ЖЭТФ, 1998, том 114, вып. 5(11), стр. 1595–1617

САМОИНДУЦИРОВАННАЯ ПРОЗРАЧНОСТЬ МНОГОУРОВНЕВОЙ КВАНТОВОЙ СРЕДЫ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ПРЕДЕЛЬНО КОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ

А. Ю. Пархоменко[a], С. В. Сазонов[b]

[a] *Томский государственный университет*
634050, Томск, Россия
[b] *Калининградский государственный технический университет*
236000, Калининград, Россия

Поступила в редакцию 31 марта 1998 г.

Теоретически исследована самоиндуцированная прозрачность для предельно коротких импульсов (видеоимпульсов) в многоуровневой квантовой среде в условиях несправедливости метода медленно меняющихся амплитуд и фаз и сильного перекрытия квантовых переходов спектром импульса. Рассмотрен специальный класс переходов, имеющих один общий уровень. Показано, что динамика видеоимпульсов в такой среде описывается двойным уравнением синус-Гордона. Выявлены условия, при которых могут формироваться стационарные бегущие 0π-, 2π- и 4π-видеосолитоны. Установлено, что 4π-видеосолитоны могут распространяться как в равновесных, так и в некоторых неравновесных, а 0π-видеосолитоны — только в неравновесных средах. Исследованы процессы усиления в сильно неравновесных системах. Показано, что в зависимости от начального состояния среды могут формироваться растущие по амплитуде 2π- и $q\pi$-импульсы ($0 < q < 1$). Сделан вывод, что усиление предельно короткого импульса происходит как за счет роста плотности фотонов, так и за счет увеличения частоты каждого фотона. Исследована возможность формирования электромагнитного автосолитона в неравновесной диссипативной среде.

1. ВВЕДЕНИЕ

Явление самоиндуцированной прозрачности, обнаруженное и объясненное Мак-Коллом и Ханом в 1967 году [1], явилось мощным толчком в развитии нелинейной резонансной оптики для импульсов нано- и пикосекундной длительностей. В силу резонансного характера взаимодействия при теоретических исследованиях самоиндуцированной прозрачности использовалось приближение двухуровневой среды. Частота соответствующего перехода предполагалась равной или очень близкой к частоте заполнения оптического импульса. Кроме того, в волновых и материальных уравнениях использовалось ставшее затем традиционным приближение медленно меняющихся амплитуд и фаз [2]. Справедливости ради отметим, что в 70-х годах вышло несколько теоретических работ на данную тему, в которых отказались от приближения медленно меняющихся амплитуд и фаз [3–7]. Однако в то время такие работы представляли больше чисто теоретический интерес, так как не был преодолен фемтосекундный временной барьер для длительности импульсов. Возможности генерации в лабораторных условиях предельно коротких импульсов фемтосекундной длительности, вмещающих внутри себя порядка одного периода оптических колебаний [8–10], стимулировали дальнейшие теоретические исследования эффекта самоиндуцированной прозрачности без использования приближения медленно меняющихся амплитуд и фаз [11–13]. Так как предельно короткий импульс не является монохроматическим сигналом, для него невозможно ввести понятие огибающей, а потому упоминавшееся выше приближение медленно меняющихся амплитуд и фаз здесь нельзя применять в принципе. Приближение двухуровневой среды иногда продолжает оправдывать себя. Так, оно справедливо, если, например, рассматриваемая пара уровней значительно удалена от остальных квантовых уровней среды. Теоретические исследования распространения предельно короткого импульса в двухуровневых квантовых средах показали возможность образования в них электромагнитных видеосолитонов, т. е. солитонов без высокочастотного заполнения. В частности, в условиях сильного перекрытия спектром предельно короткого импульса рассматриваемого квантового перехода электрическое поле импульса (а не его огибающая) подчиняется уравнению синус-Гордона [14–16]. Хорошо известно, что в случае резонансной самоиндуцированной прозрачности огибающая электрического поля монохроматического импульса также подчиняется названному уравнению. В этой связи солитонные режимы распространения широкополосных предельно коротких импульсов в поглощающих средах при сильных их возбуждениях могут быть отнесены к явлению самоиндуцированной прозрачности по аналогии с соответствующим эффектом для монохроматических сигналов. Спектр предельно короткого импульса является достаточно широким, поэтому чаще во взаимодействие с ним может вовлекаться сразу несколько квантовых переходов.

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию эффекта самоиндуцированной прозрачности при распространении предельно короткого импульса в многоуровневых квантовых средах в условиях перекрытия всех разрешенных переходов спектром импульса.

2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Запишем систему материальных уравнений для элементов L_{mk} $(m, k = 1, 2, \ldots, N)$ матрицы плотности $\hat{L}$ N-уровневой среды в виде

$$\frac{\partial L_{mk}}{\partial t} = i\omega_{mk}\hat{L}_{mk} + i\left[\hat{L}, \hat{A}\right]_{mk}, \tag{1}$$

где $\omega_{mk} = -\omega_{km}$ — частота перехода между m- и k-уровнями.

Матрица перехода $\hat{A}$ представлена в виде

$$\hat{A} = \frac{1}{\hbar}\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{d}_{12}\mathbf{E} & \mathbf{d}_{13}\mathbf{E} & \ldots & \mathbf{d}_{1N}\mathbf{E} \\ \mathbf{d}_{21}\mathbf{E} & 0 & \mathbf{d}_{23}\mathbf{E} & \ldots & \mathbf{d}_{2N}\mathbf{E} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \\ \vdots & & & 0 & \mathbf{d}_{N-1,N}\mathbf{E} \\ \mathbf{d}_{N1}\mathbf{E} & \mathbf{d}_{N2}\mathbf{E} & \ldots & \mathbf{d}_{N,N-1}\mathbf{E} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Здесь $\hbar$ — постоянная Планка, $\mathbf{E}$ — электрическое поле предельно короткого импульса, $\mathbf{d}_{mk}$ $(k, m = 1, \ldots, N)$ — матричные элементы дипольных моментов разрешенных квантовых переходов. По повторяющимся индексам m и k в (1) суммирование не проводится.

Примем далее, что исходный импульс, подаваемый на среду, является линейно поляризованным. Очевидно, что по мере распространения в изотропной среде плоскость его поляризации изменяться не будет. В этом случае вектор наведенного дипольного момента коллинеарен электрическому полю предельно короткого импульса. Тогда матричные элементы $\mathbf{d}_{mk}$ и их проекции на направление $\mathbf{E}$ не зависят от времени. Описанная ситуация соответствует π-переходам, при которых не изменяется магнитное квантовое число, матричные элементы $\mathbf{d}_{mk}$ вещественны, а в силу свойств эрмитовости матрица перехода $\hat{A}$ симметрична ($A_{mk} = A_{km}$). С учетом сказанного перейдем от векторных величин $\mathbf{E}$ и $\mathbf{d}_{mk}$ к скалярным E и d_{mk}.

Для решения самосогласованной задачи о взаимодействии предельно короткого импульса со средой дополним систему материальных уравнений (1) волновым уравнением Максвелла, которое в силу коллинеарности электрического поля этого импульса и наведенного дипольного момента также запишем в скалярном виде:

$$\Delta E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \tag{3}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, c — скорость света в вакууме, P — поляризация среды из N-уровневых атомов, взаимодействующих с предельно коротким импульсом, определяющаяся соотношением

$$P = \sum_{m \neq k} d_{mk} L_{mk}. \tag{4}$$

Феноменологическая постоянная γ учитывает диссипацию, связанную с потерями за счет эффективной проводимости среды и рассеяния на квантовых уровнях, удаленных от рассматриваемых [17, 18].

Условие перекрытия спектром предельно короткого импульса всех разрешенных переходов формально может быть выражено в виде неравенства [14–16]

$$\omega_{mk}\tau_p \ll 1, \tag{5}$$

справедливого для любых m и k. Здесь τ_p — характерный временной масштаб предельно короткого импульса.

Условие (5) позволяет решать систему (1) методом последовательных приближений по параметрам ω_{mk} ($m, k = 1, \ldots, N$). Полагая в нулевом приближении $\omega_{mk} = 0$ для всех m и k, перепишем данную систему в виде

$$\frac{\partial \hat{L}^{(0)}}{\partial t} = i\left[\hat{L}^{(0)}, \hat{A}\right]. \tag{6}$$

Верхний индекс в скобках совпадает с порядком приближения по динамическому параметру $\omega_{mk}\tau_p$.

