

ПОГЛОЩЕНИЕ И ДИСПЕРСИЯ СКОРОСТИ ЗВУКА В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ЖИДКОСТЬ–ГАЗ: РЕНОРМГРУППОВОЙ РАСЧЕТ В ДВУХПЕТЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Л. Ц. Аджемян*, А. Н. Васильев†, А. В. Сердюков‡

Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 23 марта 1998 г.

С помощью метода ренормгруппы во втором порядке ϵ -разложения рассчитаны сингулярные части поглощения и дисперсии скорости звука на критической изохоре выше T_c . Для исследуемых величин использовано выражение через функцию отклика на вариацию температуры в рамках H -модели Гальперина–Хозенберга–Сиджи. Полученные результаты сравниваются с экспериментальными данными.

1. ВВЕДЕНИЕ

Критическая точка жидкость–газ относится к классу фазовых переходов с сохраняющимся параметром порядка. Динамические критические эффекты проявляются для таких систем через аномальное поведение гидродинамических мод. Общая физическая картина хорошо известна. Кинетика параметра порядка определяется диффузионной модой, время релаксации которой неограниченно возрастает при подходе к критической точке (критическое замедление). Для динамики этой моды существенно лишь ее взаимодействие с поперечными компонентами флуктуационного поля скорости, остальные гидродинамические моды не оказывают заметного воздействия на кинетику параметра порядка, но сами испытывают существенное влияние со стороны критических флуктуаций. Это приводит, в частности, к сильному возрастанию затухания звуковых волн, а также к появлению низкочастотной дисперсии скорости звука и коэффициента затухания.

Последовательная статистическая теория динамических критических явлений в жидкости основывается на уравнениях нелинейной стохастической гидродинамики [1, 2]. Исключение из этих уравнений несущественных мод приводит к так называемой H -модели, описывающей кинетику параметра порядка [1, 3]. Эффективным методом изучения этой модели, как и при исследовании термодинамики фазового перехода, оказался метод ренормализационной группы (РГ) и ϵ -разложения. Таким образом была обоснована динамическая гипотеза подобия и вычислен соответствующий критический индекс [3].

Применение метода РГ для описания звуковых волн в критической области требует выделения в нелинейных уравнениях гидродинамики основного механизма взаимодей-

*E-mail: adjemyan@snoopy.niif.spb.su

†E-mail: Alexander.Vasiljev@pobox.spbu.ru

‡E-mail: saha@snoopy.niif.spb.su

ствия звуковых волн с флуктуациями параметра порядка. В условиях, когда длина волны звука λ_s существенно превышает радиус корреляции параметра порядка r_c (всегда выполняющихся при достижимых экспериментально значениях r_c), это взаимодействие осуществляется через адиабатические колебания температуры в звуковой волне, влияющие на самый чувствительный параметр статистического распределения флуктуаций параметра порядка — отклонение температуры от критической. Этот механизм давно уже известен и нашел отражение в ряде феноменологических теорий. Его обоснование в рамках статистического подхода, основывающегося на рассмотрении полного набора уравнений стохастической гидродинамики, выполнено в работах [4, 5] (применительно к динамике жидких кристаллов аналогичная задача рассмотрена в [6]).

Согласно [4, 5] на критической изохоре закон дисперсии звуковой моды имеет вид

$$k^2 = \omega^2 [c_\infty^{-2} + AR(\omega, \tau)], \quad \tau = (T - T_c)/T_c, \quad (1)$$

где c_∞ и A — не зависящие от частоты ω и приведенной температуры τ постоянные, T_c — критическая температура. Функция $R(\omega, \tau)$ определяется соотношениями

$$\begin{aligned} R(\omega, \tau) &= D^{st}(\tau) + i\omega D^{ret}(\omega, \tau), \\ D^{st} &\equiv D(t, t) = C, \quad D^{ret}(t, t') = \theta(t - t')D(t, t'), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$D(t, t') = \int dx' \langle F(\mathbf{x}, t) F(\mathbf{x}', t') \rangle, \quad (3)$$

$$F(\mathbf{x}, t) = [\psi^2(\mathbf{x}, t) - \langle \psi^2(\mathbf{x}, t) \rangle] / 2, \quad (4)$$

ψ — поле параметра порядка. Усреднение в (3) проводится в рамках H -модели, т. е. без учета звуковых волн. Функции типа (3) зависят лишь от разности $t - t'$, и при переходе к ω -представлению всегда подразумевается их фурье-преобразование по $t - t'$.

Величина $C \equiv D(t, t)$ в (2) имеет смысл сингулярной части изохорной теплоемкости, а выражение в квадратных скобках (1) может быть интерпретировано (с точностью до множителя) как динамическое обобщение теплоемкости. Эта величина играет основополагающую роль в феноменологической теории распространения звука в критических системах, предложенной в [7, 8] и развитой рядом других авторов (см., например, [9, 10]). Соотношения (1)–(4) можно рассматривать как статистическое обоснование концепции динамической теплоемкости.

При заданной частоте ω решение дисперсионного уравнения (1) ищется в виде $k = \omega c^{-1} + i\alpha$, отсюда находятся положительные параметры $c(\omega)$ (скорость звука) и $\alpha(\omega)$ (коэффициент затухания). Вместо α часто приводится безразмерная величина $\alpha_\lambda \equiv \alpha \lambda_s = 2\pi c \alpha / \omega$ — затухание на длине волны. Обычно $\alpha_\lambda \ll 1$, тогда из (1) следует

$$c^{-2}(\omega) = c_\infty^{-2} + A \operatorname{Re} R(\omega), \quad \alpha_\lambda(\omega) c^{-2}(\omega) = \pi A \operatorname{Im} R(\omega). \quad (5)$$

Величина $R(\omega)$ стремится к нулю при $\omega \rightarrow \infty$, поэтому в соотношениях (5)

$$R(\infty) = 0, \quad c(\infty) = c_\infty, \quad \alpha_\lambda(\infty) = 0. \quad (6)$$

Таким образом, не зависящая от τ и ω константа c_∞ имеет смысл предельной скорости звука при $\omega \rightarrow \infty$.

