков, А. де Ваард и др., Письма в ЖЭТФ 47, 400 (1988).
8. A. S. Borovik-Romanov, Yu. M. Bunkov, V. V. Dmitriev et al., Physica B 165-166, 649 (1990).
9. И. А. Фомин, Письма в ЖЭТФ 45, 106 (1987).
10. И. А. Фомин, ЖЭТФ 94, 112 (1988).
11. А. А. Белавин, А. М. Поляков, Письма в ЖЭТФ 22, 503 (1975).
12. A. J. Leggett, J. Phys. C 3 448 (1970).
13. Ю. Г. Махлин, В. П. Минеев, ЖЭТФ 109, 441 (1996).
14. Справочник по специальным функциям, под ред. М. Абрамовица и И. Стиган, Наука, Москва (1979).