В общем случае анализ (6) представляется весьма сложным [19]. Однако при условиях, принятых в настоящей работе (независимость от времени и вещественность матричных элементов d_{mk}), матрица $\hat{A}$, как легко видеть, коммутирует со своим интегралом по времени, т. е. выполняется равенство

$$\left[\hat{A}(t), \int_{-\infty}^{t} \hat{A}(t')dt'\right] = 0. \tag{7}$$

Действительно, перепишем (7) в виде

$$\sum_k \left(\frac{\partial \theta_{mk}}{\partial t} \theta_{kn} - \theta_{mk} \frac{\partial \theta_{kn}}{\partial t} \right) = 0,$$

где

$$\theta_{mk} = 2 \int\limits_{-\infty}^{t} A_{mk} dt' = \frac{2d_{mk}}{\hbar} \int\limits_{-\infty}^{t} E\, dt'.$$

Отсюда с очевидностью следует равенство нулю каждого члена записанной здесь суммы.

При обязательном выполнении условия (7) (см. [19]) решение (6) может быть представлено в символической форме:

$$\hat{L}(t) = \exp\left(-i\hat{\theta}/2\right) \hat{L}(-\infty) \exp\left(i\hat{\theta}/2\right), \tag{8}$$

где

$$\hat{\theta} = 2 \int\limits_{-\infty}^{t} \hat{A}(t') dt',$$

$\hat{L}(-\infty)$ — матрица плотности среды до подачи на нее предельно короткого импульса:

$$\hat{L}(-\infty) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \rho_{22} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & \rho_{NN} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Для большей конкретности и в целях простоты ниже будут считаться разрешенными переходы, идущие только через общий для всех них уровень (рис. 1). Пусть порядковый номер этого уровня равен j. Тогда в симметричных матрицах $\hat{A}$ и $\hat{\theta}$ отличными от нуля будут лишь элементы j-ой строки и j-го столбца за исключением диагональных элементов A_{jj} и θ_{jj}. Существует множество физических реализаций данной модели. При $N = 3$ и $N = 4$ (N — общее число принимаемых во внимание квантовых уровней) она описывает оптические свойства широкозонных диэлектриков ($j = 2$ и $j = 1$ для $N = 3$, $j = 3$ для $N = 4$) [20–22]. Например, в случае $N = 4$ первый уровень соответствует электронным состояниям валентной зоны, второй — тем же электронным состояниям и возбужденным состояниям оптических колебаний кристаллической решетки, третий и четвертый уровень — подзонам зоны проводимости, соответственно сильно и слабо связанным с валентной зоной [22]. При $j = 1$ предложенная модель описывает непрямые межзонные переходы в многодолинных полупроводниках [23], электродипольные переходы между зеемановскими подуровнями в геометрии Фойгта, когда плоскость поляризации импульса и направление его распространения перпендикулярны внешнему магнитному полю [24]. Хорошо известен также кристалл Cu_2O, экситонный спектр которого соответствует четко выраженной серии переходов при $j = 1$ [25].

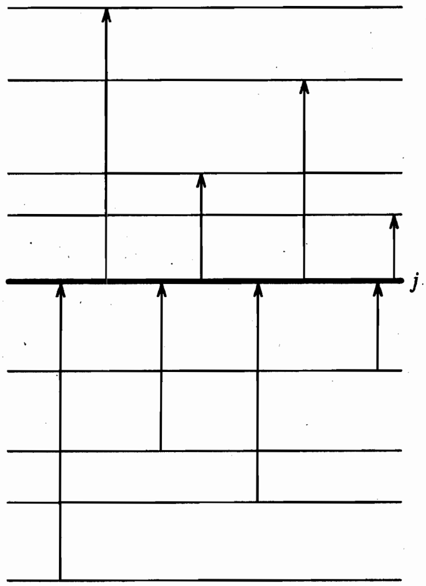

Рис. 1. Схема разрешенных квантовых переходов, имеющих один общий, j-й, уровень (выделен жирной линией). Общее число уровней произвольно

Если $j = N$, получаем, например, модели сред, способных к фосфоресценции [26]. В этом случае термодинамически устойчиво основное состояние, а состояние, соответствующее N-му уровню, неустойчиво, и все промежуточные состояния метастабильны. Фосфоресценция наблюдается на частотах, соответствующих переходам $N-1 \to 1$, $N-2 \to 1, \ldots, 2 \to 1$.

Кроме того, N-уровневая квантовая система с переходами, обладающими одним общим уровнем, представляет и самостоятельный интерес как одно из простейших обобщений двухуровневой системы в условиях спектрального перекрытия квантовых уровней полем предельно короткого импульса.

Легко видеть, что для матрицы $\hat{\theta}$, у которой отличны от нуля только элементы j-ой строки и j-го столбца за исключением элемента θ_{jj}, справедливы равенства

$$\hat{\theta}^{2n} = \hat{\theta}^2 \left(\sum_{i=1}^{N} \theta_{ij}^2 \right)^{n-1}, \quad \hat{\theta}^{2n-1} = \hat{\theta} \left(\sum_{i=1}^{N} \theta_{ij}^2 \right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{10}$$

После разложения $\exp(\pm i\hat{\theta}/2)$ в ряд Маклорена по степеням $(\pm i\hat{\theta})$ и суммирования данного ряда с использованием (10) находим

$$\exp(\pm i\hat{\theta}/2) = \hat{I} - \left(\hat{\theta}^2/\theta^2\right) (1 - \cos(\theta/2)) \pm i \left(\hat{\theta}/\theta\right) \sin(\theta/2), \tag{11}$$

где

$$\theta = 2 \left(\sum_{i=1}^{N} \theta_{ij}^2 \right)^{1/2} = \frac{2D_j}{\hbar} \int_{-\infty}^{t} E\, dt', \quad D_j = \left(\sum_{i=1}^{N} d_{ij}^2 \right)^{1/2},$$

$\hat{I}$ — единичная матрица.

Структура матрицы $\hat{\theta}^2$ такова (по j суммирования нет):

$$\left(\hat{\theta}^2\right)_{mn} = \theta_{mj}\theta_{jn} \quad \text{при} \quad m,n \neq j,$$

$$\left(\hat{\theta}^2\right)_{mj} = \left(\hat{\theta}^2\right)_{jm} = 0 \quad \text{при} \quad m \neq j,$$

$$\left(\hat{\theta}^2\right)_{jj} = \sum_{k=1}^{N} \theta_{jk}^2.$$

После подстановки (11) в (8) находим следующие элементы матрицы $L(t)$:

$$L_{jk}^{(0)} = i\frac{d_{jk}}{2D_j}\left(\left(\rho_{jj} - \frac{D_{j\rho}^2}{D_j^2}\right)\sin\theta + 2\left(\frac{D_{j\rho}^2}{D_j^2} - \rho_{kk}\right)\sin\frac{\theta}{2}\right), \quad k \neq j, \tag{12}$$

$$L_{jj}^{(0)} = \rho_{jj}\cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{D_{j\rho}^2}{D_j^2}\sin^2\frac{\theta}{2}, \tag{13}$$

$$L_{mk}^{(0)} = \rho_{mk} + \frac{d_{jm}d_{jk}}{D_j^2}\left(\rho_{jj}\sin^2\frac{\theta}{2} - 2(\rho_{mm} + \rho_{kk})\sin^2\frac{\theta}{4} + 4\frac{D_{j\rho}^2}{D_j^2}\sin^4\frac{\theta}{4}\right), \tag{14}$$

где

$$m,k \neq j, \quad D_{j\rho}^2 = \sum_{k=1}^{N} d_{jk}^2\rho_{kk}.$$

Полагая в (14) $m = k$, получаем выражение для населенности m-го квантового уровня. Соотношения (13), (14), как и следовало ожидать, удовлетворяют равенству

$$\sum_{m=1}^{N} L_{mm}^{(0)} = 1.$$

В первом приближении по параметру $\omega_{mk}\tau_p$ уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial L_{mk}^{(1)}}{\partial t} = i\omega_{mk}L_{mk}^{(0)} + i\left[\hat{L}^{(0)}, \hat{A}\right]_{mk}. \tag{15}$$

В рассматриваемом нами случае поляризация P представляется в виде

$$P = n\sum_{j=1}^{N} d_{jk}(L_{jk} + L_{kj}), \tag{16}$$

где n — концентрация N-уровневых атомов.