Согласно гипотезе динамического скейлинга асимптотика функции $R(\omega, \tau)$ в критической области имеет следующий вид:

$$R(\omega, \tau) = C_1 \tau^{-\alpha} \Phi(C_2 \bar{\omega}), \quad \bar{\omega} \equiv \omega \tau^{-z\nu}, \quad (7)$$

где $C_{1,2}$ — зависящие от вещества неуниверсальные постоянные, $\bar{\omega}$ — приведенная частота (кратная отношению звуковой частоты ω и характерной флуктуационной частоты $\omega_{fl} \sim \tau^{2\nu}$), $\Phi(\bar{\omega})$ — универсальная скейлинговая функция. Входящие в (7) известные статические индексы ν и $\alpha = 2 - d\nu$ (d — размерность пространства) детально изучены в рамках ренормгруппы — вплоть до пятипетлевого приближения. Результаты суммирования по Борелю их ε -разложений совпадают с экспериментальными значениями $\alpha \simeq 0.11$, $\nu \simeq 0.63$ [11]. Значительно ниже достигнутая в настоящее время точность расчета входящих в (7) динамических характеристик. Динамический индекс z (критическая размерность частоты) в H -модели рассчитан с двухпетлевой точностью в [3], его экспериментальное значение составляет $z \simeq 3.07$ [12].

Экспериментальные данные (см., например, [13–15]) подтверждают справедливость скейлингового закона (7) для величин (5) в критической области и позволяют судить о виде универсальной функции $\Phi(\bar{\omega})$ в широком диапазоне частот $\bar{\omega}$. В рамках теории скейлинговая функция Φ рассчитана в однопетлевом приближении в работе [16] (однако вывод полного дисперсионного уравнения в [16] некорректен), в [17] сделана попытка распространить однопетлевое приближение на более широкую окрестность критической точки за счет учета поправок к скейлингу. В данной работе приводятся подробный вывод представления (7) в рамках техники РГ и расчет входящей в нее скейлинговой функции Φ в двухпетлевом приближении, результаты сравниваются с экспериментальными данными. Краткое предварительное сообщение об этой работе сделано на конференции «Ренормгруппа-96» (Дубна, 1996), материалы которой публикуются в журнале *Int. J. Mod. Phys. B*.

2. РЕНОРМИРОВКА ФУНКЦИИ R В H -МОДЕЛИ

Модель H может быть стандартным образом переформулирована на языке теории поля [18]. Тогда корреляционные функции (функции Грина) определяются как функциональные средние полей H -модели с весом $\exp(S)$, а неренормированный функционал действия имеет вид

$$S = \int dx \int dt \left\{ -\lambda_0 \psi' \nabla^2 \psi' + \psi' [-\partial_t \psi - (\mathbf{v} \nabla) \psi + \lambda_0 \nabla^2 (-\nabla^2 \psi + \tau_0 \psi + g_{10} \psi^3 / 6)] - \right. \\ \left. - \lambda_0^{-1} g_{20}^{-1} \mathbf{v}' \nabla^2 \mathbf{v}' + \mathbf{v}' [-a \partial_t \mathbf{v} + \lambda_0^{-1} g_{20}^{-1} \nabla^2 \mathbf{v} + \psi \nabla \nabla^2 \psi] \right\}, \quad (8)$$

где ψ — поле параметра порядка, \mathbf{v} — поперечное поле скорости, ψ' и \mathbf{v}' — вспомогательные поля. По смыслу λ_0 и $\nu_0 = (a \lambda_0 g_{20})^{-1}$ — затравочные коэффициенты теплопроводности и кинематической вязкости, g_{20} — затравочный заряд межмодового взаимодействия, g_{10} — статический заряд, $\tau_0 \propto T - T_c$ — отклонение температуры от критической, $a = \rho_c / k_B T_c$. Пропагаторы модели (8) в импульсно-временном (\mathbf{k}, t) -представлении имеют вид

$$\begin{aligned}
 \langle \psi \psi \rangle &= (k^2 + \tau_0)^{-1} \exp\{-\varepsilon_k |t - t'|\}, \quad \langle \psi' \psi' \rangle = 0, \\
 \langle \psi \psi' \rangle &= \theta(t - t') \exp\{-\varepsilon_k (t - t')\}, \\
 \langle v_i v_j \rangle &= P_{ij}(\mathbf{k}) \nu_0 \lambda_0 g_{20} \exp\{-\nu_0 k^2 |t - t'|\}, \quad \langle v'_i v'_j \rangle = 0, \\
 \langle v_i v'_j \rangle &= P_{ij}(\mathbf{k}) \nu_0 \lambda_0 g_{20} \theta(t - t') \exp\{-\nu_0 k^2 (t - t')\},
 \end{aligned} \tag{9}$$

где $\varepsilon_k \equiv \lambda_0 k^2 (k^2 + \tau_0)$, $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ — поперечный проектор.

H -модель (8) логарифмична в размерности $d = 4$ [3, 18], и мы будем ее рассматривать в размерной регуляризации $d = 4 - \varepsilon$ с использованием схемы минимальных вычитаний при ренормировке. УФ-расходимости в размерной регуляризации проявляются в форме полюсов по ε , ренормировка в схеме минимальных вычитаний сводится к удалению этих полюсов без изменения всех прочих (неполных) вкладов.

При изучении критического поведения функций Грина H -модели интересуются их инфракрасной (ИК) асимптотикой $\tau_0 \rightarrow 0$ в режиме $\omega \sim k^4 \sim \tau_0^2$. Известно (см., например, [3, 18]), что в таком режиме вклад $a' \partial_t v$ в (8) является ИК-несущественным и может быть отброшен. Модель H в пределе $a \rightarrow 0$ будем называть для краткости H_0 -моделью. Диаграммы теории возмущений с пропагаторами (9) допускают предельный переход $a \rightarrow 0$ (т. е. $\nu_0 \rightarrow \infty$). С помощью равенства

$$\lim_{\nu_0 \rightarrow \infty} \nu_0 \exp(-\nu_0 k^2 t) = 2\delta(t)$$

можно было бы совершить предельный переход в самих пропагаторах, но некоторые диаграммы в этом случае потребовали бы доопределения из-за наличия θ -функций в пропагаторах $\langle v'v' \rangle$, $\langle \psi \psi' \rangle$. Поэтому во избежание недоразумений при расчете диаграмм H_0 -модели их следует понимать как диаграммы H -модели с последующим предельным переходом $a \rightarrow 0$.