Используя (15), запишем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(L_{jk}^{(1)} + L_{kj}^{(1)}\right) = i\omega_{jk}L_{jk}^{(0)} + i\omega_{kj}L_{kj}^{(0)} +$$
$$+ i\sum_{m=1}^{N}\left(A_{jm}\left(L_{km}^{(0)} - L_{mk}^{(0)}\right) + A_{mk}\left(L_{mj}^{(0)} - L_{jm}^{(0)}\right)\right). \tag{17}$$

В силу эрмитовости матрицы плотности $L_{km}^{(0)} = L_{mk}^{(0)*}$ для любых m и k. Согласно (12) и (14) элементы $L_{jm}^{(0)}$ чисто мнимые, а L_{km} при $k, n \neq j$ вещественные. Кроме того, из-за рассматриваемой структуры переходов $A_{mk} = 0$ при $m, k \neq j$. Следовательно, выражение в фигурных скобках (17) обращается в нуль. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(L_{jk}^{(1)} + L_{kj}^{(1)}\right) = 2i\omega_{kj}L_{jk}^{(0)}.$$

Отсюда, а также из (16) и (12) находим

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 2in\sum_{k=1}^{N} d_{kj}\omega_{kj}L_{kj}^{(0)} = \frac{n}{D_j}\left(D_{j\omega}(\rho_{jj} - R_j)\sin\theta + 2(D_{j\omega}R_j - D_{j\omega\rho})\sin\frac{\theta}{2}\right), \qquad (18)$$

где

$$D_{j\omega} = \sum_{k=1}^{N} d_{kj}^2\omega_{kj}, \quad D_{j\omega\rho} = \sum_{k=1}^{N} d_{kj}^2\rho_{kk}\omega_{kj}, \quad R_j = \frac{D_{j\rho}^2}{D_j^2}. \qquad (19)$$

Подставляя (18) в (3), получим для электрического поля предельно короткого импульса двойное уравнение синус-Гордона с затуханием

$$\Delta\theta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{c^2}\frac{\partial\theta}{\partial t} = \alpha\sin\theta + \beta\sin\frac{\theta}{2}, \qquad (20)$$

где

$$\alpha = \frac{8\pi n}{\hbar c^2}D_{j\omega}(\rho_{jj} - R_j), \quad \beta = \frac{16\pi n}{\hbar c^2}(D_{j\omega}R_j - D_{j\omega\rho}). \qquad (21)$$

Из (19), (21) легко видеть, что в случае двухуровневой системы при $j = 1$

$$\beta = 0, \quad \alpha = -16\pi n d_{21}^2\omega_{21}W_\infty/\hbar c^2,$$

где $W_\infty = (\rho_{22} - \rho_{11})/2$ — начальная инверсия среды. Тогда (20) при $\gamma = 0$ переходит в уравнение синус-Гордона, найденное для этого случая в работах [14–16]. Заметим также, что $\beta = 0$ и в случае N-уровневой среды при условии, что $j = 1$ и до подачи на нее светового импульса заселен только основной уровень ($\rho_{11} = 1$).

Полагая в (21) $N = 3$ при $j = 2$ и $j = 3$, а также $N = 4$ при $j = 3$, приходим к выражениям для α и β, найденным в [27]. Заметим также, что двойное уравнение синус-Гордона возникает в теории самоиндуцированной прозрачности для двухуровневой среды с пятикратно вырожденным вторым уровнем при распространении в ней резонансного монохроматического импульса (при этом $\beta/\alpha = 1/2$) [28]. Ниже на основе уравнения (20) исследуем различные режимы распространения предельно коротких импульсов в многоуровневой квантовой среде.

3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ В РЕЖИМЕ СТАЦИОНАРНЫХ ИМПУЛЬСОВ

Пусть импульс распространяется вдоль оси z с постоянной скоростью v. В зависимости от начального состояния среды можно выделить три различных случая, допускающих распространение предельно короткого импульса в стационарных режимах в отсутствие диссипации ($\gamma = 0$).

1. $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Здесь решение (20) имеет вид

$$\theta = 4\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{1+\kappa^2}\,\mathrm{cosech}\,\xi\right), \tag{22}$$

$$E = \frac{2\hbar}{D\tau_p}\frac{\kappa\,\mathrm{sech}\,\xi}{1+\kappa^2\,\mathrm{sech}^2\,\xi}, \tag{23}$$

где

$$\xi = \frac{t - z/v}{\tau_p}, \quad \kappa = \left(\frac{2\alpha}{\beta}\right)^{1/2}.$$

При этом связь между скоростью v распространения импульса и его длительностью τ_p определяется соотношением

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{\beta}{2}(1+\kappa^2)\tau_p^2. \tag{24}$$

Из (13), (14) находим выражения для населенностей среды:

$$L_{jj} = \rho_{jj}\left(\frac{1+\kappa^2-\mathrm{sh}^2\,\xi}{\kappa^2+\mathrm{ch}^2\,\xi}\right)^2 + 4R_j\frac{(1+\kappa^2)\,\mathrm{sh}^2\,\xi}{(\kappa^2+\mathrm{ch}^2\,\xi)^2}, \tag{25}$$

$$L_{mm} = \rho_{mm}\left(1-\frac{4d_{mj}^2}{D_j^2}\frac{1+\kappa^2}{\kappa^2+\mathrm{ch}^2\,\xi}\right) + \frac{4d_{mj}^2}{D_j^2}\frac{\left((1+\kappa^2)R_j+\rho_{jj}\,\mathrm{sh}^2\,\xi\right)(1+\kappa^2)}{(\kappa^2+\mathrm{ch}^2\,\xi)^2}, \quad m \neq j. \tag{26}$$

В соответствии с (23) профиль электрического поля бегущего предельно короткого импульса имеет двугорбый вид (рис. 2). Расстояние между горбами $\tilde{\Delta} = 2\xi^*$ определяется из равенства

$$\mathrm{sech}\,\xi^* = 1/\kappa, \quad \kappa > 1.$$

Относительная глубина провала

$$\frac{E_{max}}{E_{min}} = \frac{1+\kappa^2}{2\kappa}.$$

Подчеркнем, что, в отличие от классического эффекта самоиндуцированной прозрачности, выражение (23) записано для электрического поля импульса, а не для его огибающей. В соответствии с этим здесь и ниже будем иногда называть предельно короткий импульс видеоимпульсом, а солитоноподобные решения самоиндуцированной прозрачности для предельно короткого импульса — $2\pi n$-видеоимпульсами ($n = 0, 1, 2$). Из (23) следует, что «площадь» сигнала (23)

$$\Phi \equiv \frac{2D}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} E\,dt = 4\pi,$$

поэтому он является 4π-видеоимпульсом.

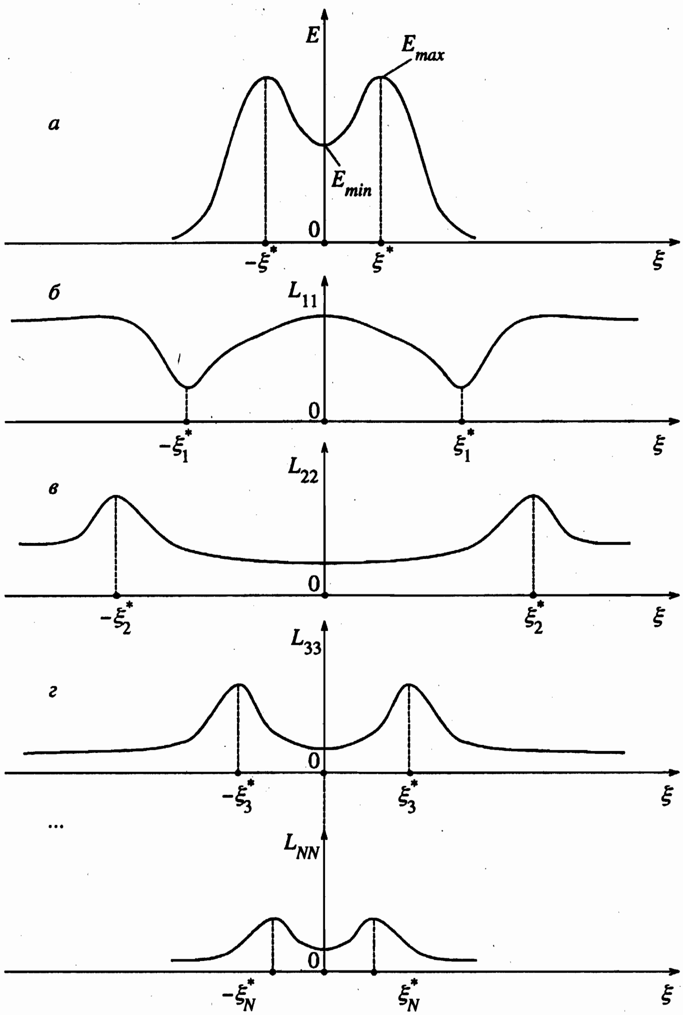

Рис. 2. Динамика электрического поля предельно коротких импульсов при распространении в термодинамически равновесной среде ($\alpha > 0$, $\beta > 0$) (*а*) и населенностей квантовых уровней (*б, в, г*) при $j = 1$