Следуя авторам статей [3, 18] и всех последующих работ по этой тематике, будем считать, что ренормировка H_0 -модели мультипликативна и согласована со статикой, т. е. динамические и статические константы ренормировки для фигурирующих как в динамике, так и в статике объектов в схеме минимальных вычитаний совпадают. (Строго говоря, ни в одной из известных нам работ нет формального доказательства этого утверждения. Но оно представляется правдоподобным, и все выполненные в H -модели конкретные расчеты ему не противоречат.)

Таким образом, будем считать, что ренормированное действие H_0 -модели получается из неренормированного действия (8) с $a = 0$ стандартной мультипликативной ренормировкой полей и затравочных параметров $e_0 = \{\tau_0, \lambda_0, g_0\}$:

$$\begin{aligned}
 S_R(\phi, e, \mu) &= S(Z_\phi \phi, e_0), \quad \phi \equiv \{\psi, \psi', v, v'\}, \\
 \tau_0 &= \tau Z_\tau, \quad \lambda_0 = \lambda Z_\lambda, \quad g_{i0} = g_i \mu^\varepsilon Z_{g_i}, \quad i = 1, 2,
 \end{aligned} \tag{10}$$

где $e \equiv \tau, \lambda, g$ — ренормированные параметры, μ — ренормировочная масса — дополнительный параметр ренормированной теории. Согласие со статикой означает, что в схеме минимальных вычитаний динамические константы ренормировки поля ψ и параметров τ, g_1 те же самые, что и в простой статической ψ^4 -модели, и $Z_v = 1$, так как поле v входит в соответствующее выражению (8) статическое действие в форме аддитивной добавки $\sim v^2$ и не ренормируется. В схеме минимальных вычитаний все константы ренормировки имеют вид

$$Z = 1 + Z^{(1)}(g)/\varepsilon + Z^{(2)}(g)/\varepsilon^2 + \dots, \quad (11)$$

причем разложение $Z^{(n)}(g)$ начинается с вкладов порядка g^n .

Вернемся теперь к определенным соотношениями (2), (3) функции $R(\omega)$. Воспользовавшись флуктуационно-диссипационной теоремой [19] для составных операторов в H -модели, можно показать, что $R(\omega)$ совпадает с фурье-образом коррелятора

$$R(t, t') = \int dx \langle F(x, t) F'(x', t') \rangle \quad (12)$$

с составным оператором F из (4) и вторым оператором

$$F'(t, \mathbf{x}) = -\lambda_0 \psi' \Delta \psi. \quad (13)$$

Представление (12) выявляет физический смысл $R(t, t')$ как функции отклика величины $\langle F(x, t) \rangle$ на зависящую только от времени вариацию температуры $\delta\tau(t')$ в модели (8), первое равенство (2) с R из (12) — следствие флуктуационно-диссипативной теоремы. При расчете функции R в двухпетлевом приближении мы будем исходить из представления (12), выполняя вычисления в рамках H_0 -модели, поскольку нас не интересуют ИК-несущественные поправки.

Обсудим кратко ренормировку функции отклика и входящих в нее составных операторов. Оператор (4) в статической ψ^4 -модели ренормируется мультипликативно (из-за вычитания величины $\langle \psi^2 \rangle$ в (4)), т. е. $F = Z_F F_R$ с константой $Z_F = Z_\tau^{-1}$ [11]. Из общих принципов соответствия между динамикой и статикой следует, что точно так же оператор F ренормируется и в динамической H_0 -модели, причем с той же константой $Z_F = Z_\tau^{-1}$ в схеме минимальных вычитаний. Оператор (13) имеет смысл только в динамике. Анализируя диаграммы H_0 -модели со вставкой одного оператора F' , нетрудно убедиться, что он также ренормируется мультипликативно (не с чем смешиваться), т. е. $F' = Z_{F'} F'_R$. Из переписанного в t -представлении соотношения (2) для функции отклика (12) с $t \neq t'$ следует, что $Z_{F'} = Z_F$. Таким образом, ренормировка составных операторов F, F' определяется соотношениями

$$F = Z_F F_R, \quad F' = Z_{F'} F'_R, \quad Z_F = Z_{F'} = Z_\tau^{-1}, \quad (14)$$

где Z_τ — известная константа ренормировки параметра τ в статической ψ^4 -модели. Отметим, что константа $Z_{F'}$ для оператора (13) является произведением Z_λ из (10) и константы ренормировки самого монома $\psi' \Delta \psi$.

В общем случае ренормировка корреляторов типа (3), (12) с двумя составными операторами требует помимо замены $F \rightarrow F_R$ самих операторов введения аддитивного, локального (кратного $\delta(t-t')$ в t -представлении) «контрчлена на пару операторов». По соображениям размерности нетрудно установить, что для коррелятора (3) в динамике такой контрчлен не требуется, поэтому $D_R(\omega) = Z_F^{-2} D(\omega)$ и аналогично для $D^{ret}(\omega)$ в (3). Но для статического объекта $D^{st} = C$ «контрчлен на пару» нужен [11]. Из соотношений (2) и (14) следует, что контрчлен на пару нужен тогда и для функции отклика $R(\omega)$, и что он точно такой же, как для теплоемкости C . Сказанное можно суммировать следующим образом:

$$C_R = Z_F^{-2} C + \Delta C, \quad R_R = R' + \Delta C, \quad R' \equiv Z_F^{-2} R, \quad D_R^{ret} = Z_F^{-2} D^{ret}, \quad (15)$$

Здесь $Z_F = Z_\tau^{-1}$ согласно (14), а ΔC — «контрчлен на пару» в теплоемкости — не зависящая от ω и τ константа, содержащая полюсы по ε :

$$\Delta C = \mu^\varepsilon b(g_1), \quad b(g_1) = b^{(1)}(g_1)/\varepsilon + b^{(2)}(g_1)/\varepsilon^2 + \dots \quad (16)$$

Функция $b(g_1)$ известна из анализа ренормировки теплоемкости в статической ψ^4 -модели [11].