Условия $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ выполняются, например, для термодинамически равновесной среды при переходах между рассматриваемыми уровнями, образующими серию с $j = 1$. Проанализируем этот случай подробнее. До подачи импульса квантовые уровни такой среды заселены согласно больцмановскому распределению:

$$\rho_{kk} = \frac{1}{Z}\exp\left(-\frac{\hbar\omega_{k1}}{k_B T}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{27}$$

где

$$Z = \sum_{m=1}^{N} \exp(-\hbar\omega_{m1}/k_B T)$$

— статистическая сумма, k_B — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура. При этом выполняются очевидные неравенства $\rho_{11} > \rho_{22} > \rho_{33} > \ldots > \rho_{NN}$. При стремлении температуры среды T к абсолютному нулю $\kappa \to \infty$. Горбы импульса в этом случае расходятся на бесконечно большое расстояние друг от друга, а значение поля в месте провала равно нулю. Таким образом, 4π-видеоимпульс разбивается на два бесконечно удаленных друг от друга 2π-видеоимпульса, каждый из которых соответствует случаю $\beta = 0$. Тогда (20) переходит в уравнение синус-Гордона, 2π-видеоимпульс которого и соответствующие выражения для населенностей среды имеют вид

$$\theta = 4 \operatorname{arctg} \exp \frac{t - z/v}{\tau_p}, \tag{28}$$

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{c^2} + \alpha\tau_p^2, \tag{29}$$

$$E = \frac{\hbar}{D\tau_p} \operatorname{sech}\left(\frac{t - z/v}{\tau_p}\right), \tag{30}$$

$$L_{11} = \operatorname{th}^2\left(\frac{t - z/v}{\tau_p}\right), \tag{31}$$

$$L_{mm} = \frac{d_{mj}^2}{D_j^2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{t - z/v}{\tau_p}\right), \quad m = 2, 3, \ldots, N, \tag{32}$$

где τ_p — длительность предельно короткого импульса, выступающая в качестве свободного параметра решения.

В процессе распространения импульса (30) атомы сначала переводятся из основного состояния в возбужденные, а затем возвращаются обратно (см. (31), (32)). В этом случае динамика предельно короткого импульса является наиболее простой и мало чем отличается от соответствующей динамики в случае двухуровневой среды [14, 16]. Основное отличие состоит в том, что в нашем случае под действием предельно короткого импульса в той или иной степени заселяется много возбужденных состояний (см. (32)), а не одно, как в случае двухуровневой системы.

При изначальной заселенности высших уровней ($T \neq 0$) $\beta \neq 0$. Данное обстоятельство, как следует из (30), приводит к уменьшению скорости распространения предельно короткого импульса. Из приведенного анализа видно, что термодинамически равновесная заселенность возбужденных уровней связывает два 2π-видеоимпульса в один 4π-видеоимпульс, который в силу своей большей «инерционности» распространяется медленнее 2π-видеоимпульса (см. (19)), способного сформироваться в среде при сверхнизких температурах, когда $k_B R \ll \hbar\omega_{21}$.

На рис. 2 изображена динамика населенностей квантовых уровней равновесной среды при $T \neq 0$, сопровождающая распространение в последней предельно короткого импульса. Расстояние между динамическими минимумами L_{11} превышает расстояние между горбами предельно короткого импульса. Координаты ξ_1^* минимумов L_{11} определяются из условия

$$\operatorname{sh} \xi_1^* = \pm(1 + \kappa^2)^{1/2}.$$

Отсюда и из (25) находим минимальное значение населенности основного уровня $L_{11min} = R_1$. Таким образом, в процессе распространения 4π-видеоимпульса не происходит полного опустошения основного уровня. Динамический максимум L_{11} соответствует провалу в профиле электрического поля предельно короткого импульса ($\xi = 0$). В этой точке, как видно из (25), $L_{11} = \rho_{11}$. Таким образом, в процессе распространения 4π-видеоимпульса (24) среда дважды испытывает возбуждение и девозбуждение. Переход атомов из основного состояния в результате взаимодействия с импульсом (24) сопровождается увеличением населенностей возбужденных уровней. Положения соответствующих максимумов ξ_m^* ($m = 2, 3, \ldots, N$) определяются равенствами

$$\operatorname{sh} \xi_m^* = \pm \left(f_m(1 + \kappa^2)\right)^{1/2},$$

где

$$f_m = (\rho_{11} + \rho_{mm} - 2R_1)/(\rho_{11} - \rho_{mm}).$$

Так как

$$R_1 = D_\rho^2/D^2 < \rho_{22},$$

то

$$f_m > 1 - 2(\rho_{22} - \rho_{mm})/(\rho_{11} - \rho_{mm}), \quad m > 2.$$

Отсюда $f_2 > 1$. В то же время максимумы L_{mm} ($m > 2$) расположены ближе друг к другу и к центру провала предельно короткого импульса. Учитывая, что

$$\sum_{m=2}^{N} L_{mm} = 1 - L_{11},$$

приходим к выводу, что по мере роста номера уровня максимумы соответствующих населенностей монотонно сближаются (см. рис. 2). С повышением абсолютной температуры горбы предельно короткого импульса (23) начинают сближаться, что сопровождается уменьшением глубины провала. Если же температура среды настолько велика, что исходные населенности всех уровней практически выравниваются, то $\kappa^2 \to 1$. Тогда горбы предельно короткого импульса сливаются в один, что сопровождается исчезновением центрального провала. В этом случае, как следует из (28), (29), населенности всех уровней перестают испытывать динамику и мы приходим к хорошо известному в оптике эффекту «выжигания дыр» [2].

Условия $\alpha > 0$, $\beta > 0$ при $j = 1$ могут быть реализованы не только в случае термодинамически равновесной среды, для которой $\kappa > 1$ ($\kappa \to \infty$ при $T = 0$, $\kappa \to 1$ при $T \to \infty$). Случай $\kappa < 1$ при $\alpha > 0$, $\beta > 0$ соответствует слабонеравновесной среде. В этой ситуации центральный провал в профиле электрического поля, как и при $T \to \infty$, исчезает, а предельно короткий импульс имеет вид колоколообразного видеоимпульса с максимумом посередине.

2. $\alpha < 0$, $\beta > 0$. В этом случае решения для поля и населенностей получаются из (23)–(26) заменой

$$\kappa^2 \to -\kappa_1^2 = -2|\alpha|/\beta,$$

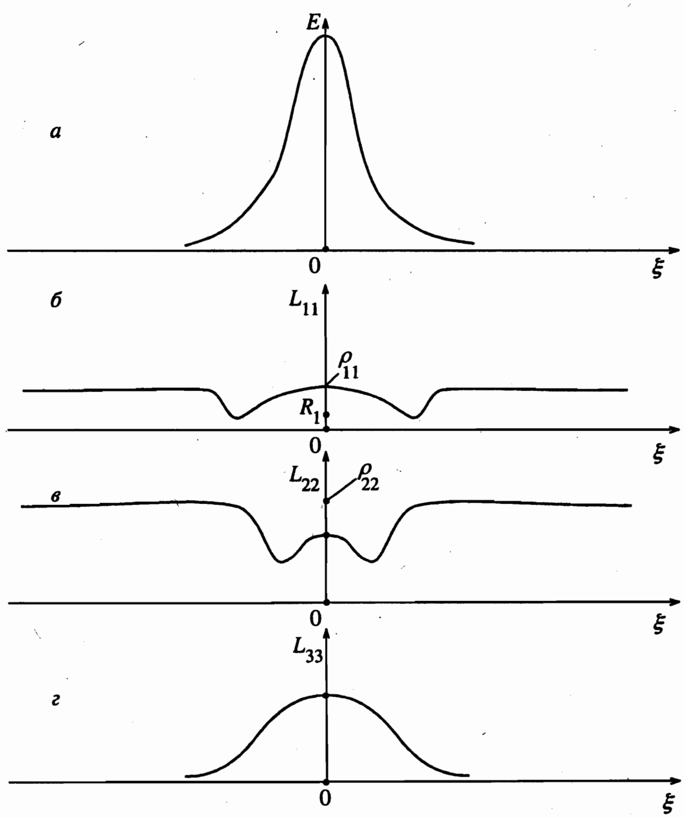

Рис. 3. 4π-видеоимпульс с заостренным гребнем в неравновесной трехуровневой среде (a) и соответствующая динамика населенностей (*б, в, г*) при ($\alpha < 0$, $\beta > 0$) и $j = 1$; принято, что $\rho_{33} = 0$, $\rho_{22} > \rho_{11}$