В достаточном для дальнейшего рассмотрения линейном по зарядам g приближении величины $Z^{(1)}$ в (11) для независимых констант ренормировки и $b^{(1)}$ из (16) определяются соотношениями [11, 18]

$$\begin{aligned} Z_\phi^{(1)} &= 0 \quad \forall \phi, & Z_{g_1}^{(1)} &= \frac{3u_1}{2}, & Z_{g_2}^{(2)} &= \frac{19u_2}{24}, \\ Z_\tau^{(1)} &= -Z_F^{(1)} = \frac{u_1}{2}, & Z_\lambda^{(1)} &= -\frac{3u_2}{4}, & b^{(1)} &= -\frac{1}{16\pi^2} + O(g_1^2), \end{aligned} \quad (17)$$

в которых $u_i \equiv g_i/8\pi^2$ для обоих зарядов $g_{1,2}$.

3. УРАВНЕНИЯ РЕНОРМГРУППЫ. РГ-ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОТКЛИКА

В этом разделе на основе уравнений ренормгруппы будет получено РГ-представление функции отклика, позволяющее обосновать скейлинговый закон (7) в ИК-асимптотике и получить рабочие формулы для расчета входящей в (7) скейлинговой функции Φ .

Некоторая особенность РГ-уравнения для ренормированной функции отклика R_R связана с наличием аддитивного контрчлена ΔC при ее ренормировке (15). В дальнейшем удобно использовать РГ-уравнения параллельно для R_R и «неполностью ренормированной» функции R' в (15). Эти уравнения получаются из условия независимости неренормированной функции R от ренормировочной массы μ (этот параметр в неренормированной теории отсутствует и появляется лишь в формулах ренормировки (10), а через них — в ренормированных функциях Грина). Действуя на обе части второго и третьего из равенств (15) операцией \mathcal{D}_μ (здесь и далее $\mathcal{D}_a \equiv a\partial_a$, а \mathcal{D}_μ — операция $\mu\partial_\mu$ при фиксированных затравочных параметрах), получим искомые РГ-уравнения:

$$(\mathcal{D}_{RG} + 2\gamma_F)R_R = \mu^{-\varepsilon}\gamma_0, \quad (\mathcal{D}_{RG} + 2\gamma_F)R' = 0. \quad (18)$$

Здесь

$$\mathcal{D}_{RG} = \mathcal{D}_\mu + \beta\partial_g - \gamma_\tau\mathcal{D}_\tau - \gamma_\lambda\mathcal{D}_\lambda \quad (19)$$

— оператор $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$ в ренормированных переменных с суммированием по двум зарядам $g = g_{1,2}$ в слагаемом $\beta\partial_g \equiv \sum_i \beta_i\partial_{g_i}$. В соотношения (18), (19) входят РГ-функции

$$\begin{aligned} \gamma_0 &\equiv \mu^\varepsilon Z_F^{-2} \tilde{\mathcal{D}}_\mu(Z_F^2 \Delta C), & \gamma_a &\equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_a \quad \forall a \neq 0, \\ \beta_i &\equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu g_i = -g_i(\varepsilon + \gamma_{g_i}). \end{aligned} \quad (20)$$

РГ-функции γ_a с $a = g, \tau, \lambda, F$ — аномальные размерности величин a , γ_0 — «вакуумная РГ-функция», β_i — бета-функции зарядов g_i , все они УФ-конечны, т.е. не имеют полюсов по ε . В схеме минимальных вычитаний все функции γ от ε вообще не зависят и

могут вычисляться с помощью соотношений $\gamma_0 = -(1 + \mathcal{D}_g)b^{(1)}$, $\gamma_a = -\mathcal{D}_g Z_a^{(1)}$, в которых $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_{g_1} + \mathcal{D}_{g_2}$, а $Z_a^{(1)}$ и $b^{(1)}$ — коэффициенты при $1/\varepsilon$ в (11) и (16). Эти величины с нужной для дальнейшего анализа точностью приведены в (17). Из (17) и (20) следует

$$\beta_1 = g_1 \left(-\varepsilon + \frac{3u_1}{2} \right), \quad \beta_2 = g_2 \left(-\varepsilon + \frac{19u_2}{24} \right), \quad (21)$$

$$\gamma_\tau = -\gamma_F = -\frac{u_1}{2}, \quad \gamma_\lambda = \frac{3u_2}{4}, \quad \gamma_0 = \frac{1}{16\pi^2} + O(g_1^2) \quad (22)$$

с $u_i \equiv g_i/8\pi^2$ для зарядов $g_{1,2}$. Равенство $\gamma_\tau = -\gamma_F$ точное, оно вытекает из определения γ_a в (20) и связи (14) между константами ренормировки Z_F и Z_τ . РГ-функции β_1 , γ_τ и γ_0 зависят только от статического заряда g_1 , а функции β_2 и γ_λ — от обоих зарядов (отсутствие их зависимости от g_1 в (21), (22) — следствие приближения).

Бета-функции (21) имеют ИК-устойчивую фиксированную точку с координатами

$$u_{1*} = 2\varepsilon/3 + O(\varepsilon^2), \quad u_{2*} = 24\varepsilon/19 + O(\varepsilon^2), \quad (23)$$

в которой $\beta_i(g_*) = 0$, а собственные значения матрицы $\omega_{ik} \equiv \partial\beta_i/\partial g_k|_{g=g_*}$ положительны (последнее и означает ИК-устойчивость). Наличие ИК-устойчивой фиксированной точки — необходимое условие критического скейлинга.