а на параметр κ_1 налагается ограничение $\kappa_1^2 < 1$. Электрическое поле предельно короткого импульса представляет собой 4π-видеоимпульс с заостренным гребнем (рис. 3). Из неравенств $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $\kappa_1 < 1$, а также из (21) находим условия на параметры среды до подачи на нее предельно короткого импульса:

$$\frac{D_{j\omega\rho}}{D_{j\omega}} < \rho_{jj} < R_j. \tag{33}$$

Анализ (33) представляется наиболее простым и наглядным для трехуровневой среды. Положим, кроме того, $j = 1$. Тогда условие $D_{j\omega\rho}/D_{j\omega} < R_1$ эквивалентно неравенству $\rho_{22} > \rho_{33}$. Полагая для простоты $\rho_{33} = 0$, находим

$$\frac{d_{21}^2\omega_{21}}{2d_{21}^2 + d_{31}^2\omega_{31}} < \rho_{11} < \frac{d_{21}^2}{2d_{21}^2 + d_{31}^2} < \frac{1}{2}.$$

Так как $\rho_{22} = 1 - \rho_{11}$ при $\rho_{33} = 0$, то

$$\frac{1}{2} < \frac{d_{21}^2 + d_{31}^2}{2d_{21}^2 + d_{31}^2} < \rho_{22} < \frac{d_{21}^2\omega_{21} + d_{31}^2\omega_{31}}{2d_{21}^2\omega_{21} + d_{31}^2\omega_{31}}.$$

Таким образом, $\rho_{22} > \rho_{11}$ и среда является неравновесной. Если к тому же $d_{31}^2 \gg d_{21}^2$, то условие неравновесности усиливается: $\rho_{22} \gg \rho_{11}$. Следовательно, стационарный 4π-видеоимпульс может сформироваться в сильно неравновесной среде с инверсной населенностью между первым и вторым уровнями. Несмотря на это среда остается поглощающей, так как согласно условию $d_{31}^2 \gg d_{21}^2$ переходы с первого уровня на третий идут интенсивнее, чем со второго уровня на первый. Именно поэтому в данной ситуации возможно формирование стационарных 4π-видеоимпульсов с заостренным гребнем, распространяющихся с досветовой скоростью (см. (24) с точностью до замены $\kappa^2 \to -\kappa_1^2$, $\kappa_1 < 1$, $\alpha < 0$).

Стационарный 4π-видеоимпульс может формироваться также и в равновесной среде, если общий для всех рассматриваемых квантовых переходов уровень не является основным, т. е. $j \neq 1$. Действительно, в этом случае при $T = 0$ ($\rho_{11} = 1$) условие $\kappa_1^2 > 1$ можно записать в виде

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{N} d_{kj}^2 \omega_{k1}}{\left|\sum\limits_{k=1}^{N} d_{kj}^2 \omega_{kj}\right|} > 1.$$

В то же время $\alpha < 0$, если

$$\sum_{k=1}^{N} d_{kj}^2 \omega_{kj} < 0.$$

Так как $\omega_{kj} < 0$ при $k < j$, то условие $\alpha < 0$ вполне может быть реализовано и в равновесной среде при $j \neq 1$. На рис. 3 представлена динамика населенностей квантовых уровней в неравновесной трехуровневой среде с $j = 1$ при распространении в ней стационарного 4π-видеоимпульса с заостренным гребнем.

3. $\alpha > 0, \beta < 0$. Соответствующее решение (20) для электрического поля предельно короткого импульса представляет собой бегущий стационарный 0π-видеоимпульс:

$$E = -\frac{2\hbar}{D_j \tau_p}\sqrt{\kappa_0^2 - 1}\,\frac{\operatorname{th}\xi\,\operatorname{sech}\xi}{1 + (\kappa_0^2 - 1)\operatorname{sech}^2\xi}, \tag{34}$$

где

$$\xi = \frac{t - z/v}{\tau_p}, \quad \kappa_0^2 = \frac{2\alpha}{|\beta|} > 1.$$

Скорость v 0π-видеоимпульса определяется соотношением

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{|\beta|}{2}(\kappa_0^2 - 1)\tau_p^2, \tag{35}$$

а динамика населенностей — выражениями вида

$$L_{jj} = \frac{\rho_{jj}\left[\operatorname{ch}^2\xi - (\kappa_0^2 - 1)\right]^2 + 4R_j(\kappa_0^2 - 1)\operatorname{ch}^2\xi}{(\kappa_0^2 + \operatorname{sh}^2\xi)^2}, \tag{36}$$

$$L_{mm} = \rho_{mm} + 4\frac{d_{mj}^2}{D_j^2}(\kappa_0^2 - 1)\frac{(\kappa_0^2 - 1)R_j + \rho_{jj}\,\mathrm{ch}^2\,\xi - \rho_{mm}}{(\kappa_0^2 + \mathrm{sh}^2\,\xi)^2}, \quad m \neq j. \tag{37}$$

С учетом (21) условия $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $\kappa_0^2 = 2\alpha/|\beta| > 1$ могут быть представлены следующим образом:

$$R_j < \frac{D_{j\omega\rho}}{D_{j\omega}} < \rho_{jj}. \tag{38}$$

Для $j = 1$ в трехуровневой системе из (38) находим, в частности, что $\rho_{33} > \rho_{22}$. Полагая затем $\rho_{22} = 0$, получаем

$$\rho_{11} > \frac{d_{31}^2}{2d_{31}^2 + d_{21}^2}, \quad \rho_{33} < \frac{d_{31}^2 + d_{21}^2}{2d_{31}^2 + d_{21}^2}.$$

В случае $d_{21}^2 \gg d_{31}^2$ последние неравенства принимают вид

$$\rho_{11} > \left(\frac{d_{31}}{d_{21}}\right)^2, \quad \rho_{33} < 1 - \left(\frac{d_{31}}{d_{21}}\right)^2.$$

Данные условия могут быть выполнены в том числе при $\rho_{33} > \rho_{11}$.

Заметим, что в процессе распространения в такой среде передний фронт 0π-видеоимпульса уменьшает населенность лишь основного состояния (рис. 4). Тем самым, будучи неравновесной, среда при $\kappa_0^2 > 1$ продолжает оставаться поглощающей. Средняя же часть импульса ($E = 0$) восстанавливает исходную населенность основного состояния и уменьшает населенность третьего уровня, переводя часть атомов на средний уровень. Из (21) и (27) получаем, что в случае термодинамического равновесия

$$\beta = \frac{16\pi n}{\hbar c^2 D_j^2 Z}\sum_{k>m} d_{kj}^2 d_{mj}^2 \omega_{km}\left[\exp\left(-\frac{\hbar\omega_{mj}}{k_B T}\right) - \exp\left(-\frac{\hbar\omega_{kj}}{k_B T}\right)\right] \geq 0.$$

Условие $\beta < 0$ не выполняется, поэтому 0π-видеоимпульсы могут формироваться только в неравновесной среде.

4. УСИЛЕНИЕ

Пусть теперь условия на коэффициенты α и β, рассмотренные в предыдущем разделе, не выполняются. Тогда в отсутствие диссипации неравновесная среда будет необратимо передавать часть своей энергии оптическому импульсу, усиливая последний. Ниже исследуем особенности данного усиления.

При $\gamma = 0$ уравнение (20) имеет гамильтоново представление:

$$\frac{\partial\tilde{P}}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta\theta}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\tilde{P}},$$

где

$$H = \int \mathscr{H} d^3r,$$

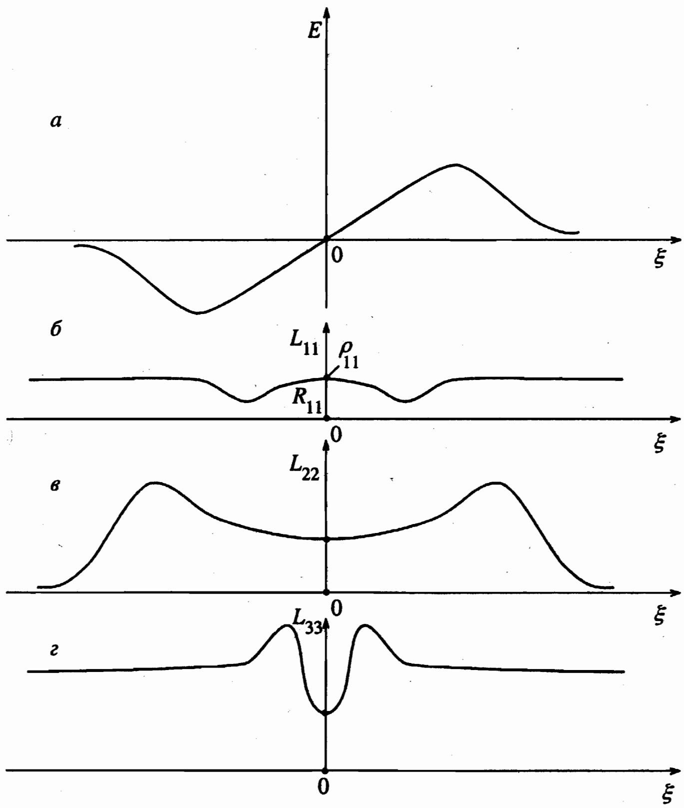

Рис. 4. Динамика электрического поля предельно коротких импульсов при распространении в трехуровневой неравновесной среде (*а*) и населенностей квантовых уровней (*б, в, г*) при ($\alpha > 0$, $\beta < 0$) и $j = 1$; принято, что $\rho_{22} = 0$, $\rho_{33} > \rho_{11}$