Вернемся к РГ-уравнению (18) для R' и подставим в него

$$R'(\tau, \omega, \mu, \lambda, g) = \mu^\varepsilon Q(\bar{\tau}, w, g), \quad w \equiv \omega/2\lambda\mu^4, \quad \bar{\tau} \equiv \tau/\mu^2, \quad (24)$$

где Q — безразмерная функция безразмерных аргументов w и $\bar{\tau}$. Уравнение (18) для R' с учетом равенства $\gamma_F = -\gamma_\tau$ переписывается в виде ($\mathcal{D}_a \equiv a\partial_a$)

$$[\beta\mathcal{D}_g - (2 - \gamma_\tau)\mathcal{D}_{\bar{\tau}} - (4 - \gamma_\lambda)\mathcal{D}_w - (\varepsilon + \gamma_\tau)] Q = 0. \quad (25)$$

Решение уравнения (25) имеет вид

$$Q(\bar{\tau}, w, g) = Q(1, \bar{w}, \bar{g}) \exp \left\{ - \int_1^{\bar{\tau}} \frac{d\tau_1}{\tau_1} \frac{\varepsilon + 2\gamma_\tau(\bar{g}_1(\tau_1))}{2 + \gamma_\tau(\bar{g}_1(\tau_1))} \right\}, \quad (26)$$

где \bar{g} и \bar{w} — соответствующие g и w инвариантные переменные, определенные соотношениями

$$\mathcal{D}_{\bar{\tau}}\bar{g}_i = \beta_i(\bar{g})/[2 + \gamma_\tau(\bar{g})], \quad \bar{g}_i|_{\bar{\tau}=1} = g_i, \quad (27)$$

$$\mathcal{D}_{\bar{\tau}}\bar{w} = -\bar{w}[4 - \gamma_\lambda(\bar{g})]/[2 + \gamma_\tau(\bar{g})], \quad \bar{w}|_{\bar{\tau}=1} = w. \quad (28)$$

Поскольку фиксированная точка (23) является ИК-устойчивой, для определенных соотношениями (27) инвариантных зарядов имеем $\bar{g}_i \rightarrow g_{i*}$ в ИК-асимптотике $\bar{\tau} \rightarrow 0$. Поэтому ИК-асимптотику определенной уравнением (28) инвариантной переменной \bar{w} можно получить, положив в этом уравнении $\bar{g} = g_*$, что дает

$$\bar{w}_{IR} = Cw\bar{\tau}^{-z\nu}, \quad (29)$$

где C — критически-безразмерный неуниверсальный множитель,

$$1/\nu \equiv \Delta_\tau \equiv 2 + \gamma_\tau^*, \quad z \equiv \Delta_\omega \equiv 4 - \gamma_\lambda^*, \quad (30)$$

— критические размерности переменных τ и ω ($1/\nu$ и z — их стандартные обозначения, $\gamma^* \equiv \gamma(g_*)$). Асимптотика $\tilde{\tau} \rightarrow 0$ экспоненты в (26) имеет вид $C'\tilde{\tau}^{-\alpha}$, где $\alpha \equiv (\varepsilon + 2\gamma_\tau^*)/(2 + \gamma_\tau^*) = 2 - d\nu$ — критический индекс теплоемкости. Подстановка найденных асимптотик в (26) дает ИК-асимптотику функции Q :

$$Q_{IR}(\tilde{\tau}, w, g) = C'\tilde{\tau}^{-\alpha} Q(1, Cw\tilde{\tau}^{-z\nu}, g_*). \quad (31)$$

Это доказывает представление (7) для ИК-асимптотики неренормированной функции R , так как она отличается от Q лишь не зависящим от ω и τ множителем: $R = \mu^{-\varepsilon} Z_F^{-2} Q$ согласно (15) и (24).

Поскольку $g_* \sim \varepsilon$, соотношение (31) могло бы также служить для получения ε -разложения скейлинговой функции Φ в (7). Этому препятствуют остающиеся еще не устраненными полюсы по ε в функции $R' = \mu^{-\varepsilon} Q$. Эти полюсы отсутствуют в ренормированной функции $R_R = R' + \Delta C$, через которую функция $Q(1, w, g_*)$ в правой части (31) выражается с учетом (15), (24), (31) в виде

$$Q(1, w, g_*) = \mu^\varepsilon R_R(\tau = \mu^2, \omega = 2\lambda w \mu^4, g = g_*) - b_*, \quad (32)$$

где $b_* \equiv b(g_*)$. Эту константу можно вынести из правой части (32) общим множителем, что приведет лишь к изменению неуниверсальной амплитуды C' в (31).

ε -разложение входящей в (32) функции R_R начинается с вкладов порядка единицы, а величины b_* — с вкладов порядка $1/\varepsilon$, причем для расчета коэффициентов ε -разложения b_* непосредственно из соотношения (16) в нем нужны бесконечные суммирования (например, в коэффициент при $1/\varepsilon$ дают вклад все слагаемые типа g_1^{n-1}/ε^n при $g_1 = g_{1*} \sim \varepsilon$). Эту трудность можно обойти, так как функцию $b(g_1)$ в контрчлене ΔC можно выразить через определенную в (20) (и не зависящую от ε) вакуумную РГ-функцию γ_0 . Действительно, из двух уравнений (18) следует, что контрчлен $\Delta C = R_R - R'$ удовлетворяет точно такому же РГ-уравнению, как и функция R_R в (18). Отсюда с учетом явного вида контрчлена $\Delta C = \mu^{-\varepsilon} b(g_1)$ и оператора \mathcal{D}_{RG} (19) получаем

$$(\beta_1 \partial_{g_1} - \varepsilon - 2\gamma_\tau) b(g_1) = \gamma_0(g_1). \quad (33)$$

Полагая здесь $g_1 = g_{1*}$, находим

$$b_* = -\gamma_0^*/(\varepsilon + 2\gamma_\tau^*) = -\nu\gamma_0^*/\alpha, \quad (34)$$

где ν и α — определенные выше статические индексы, $\gamma_0^* \equiv \gamma_0(g_{1*})$. Учитывая соотношения (27), (31), (32), (34), для неренормированной функции R в (17) получаем представление (7) со скейлинговой функцией

$$\Phi(w) = 1 + \frac{\alpha\mu^\varepsilon}{\nu\gamma_0^*} R_R(\tau = \mu^2, \omega = 2\lambda w \mu^4, g = g_*) \quad (35)$$

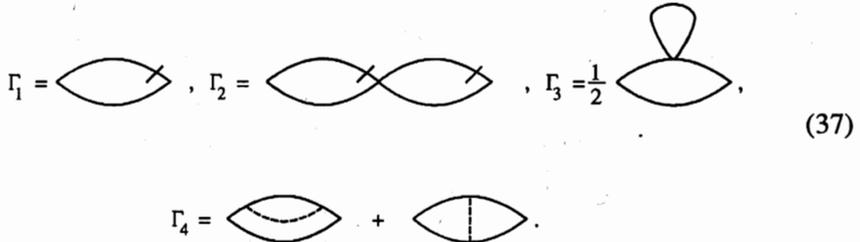
и некоторыми неуниверсальными константами $C_{1,2}$. Соотношение (35) является основой при расчете ε -разложения скейлинговой функции.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ СКЕЙЛИНГОВОЙ ФУНКЦИИ

Мы хотим вычислить скейлинговую функцию (35) с точностью до ϵ^2 включительно, что соответствует двухпетлевому приближению для R_R . Коэффициент $\alpha/\nu\gamma_0^*$ в (35) — величина порядка ϵ ($\alpha = \epsilon/6 - 29\epsilon^2/324 + O(\epsilon^3)$, $\nu = 1/2 + \epsilon/12 + O(\epsilon^2)$ [11], γ_0^* с нужной точностью находится из (22)), откуда

$$\frac{\alpha}{\nu} = \frac{\epsilon}{3} \left(1 - \frac{19}{27}\epsilon \right) + O(\epsilon^3), \quad \gamma_0^* = \frac{1}{16\pi^2} + O(\epsilon^2). \tag{36}$$

Функция R_R с двухпетлевой точностью определяется следующими диаграммами H_0 -модели:



Сплошные линии изображают пропагаторы полей ψ, ψ' , штриховые — пропагаторы полей \mathbf{v}, \mathbf{v}' . Вспомогательным полям ψ', \mathbf{v}' соответствуют перечеркнутые концы линий. Линиям ставятся в соответствие пропагаторы базовой теории, получающейся из (8) заменой всех затравочных параметров ренормированными: $\tau_0 \rightarrow \tau, \lambda_0 \rightarrow \lambda, g_{i0} \rightarrow g_i\mu^\epsilon$ ($i = 1, 2$). Диаграммы для Γ_3 и Γ_4 — символическое обозначение для суммы диаграмм со всевозможными вариантами расстановок перечеркиваний на концах линий (три диаграммы для Γ_3 , десять — для Γ_4 , подробная расшифровка дана в Приложении).

Диаграммы вычисляются при заданной внешней частоте ω и нулевом внешнем импульсе. После интегрирования по временам для диаграмм (37) в H_0 -модели (предел $\nu_0 \sim a^{-1} \rightarrow \infty$ в (9)) получаются следующие явные выражения:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \int \mathcal{D}\mathbf{k} \frac{\lambda k^2}{\alpha_k(2\epsilon_k - i\omega)}, & \Gamma_2 &= -g_1\mu^\epsilon\Gamma_1^2, \\ \Gamma_3 &= g_1\mathcal{F}(\tau)\partial_\tau\Gamma_1, & \mathcal{F}(\tau) &= -\frac{1}{2}\tau\mu^\epsilon \int \mathcal{D}\mathbf{q} \frac{1}{q^2\alpha_q}, \\ \Gamma_4 &= -2\lambda g_2\mu^\epsilon \int \mathcal{D}\mathbf{k} \int \mathcal{D}\mathbf{q} \frac{[k^2q^2 - (\mathbf{kq})^2] i\omega(\epsilon_k - \epsilon_q)^2}{|\mathbf{k} + \mathbf{q}|^4\alpha_k(2\epsilon_k - i\omega)^2\alpha_q(2\epsilon_q - i\omega)^2}, \end{aligned} \tag{38}$$

в которых

$$\alpha_k \equiv k^2 + \tau, \quad \epsilon_k \equiv \lambda k^2(k^2 + \tau), \quad \mathcal{D}\mathbf{k} \equiv d^d\mathbf{k}/(2\pi)^d. \tag{39}$$

Выражения (38) соответствуют «базовой теории», а функция R_R в (35) — сумма соответствующих ренормированных величин. Ренормировка однопетлевой диаграммы Γ_1 осуществляется, согласно (15), добавкой известного из (16), (17) однопетлевого контрчлена на пару операторов: $\Gamma_1^R = \Gamma_1 + \Delta C_1$, где $\Delta C_1 = -\mu^{-\epsilon}/16\pi^2\epsilon$. Для ренормировки

двухпетлевых диаграмм $\Gamma_{2,3,4}$ нужно учесть, во-первых, вклады контрчленов от всех расходящихся однопетлевых подграфов, во-вторых, двухпетлевой контрчлен на пару операторов ΔC_2 для диаграммы Γ_2 (для $\Gamma_{3,4}$ контрчлен на пару не нужен, так как в них нет общей «поверхностной расходимости» из-за выделения размерных множителей τ в Γ_3 и ω в Γ_4). «Контрчлены на подграфы» для суммы всех двухпетлевых диаграмм можно найти, проанализировав поправки от ренормировки всех величин в однопетлевом графике Γ_1 . Для этого в нем нужно сделать замену $\tau \rightarrow \tau Z_\tau$, $\lambda \rightarrow \lambda Z_\lambda$ (при нашей точности учет поправок от ренормировки полей не требуется, так как в (17) $Z_\phi^{(1)} = 0 \forall \phi$), домножить Γ_1 на $Z_F^{-2} = Z_\tau^2$ (что соответствует учету ренормировки составных операторов) и затем отобразить в полученном выражении $Z_\tau^2 \Gamma_1$ все поправочные вклады первого порядка по зарядам. Сумма этих поправок имеет вид

$$\varepsilon^{-1} \left[2Z_\tau^{(1)} \Gamma_1 + Z_\tau^{(1)} \mathcal{D}_\tau \Gamma_1 + Z_\lambda^{(1)} \mathcal{D}_\lambda \Gamma_1 \right] \quad (40)$$

с известными из (17) величинами $Z_a^{(1)}$.