а плотность гамильтониана имеет вид

$$\mathscr{H} = \frac{c^2}{2}\tilde{P}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\theta)^2 - \alpha\cos\theta - 2\beta\cos\frac{\theta}{2}. \tag{39}$$

«Вакуумные» значения θ ($\theta = \mathrm{const}$), минимизирующие $\mathscr{H}$, находятся из условия минимума функции

$$-\left(\alpha\cos\theta + 2\beta\cos(\theta/2)\right).$$

Возможные площади распространяющихся импульсов равны этим «вакуумным» значениям θ_v. Так, в режимах стационарных распространений, исследованных в предыдущем разделе, $\theta_v = 4\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) при $\beta \neq 0$. Очевидно, что и в режимах усиления площадь предельно короткого импульса также определяется значениями θ_v. Например, в случае двухуровневой среды ($\beta = 0$) при $\alpha < 0$, $\theta_v = \pi$ (см. (39)), что совпадает с выводом работ [14, 16]. В нашем случае режим усиления возникает при трех условиях на коэффициенты α и β.

1. $\alpha < 0$, $\beta < 0$. Здесь при $\kappa \equiv (2\alpha/\beta)^{1/2} > 1$ плотность гамильтониана $\mathscr{H}$ имеет

минимум при θ_m, определяемом соотношением

$$\cos(\theta_v/2) = -\kappa^{-1}.$$

Если же $\kappa < 1$, значение $\mathscr{H}$ минимально при $\theta_v = 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Пусть на среду подается предельно короткий импульс малой площади

$$\Phi \equiv \frac{2D_j}{\hbar} \int\limits_{-\infty}^{\infty} E\, dt'.$$

В первом случае ($\kappa > 1$) он будет усиливаться с одновременным возрастанием площади Φ до значения $\theta_v = 2\arccos(\kappa^{-1})$. Ясно, что данная площадь может меняться в интервале от $\Phi = 0$ ($\kappa = 1$) до $\Phi = \pi$ ($\kappa = \infty$) и равняться $q\pi$, где q — в общем случае иррациональное число, удовлетворяющее условию $0 < q < 1$. В этой связи назовем данный усиливающийся сигнал иррациональным. При $\kappa < 1$ предельно короткий импульс в процессе усиления обращается в нестационарный, растущий по амплитуде 2π-видеоимпульс. Населенности уровней после прохождения через среду $q\pi$- и 2π-видеоимпульсов найдутся из (13), (14) при $\theta = q\pi$ и $\theta = 2\pi$ соответственно.

2. $\alpha < 0$, $\beta > 0$. Усиление возможно, если

$$\kappa_1 \equiv \left(2|\alpha|/\beta\right)^{1/2} > 1,$$

так как при $\kappa_1 < 1$ формируются стационарные 4π-видеоимпульсы с заостренным гребнем (см. предыдущий раздел). Плотность гамильтониана $\mathscr{H}$ минимальна при $\theta_v = q\pi$, где $q = \pi^{-1}\arccos(\kappa_1^{-1})$. Значение же $\theta_v = 2\pi$ соответствует максимуму $\mathscr{H}$, поэтому выпадает из нашего рассмотрения. Полагая в (13), (14) $\theta = q\pi$, находим населенности уровней после прохождения усиливающегося $q\pi$-видеоимпульса.

3. $\alpha > 0$, $\beta < 0$. Рассуждая аналогично двум предыдущим случаям, приходим к выводу, что исходный сигнал усиливается при условии

$$\kappa_0 \equiv (2\alpha/|\beta|)^{1/2} < 1.$$

Предельная площадь видеоимпульса равна 2π. Соответственно, конечные населенности находятся из (13), (14) при $\theta = 2\pi$.

Исследуем теперь динамические особенности усиления предельно короткого импульса в пространственно одномерном случае. Следуя [14, 16], введем автомодельную переменную $\eta = z^2 - c^2t^2$. Тогда уравнение (20) при $\gamma = 0$ примет вид

$$\eta\theta'' + \theta' = \frac{\alpha}{4}\sin\theta + \frac{\beta}{4}\sin\frac{\theta}{2}, \tag{40}$$

где «штрих» над θ обозначает производную по переменной η.

Пусть решением (40) является некая функция $\theta(\eta)$. Тогда электрическое поле предельно короткого импульса

$$E = -\frac{\hbar c^2}{D_j}\, t\theta'(\eta), \tag{41}$$

т. е. амплитуда сигнала растет пропорционально времени t. Так как в пределе площадь предельно короткого импульса достигает своего максимального значения и затем перестает расти, усиление этого импульса сопровождается его самосжатием. При этом длительность сигнала $\tau_p \sim t^{-1}$. Следуя [29], положим в (40) $\theta = \theta_v + \varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$). В результате сведем данное уравнение к виду

$$\eta\varepsilon'' + \varepsilon' = \mu\varepsilon, \tag{42}$$

где для 2π-импульса

$$\mu = \frac{\alpha}{4}\left(1 - \frac{\beta}{2\alpha}\right) > 0,$$

а для $q\pi$-импульса ($0 < q < 1$)

$$\mu = -\frac{\alpha}{4}\left(1 - \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2\right) > 0.$$

Решение (42) в переменных z и t имеет вид

$$\varepsilon \sim J_0\left(2\sqrt{\mu(c^2t^2 - z^2)}\right), \quad ct > |z|,$$

$$\varepsilon \sim K_0\left(2\sqrt{\mu(z^2 - c^2t^2)}\right), \quad ct < |z|.$$

Для электрического поля предельно короткого импульса имеем

$$E \sim \frac{t}{\sqrt{c^2t^2 - z^2}} J_1\left(2\sqrt{\mu(c^2t^2 - z^2)}\right), \quad ct > |z|, \tag{43}$$

$$E \sim \frac{t}{\sqrt{z^2 - c^2t^2}} K_1\left(2\sqrt{\mu(z^2 - c^2t^2)}\right), \quad ct < |z|, \tag{44}$$

где $J_1(x)$, $K_1(x)$ — функции Бесселя и Макдональда первого порядка соответственно. Отсюда и из (13), (14) следует, что по прошествии заднего фронта усиливающегося сигнала значения населенностей квантовых уровней атомов колеблются около своих квазиравновесных значений $L_{jj}(\theta_v)$ и $L_{mm}(\theta_v)$ ($m \neq j$). Причем амплитуда этих колебаний затухает согласно асимптотическому поведению функции Бесселя. Электрическое же поле импульса при $ct > |z|$ меняется в режиме затухающих колебаний, а при $ct < |z|$ быстро (практически экспоненциально) уменьшается до нуля.

Исследуем подробнее два предельных случая: $|\alpha| \gg |\beta|$, $|\alpha| \ll |\beta|$. Тогда (20) при $\gamma = 0$ переходит в обычное уравнение синус-Гордона. Соответствующее этим случаям уравнение (40) имеет решения для E, отличные от нуля главным образом при $\eta = 0$ [14, 16, 28]. Следовательно, в окрестности этого главного максимума можно пренебречь слагаемым $\eta\theta''$ в (40) и записать приближенные решения для поля в окрестности $z = ct$:

$$E = \lambda\frac{\hbar\omega(z)}{D_j}\,\mathrm{sech}\left[\omega(z)\left(t - \frac{z}{c}\right)\right], \tag{45}$$

где $\omega(z) = |\alpha|cz/2$, $\lambda = 1/2$ при $|\alpha| \gg |\beta|$; $\omega(z) = |\beta|cz/4$, $\lambda = 1$ при $|\beta| \gg |\alpha|$.