Первое слагаемое в (40) соответствует однопетлевой ренормировке составных операторов, второе — параметра τ , третье — параметра λ . В нашем случае эти слагаемые можно однозначно «распределить» между диаграммами $\Gamma_{2,3,4}$, обусловив тем самым ренормированное значение каждой из них по отдельности. Действительно, по виду диаграмм ясно, что однопетлевая ренормировка составных операторов возможна лишь в графиках $\Gamma_{2,4}$, но заведомо отсутствует в Γ_3 . За нее отвечает первое слагаемое (40), в котором $Z_\tau^{(1)}$ зависит только от g_1 . Отсюда ясно, что в графиках Γ_4 , зависящих только от заряда g_2 , однопетлевые подрасходимости от ренормировки составных операторов должны взаимно сокращаться, так что первый вклад в (40) участвует только в ренормировке Γ_2 . Соответствующее ренормировке τ второе слагаемое (40) участвует только в ренормировке Γ_3 , так как расходимости обоих подграфов Γ_2 соответствуют, очевидно, ренормировке составных операторов, а Γ_4 не зависит от заряда g_1 . Наконец, соответствующее ренормировке λ третье слагаемое (40), в котором $Z_\lambda^{(1)}$ зависит лишь от g_2 (см. (17)), участвует только в ренормировке Γ_4 , поскольку графики Γ_2 и Γ_3 зависят лишь от g_1 . Таким образом, Γ_4^R есть сумма Γ_4 и третьего слагаемого (40), Γ_3^R — сумма Γ_3 и второго слагаемого (40), Γ_2^R — сумма Γ_2 и первого слагаемого (40) плюс двухпетлевой вклад ΔC_2 контрчлена на пару операторов. В заключение добавим, что величины $\Gamma_{2,3}^R$ можно найти очень просто: выражения $\Gamma_{2,3}$ в (38) являются выражениями типа $A \cdot B$, ренормировка произведения сводится к ренормировке сомножителей A и B . Явные выражения для ренормированных величин приведены в Приложении.

5. ОБЩИЕ СВОЙСТВА СКЕЙЛИНГОВОЙ ФУНКЦИИ $R(\omega)$, ПЕРЕХОД К НОРМИРОВАННОЙ ФУНКЦИИ

Анализируя диаграммы неренормированной функции отклика $R(\omega)$ (их вклады отличаются от (38) только значениями параметров), нетрудно убедиться, что $R(\omega)$ является аналитической в верхней полуплоскости комплексной переменной ω (как и всякая функция отклика [20]) и вещественной для чисто мнимых значений ω на верхней полуоси, а также что $\text{Im } R(\omega) > 0$ при $\omega > 0$. Кроме того, легко проверить, что при $\tau > 0$ существуют два первых члена ее разложения в ряд Тейлора в нуле по ω (т.е. вклады порядка единицы и ω), а при $\omega > 0$ существует конечный предел $\tau \rightarrow 0$ (следующие

члены обсуждаемых разложений не существуют из-за ИК-расходимостей в коэффициентах). При учете связи (7) между $R(\omega)$ и скейлинговой функцией $\Phi(w)$ из сказанного следует, что для $\Phi(w)$ существуют два первых члена разложения в нуле по w , и что эта функция при $w \rightarrow \infty$ имеет асимптотику $\sim w^{-\alpha/z\nu}$, обеспечивающую существование конечного предела $R(\omega)$ при $\tau \rightarrow 0$. Учитывая дополнительно отмеченные выше свойства вещественности и положительности, заключаем, что для этой функции

$$\Phi(w) \underset{w \rightarrow 0}{=} B' + iC'w + \dots, \quad \Phi(w) \underset{w \rightarrow \infty}{=} A'(-iw)^{-\kappa} + \dots, \quad (41)$$

где $\kappa \equiv \alpha/z\nu$, A' , B' , C' — некоторые положительные коэффициенты.

Знание асимптотик (41) можно использовать для фиксации нормировки скейлинговой функции $\Phi(w)$. Действительно, ввиду неопределенности амплитудных множителей $C_{1,2}$ в соотношении (7) входящую в него скейлинговую функцию $\Phi(w)$ можно заменить любой другой функцией $f(w) = b_1\Phi(b_2w)$ с произвольными положительными константами $b_{1,2}$. Этим произволом можно воспользоваться для замены $\Phi(w)$ на нормированную функцию $f(w)$, для которой фиксируются два из трех коэффициентов A , B , C в аналогичной (41) асимптотике. Процедура нормировки полезна тем, что нормированная функция $f(w)$ не зависит в отличие от $\Phi(w)$ от схемы вычитаний при ренормировке. Кроме того, удачный выбор нормировки существенно упрощает вид $f(w)$. Мы воспользуемся нормировкой, при которой $B = 1$, $C = \alpha/z\nu \equiv \kappa$, третий коэффициент A остается неизвестным и подлежит вычислению. Таким образом, для нормированной скейлинговой функции $f(w)$ имеем

$$f(w) = b_1\Phi(b_2w), \quad (42)$$

$$f(w) \underset{w \rightarrow 0}{=} 1 + i\kappa w + \dots, \quad f(w) \underset{w \rightarrow \infty}{=} A(-iw)^{-\kappa} + \dots \quad (43)$$

Первое из соотношений (43) при известной функции $\Phi(w)$ определяет коэффициенты $b_{1,2}$ в (42):

$$b_1 = \frac{1}{B'} = \frac{1}{\Phi(0)}, \quad b_2 = \kappa \frac{B'}{C'} = i\kappa \frac{\Phi(0)}{\Phi'(0)}. \quad (44)$$

Амплитуда $A = A'(B')^{-1}(\kappa B'/C')^{-\kappa}$ в (43) в отличие от A' , B' , C' в (41) является универсальной: она одинакова для любых веществ, с которыми проводится эксперимент, а с точки зрения теории не зависит от выбора схемы ренормировки при вычислениях.