Полагая в (43) $z^2 - c^2t^2 \approx 2z(z - ct)$, получим поведение электрического поля вне главного максимума:

$$E \sim z\frac{J_1\left(2\sqrt{\omega(z)(t - z/c)}\right)}{2\sqrt{\omega(z)(t - z/c)}}. \tag{46}$$

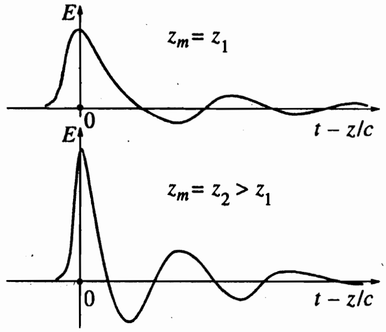

Рис. 5. Профили электрического поля предельно коротких импульсов в неравновесной усиливающей среде, описываемые (45) и (46), при двух последовательных значениях координаты z_m главного максимума (крайний слева) $z_m = z_1$ и $z_m = z_2 > z_1$. Усиление сопровождается увеличением частоты фотонов импульса и их плотности

На рис. 5 изображены профили электрического поля предельно короткого импульса для двух последовательных значений координат $z_m = z_1$ и $z_m = z_2 > z_1$ главного максимума.

Из (45) и (46) видно, что линейно растущую с пройденным расстоянием функцию $\omega(z)$ можно рассматривать как частоту фотонов данного импульса. Частота и амплитуда поля, как следует из (45), растут пропорционально z. Интенсивность импульса I можно представить как

$$I \sim E^2 \sim n_{ph}\hbar\omega,$$

где n_{ph} — плотность импульсных фотонов. Так как $E \sim z$ и $\omega \sim z$, заключаем, что и $n_{ph} \sim z$. Следовательно, усиление предельно короткого импульса при $\omega \gg |\omega_{mj}|$ происходит как за счет увеличения частоты каждого фотона, так и за счет роста плотности фотонов. Причем оба эти параметра растут пропорционально пройденному импульсом пути. Данный результат уточняет вывод работ [14, 16], где утверждалось, что предельно короткий импульс усиливается лишь за счет роста частоты фотонов.

Последнее утверждение абсолютно справедливо при взаимодействии предельно короткого импульса с ВКР-переходами, которые индуцируются квадратом поля, а не самим полем [30].

5. АВТОСОЛИТОН В НЕРАВНОВЕСНОЙ СРЕДЕ

Пусть предельно короткий импульс распространяется в неравновесной среде при наличии в последней диссипации ($\gamma \neq 0$). Тогда энергия, передаваемая возбужденными атомами полю импульса за счет индуцированных переходов, может необратимо диссипировать в среде за счет посторонних потерь, определяемых параметром γ. При компенсации друг другом этих двух противоположных процессов может возникнуть устойчивое образование типа автосолитона [18, 31]. После прохождения автосолитона среда не возвращается в исходное состояние, как это происходит в консервативной среде. В диссипативной среде не выполняется закон сохранения энергии для системы «N-уровневые атомы + электромагнитное поле импульса». Поэтому атомы не успевают возвратиться в исходные квантовые состояния, необратимо отдавая часть запаса своей энергии другим компонентам среды.

Будем искать решение (20) в виде бегущей вдоль оси z волны:

$$\theta = \theta(t - z/v).$$

Тогда получим

$$\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{c^2}\right)\ddot{\theta}-\frac{\gamma}{c^2}\dot{\theta}=\alpha\sin\theta+\beta\sin\frac{\theta}{2}, \tag{47}$$

где точка над θ обозначает производную по переменной $t - z/v$.

Теперь выберем следующий анзац [31]:

$$\dot{\theta}=\frac{4}{\tau_p}\sin\frac{\theta}{2}. \tag{48}$$

Отсюда

$$\ddot{\theta}=\frac{4}{\tau_p^2}\sin\theta.$$

Подставляя последнее выражение и (48) в (47), после приравнивания друг другу соответственно коэффициентов при $\sin\theta/2$ и $\sin\theta$ найдем

$$\tau_p=-\frac{4\gamma}{\beta c^2},\quad \frac{1}{v}=\frac{1}{c}\sqrt{1+\alpha\left(\frac{2\gamma}{\beta c}\right)^2}. \tag{49}$$

Интегрируя (48), получаем выражение для электрического поля автосолитона как $E = (\hbar/2D_j)\partial\theta/\partial t$:

$$E=\frac{\hbar}{D_j\tau_p}\,\mathrm{sech}\left(\frac{t-z/v}{\tau_p}\right). \tag{50}$$

Автосолитон (50) представляет собой однополярный видеоимпульс. Для его устойчивости необходимо выполнение условия $E > 0$. В противном случае векторы E и d_{mj} $(m \neq j)$ были бы направлены в противоположные стороны, что противоречит принципу устойчивости состояния с минимальной энергией. Тогда из (50) заключаем, что $\tau_p > 0$, откуда $\beta < 0$. Кроме того, решение (50) имеет физический смысл, если $v < c$. Следовательно (см. (49)), $\alpha > 0$. Таким образом, автосолитон вида (50) может сформироваться только в такой неравновесной среде, для которой $\alpha > 0$ и $\beta < 0$. Напомним, что в этом случае при отсутствии диссипации формируется либо 0π-видеоимпульс ($\kappa_0 = (2\alpha/|\beta|)^{1/2} > 1$), либо идет процесс усиления и самосжатия импульса с предельной площадью, равной 2π ($\kappa_0 < 1$). Площадь автосолитона (50) $\Phi = 2\pi$. Однако для его формирования, как видно из (49), на параметр κ_0 не требуется накладывать никаких ограничений. Есть, тем не менее, одно важное ограничение на параметр γ, обусловленное неравенством (5). Из (21) получаем, что

$$|\beta| \sim 16\pi n d^2\omega_0/\hbar c^2,$$

где d и ω_0 — характерные величины дипольного момента и частоты переходов соответственно. Тогда из (5) и (49) находим

$$\gamma \ll 4\pi d^2 n/\hbar.$$

Подставляя сюда $d \sim 5\cdot10^{-18}$ абс. ед., $n \sim 10^{21}$ см$^{-3}$, получим $\gamma \ll 10^{14}$ с$^{-1}$.

Рассмотрим один из возможных процессов формирования автосолитона. Пусть выполняется условие $\kappa_0 < 1$. Тогда усиление главного пика 2π-видеоимпульса типа (45) и его самосжатие должны замедляться за счет диссипации до тех пор, пока не наступит стабилизация с одновременным уменьшением скорости распространения.

Исследуем теперь процессы, происходящие на фронтах импульса. После линеаризации (20) с помощью подстановки

$$\theta = 2\pi + \varepsilon \quad (\varepsilon \ll 1)$$

и замены

$$\varepsilon = \psi(\mathbf{r}, t)\exp(-\gamma t/2)$$

сведем данное уравнение к виду

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 4\tilde{\mu}\psi,$$

где

$$\tilde{\mu} = \mu - \gamma^2/16c^2, \quad \mu = (\alpha/4)(1 + |\beta|/2\alpha) > 0.$$

После введения автомодельной переменной $\eta = z^2 - c^2t^2$ (см. предыдущий раздел) найдем в пространственно одномерном случае

$$E \propto t\exp(-\gamma t/2)J_1\left(2\sqrt{\zeta}\right),$$

где $\zeta = \tilde{\mu}(c^2t^2 - z^2)$.

При $\zeta > 0$ присутствующие на «хвостах» осцилляции сначала растут по амплитуде пропорционально t, а затем гасятся затухающей экспонентой и при $t \to \infty$ исчезают вовсе. При $\zeta < 0$ функция Бесселя $J_1(2\sqrt{\zeta})$ переходит в функцию Макдональда, экспоненциально затухающую с ростом аргумента $|\zeta|$. Здесь также первоначальное усиление ($\propto t$) сменяется затуханием. Таким образом, в результате сглаживания «хвостов» и стабилизации главного пика формируется автосолитон вида (50).

Динамику населенностей квантовых уровней при прохождении автосолитона можно легко проследить, подставив (50) в (13) и (14). Мы здесь, однако, определим лишь конечные населенности, положив в (13), (14) $\theta = 2\pi$. Тогда

$$L_{jj} = \rho_{jj}, \quad L_{mm} = \left(1 - 4\frac{d_{mj}^2}{D_j^2}\right)\rho_{mm} + 4\frac{d_{mj}^2}{D_j^2}R_j, \quad m \neq j.$$

Таким образом, населенность общего для всех переходов j-го уровня возвращается к своему исходному значению. Населенности же всех остальных уровней изменяются необратимо. В результате получаем, что при прохождении автосолитона в неравновесной среде состояние последней изменяется. В этом состоит принципиальное отличие автосолитона от солитона в консервативной среде, после прохождения которого последняя возвращается к своему исходному состоянию (см. разд. 3). Другое важное отличие автосолитона (50) от видеоимпульсов, рассмотренных в разд. 3, состоит в том, что у первого отсутствуют свободные параметры. Согласно (49), (50), его амплитуда, скорость и длительность жестко определяются параметрами среды. Данное обстоятельство связано с тем, что в диссипативной среде импульс теряет информацию о своих начальных условиях, в пределе при $t \to \infty$ «забывая» о них. Этого нельзя сказать о солитонах в консервативной среде, где информация о начальных (граничных) условиях сохраняется, а потому в решениях содержится минимум по одному свободному параметру.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящей работе исследованы различные режимы распространения предельно коротких импульсов в многоуровневых квантовых средах в условиях перекрытия исследуемых квантовых переходов спектром этих импульсов. Рассмотрен специальный, хотя и достаточно широкий, класс переходов, для которых общим является один из квантовых уровней. Из-за спектрального перекрытия всех квантовых переходов полем предельно короткого импульса взаимодействие в этом случае условно можно считать резонансным. Действительно, так как спектр предельно короткого импульса значительно перекрывает частоты исследуемых переходов, в нем всегда найдутся спектральные компоненты, резонансные всем рассматриваемым переходам. По этой же причине неоднородное уширение не может играть здесь большой роли, так как спектральное перекрытие имеет место и при наличии данного уширения [32]. В результате приходим к выводу, что для предельно коротких импульсов, удовлетворяющих условию (5), равновесная поглощающая среда становится нелинейно прозрачной в том смысле, что возбудившись передним фронтом этого импульса, атомы среды переводятся в исходное состояние его задним фронтом, отдавая всю поглощенную вначале энергию обратно полю. Несмотря на схожесть с механизмом возбуждения—девозбуждения среды, в случае самоиндуцированной прозрачности для монохроматических резонансных импульсов имеются все-таки и существенные внешние различия. Пожалуй, главное из них заключается в разности скоростей видеосолитона предельно короткого импульса и солитона огибающей монохроматического сигнала. Из (24), (35) и (21) следует оценка для скоростей предельно коротких импульсов:

$$v \sim c\Big/\sqrt{1 + (8\pi d^2 n/\hbar\omega_0)(\omega_0\tau_p)^2}.$$

Для достаточно широкого класса сред, не испытывающих сверхизлучательного фазового перехода, $8\pi d^2 n/\hbar\omega_0 < 1$ [33, 34]. Тогда в силу неравенства (5) получаем $v \leq c$. Таким образом, скорость широкополосного предельно короткого импульса в поглощающей среде лишь незначительно меньше скорости света в вакууме. Скорость же резонансных солитонов огибающей в 10^2–10^3 раз меньше c [2]. По причине того что все переходы, в отмеченном выше смысле, являются резонансными, в данном случае, по-видимому, не может быть получена «теорема площадей», позволяющая анализировать изменения площади предельно короткого импульса при его распространении в поглощающей среде [2, 28]. Вместо этого может использоваться анализ на основе минимизации гамильтониана, предложенный в разд. 4.

В настоящей работе рассмотрен случай π-переходов, для которых матрица $\hat{A}$ (см. (2)) является вещественной. В то же время магнитное вращение плоскости поляризации световой волны объясняется σ-переходами, для которых матрица $\hat{A}$ комплексна. Данные переходы осуществляются из основных зеемановских подуровней s-состояния на вышележащие зеемановские подуровни p-состояний ($j = 1$). Поэтому представляет интерес обобщить исследованную нами задачу на случай σ-переходов. Тем самым может быть исследовано фарадеевское вращение плоскости поляризации предельно короткого импульса при произвольных начальных заселенностях возбужденных зеемановских подуровней. В работе [35] данный эффект исследован при их нулевой начальной заселенности.

Отметим, что для импульсов с вращающейся плоскостью поляризации не выполняется условие (7). Поэтому в данном случае решение (8) несправедливо, и необходимо использовать другие методы для разрешения материальных уравнений (6). Общее решение материального уравнения (1) при произвольной структуре матрицы $\hat{A}$ даже в условиях спектрального перекрытия наталкивается на большие математические трудности. Поэтому исследование взаимодействия предельно короткого импульса с многоуровневыми квантовыми системами при произвольных переходах между уровнями является непростой задачей. Приближение (5) имеет реальный смысл при условии, что перекрываемые квантовые уровни значительно удалены от остальных уровней дискретного спектра среды. В противном случае необходимо было бы учитывать процессы перехода в непрерывный спектр, т. е. ионизацию, что значительно усложнило бы задачу. Поэтому возникает вопрос корректного учета влияния удаленных уровней дискретного спектра, не перекрывающихся спектром предельно коротких импульсов. В этом случае все квантовые переходы разбиваются на две группы, образуемые соответственно переходами, перекрывающимися и неперекрывающимися спектром предельно коротких импульсов. Последние образуют область линейной прозрачности. В работе [36] такие две группы переходов рассматривались в качестве независимых подсистем (колебательных и электронных). Решение же задачи в случае возможности квантовых переходов между указанными двумя группами уровней позволит сделать важное обобщение и значительно продвинуться в данном направлении исследований.

Литература

1. S. L. McCall and E. L. Hahn, Phys. Rev. Lett. **18**, 908 (1967).
2. Л. Аллен, Дж. Эберли, *Оптический резонанс и двухуровневые атомы*, Мир, Москва (1978).
3. R. K. Bullough and F. Ahmad, Phys. Rev. Lett. **27**, 330 (1971).
4. C. T. Lee, Optics Commun. **9**, 1 (1973).
5. P. J. Caudrey, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, and R. K. Bullough, J. Phys. A **6**, L53 (1973).
6. J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, P. J. Caudrey, and R. K. Bullough, J. Phys. A **6**, 1337 (1973).
7. J. D. Gibbon, P. J. Caudrey, R. K. Bullough, and J. C. Eilbeck, Lettre at Nuovo cimento **8**, 775 (1973).
8. D. H. Auston, K. P. Cheung, I. A. Valdmanis, and D. A. Kleinmann, Phys. Rev. Lett. **53**, 1555 (1984).
9. J. T. Darrow, B. B. Hu, X. C. Chang, and D. H. Auston, Opt. Lett. **15**, 323 (1990).
10. P. C. Becker, H. L. Fragnito, J. Y. Bigot, C. H. Brito-Crus, and C. V. Shank, Phys. Rev. Lett. **63**, 505 (1989).
11. A. Kujawski, Z. Phys. B: Condens. Matter **66**, 271 (1987).
12. A. Kujawski, Z. Phys. B: Condens. Matter **85**, 129 (1991).
13. А. В. Андреев, ЖЭТФ **108**, 796 (1995).
14. Э. М. Беленов, П. Г. Крюков, А. В. Назаркин, А. Н. Ораевский, А. В. Усков, Письма в ЖЭТФ **47**, 442 (1988).
15. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, Письма в ЖЭТФ **51**, 252 (1990).
16. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, В. А. Ущаповский, ЖЭТФ **100**, 762 (1991).
17. Р. Пантелл, Г. Путхоф, *Основы квантовой электроники*, Мир, Москва (1972).
18. С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **53**, 400 (1991).
19. И. А. Лаппо-Данилевский, *Применение матричных функций к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений*, Гостехиздат, Москва (1957).
20. R. Braunstein, Phys. Rev. **125**, 475 (1962).
21. R. Braunstein and N. Ockman, Phys. Rev. A **134**, 499 (1964).
22. Г. Б. Альтшулер, Опт. и спектр. **55**, 83 (1983).

23. Ф. Бассани, Дж. Пастори Парравичини, *Электронные состояния и оптические переходы в твердых телах*, Наука, Москва (1982).
24. Е. Б. Александров, В. С. Запасский, *Лазерная магнитная спектроскопия*, Наука, Москва (1986).
25. Ч. Киттель, *Введение в физику твердого тела*, Физматлит, Москва (1963).
26. Д. Н. Клышко, *Физические основы квантовой электроники*, Наука, Москва (1986).
27. L. S. Yakupova, in: *Nonlinear Evolution Equation and Dynamical Systems*, 8-th Intern. Workshop, Dubna, 1992, p. 432, World Scientific, Singapore (1993).
28. Дж. Лэм, *Введение в теорию солитонов*, Мир, Москва (1983).
29. С. В. Сазонов, Е. В. Трифонов, ЖЭТФ **103**, 1527 (1993).
30. Э. М. Беленов, П. Г. Крюков, А. В. Назаркин, И. П. Прокопович, ЖЭТФ **105**, 28 (1994).
31. S. V. Sazonov, J. Phys.: Condens. Matter **7**, 175 (1995).
32. S. V. Sazonov and E. V. Trifonov, J. Phys. B **27**, L7 (1994).
33. А. В. Андреев, В. И. Емельянов, Ю. А. Ильинский, *Кооперативные явления в оптике*, Наука, Москва (1988).
34. С. В. Сазонов, Изв. АН, сер. физ. **62**, 430 (1998).
35. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **107**, 20 (1995).
36. С. А. Козлов, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **111**, 404 (1997).