При использовании для скейлинговой функции $f(w)$ некоторого приближенного выражения в широком диапазоне частот важно, чтобы эта приближенная функция качественно верно воспроизводила асимптотики (43). Использовать для $f(w)$ просто начальный отрезок ее ε -разложения

$$f(w) = 1 + \varepsilon f_1(w) + \varepsilon^2 f_2(w) + \dots \quad (45)$$

нельзя, так как в нем неправильно воспроизводится асимптотика $w \rightarrow \infty$: дробная степень $w^{-\kappa}$ с $\kappa = O(\varepsilon)$ заменяется ее ε -разложением $w^{-\kappa} = 1 - \kappa \ln w + \dots$. Эту трудность можно преодолеть, выделив, например, из $f(w)$ в виде множителя некоторую функцию с качественно правильными асимптотиками и с регулярным поведением в промежуточной области. Мы будем использовать, следуя [16], простейшее представление

$$f(w) = (1 - iw)^{-\kappa} h(w), \quad \kappa \equiv \alpha/z\nu. \quad (46)$$

Для асимптотик функции $h(w)$ из (46) и (43) имеем

$$h(w) \underset{w \rightarrow 0}{=} 1 + 0 \cdot iw + \dots, \quad h(w) \underset{w \rightarrow \infty}{=} A + \dots \quad (47)$$

Обозначением $0 \cdot iw$ в (47) подчеркивается отсутствие линейного по w вклада в $h(w)$ при $w \rightarrow 0$.

Разложение в ряд по ε функции $h(w)$ уже свободно от указанного недостатка. Его можно получить, находя последовательно ε -разложение ренормированной функции отклика R_R , затем на основе определений (35), (42), (43) — коэффициенты $f_{1,2}$ в (45) и, наконец, ε -разложение самой функции $h(w)$ в (46). При получении последнего нужно знать ε -разложение показателя κ в (46); для α/ν оно приведено в (36), $z = 4(1 - 9\varepsilon/38) + \dots$ [3], отсюда $\kappa = \varepsilon(1 - 479\varepsilon/1026)/12 + \dots$. Двухпетлевые ε -разложения функций Φ , f и h приведены в Приложении. Как видно из приведенных там же асимптотик функций $f_{1,2}(w)$ при $w \rightarrow \infty$, они содержат степени $\ln w$, которые сокращаются в асимптотике $h(w)$ в согласии с (47). Это позволяет найти ε -разложение универсальной амплитуды A в (43):

$$A = 1 + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon^2}{456} \left(\frac{89\pi^2}{4} - \frac{7267}{27} \right) + O(\varepsilon^3), \quad (48)$$

численно $A = 1 + 0.1667\varepsilon - 0.1086\varepsilon^2 + \dots$

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ, СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

При сравнении с экспериментом неуниверсальную аддитивную константу можно исключить, сделав в первом из равенств (5) вычитание величины $c_\infty^{-2} = c^{-2}(\infty)$. Тогда из соотношений (5), (7), (42) получим

$$\begin{aligned} F_1(\omega, \tau) &\equiv [c^{-2}(\omega, \tau) - c^{-2}(\infty)]\tau^\alpha = \text{Re } \bar{f}(\bar{\omega}), \\ F_2(\omega, \tau) &\equiv \alpha_\lambda(\omega, \tau)c^{-2}(\omega, \tau)\tau^\alpha = \pi \text{Im } \bar{f}(\bar{\omega}), \\ \bar{f}(\bar{\omega}) &\equiv C_1 f(C_2 \bar{\omega}), \quad \bar{\omega} \equiv \omega\tau^{-z\nu}, \quad \tau \equiv (T - T_c)/T_c \end{aligned} \quad (49)$$

с универсальной функцией $f(w)$ из (42) и некоторыми неуниверсальными множителями $C_{1,2}$. Из представления (49) следует, что измеримые экспериментально величины $F_{1,2}(\omega, \tau)$ зависят в действительности не от двух переменных ω и τ , а только от их комбинации $\bar{\omega} = \omega\tau^{-z\nu}$ с точностью до ИК-несущественных поправок. В этом и состоит основное утверждение теории динамического скейлинга применительно к рассматриваемой задаче, и оно подтверждается экспериментальными данными [13]. В экспериментах с разными ω и τ для одного вещества константы $C_{1,2}$ в (49) являются фиксированными, но они могут меняться (в отличие от функции $f(w)$) при переходе к другому веществу, в этом и состоит их неуниверсальность. При сравнении соотношений (49) с опытом мы воспользовались экспериментальными данными работы [13], а в качестве $f(w)$ использовали выражение (46) с экспериментальным значением показателя κ и с одним (однопетлевое приближение) или двумя (двухпетлевое приближение) первыми

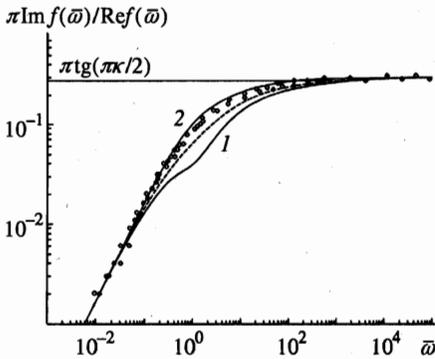


Рис. 1. Зависимость отношения $\pi \operatorname{Im} f(\bar{\omega}) / \operatorname{Re} f(\bar{\omega})$ от приведенной частоты $\bar{\omega}$ сравнивается с экспериментальными данными Роя и Мейера по поглощению на длине волны $\alpha_\lambda(\omega)$ для ${}^3\text{He}$. Кривая 1 соответствует первому порядку ε -разложения для функции $h(\omega)$, кривая 2 — второму. Пунктирная кривая построена по функции Кролла и Руланда

членами ε -разложения функции $h(\omega)$. Экспериментальные данные удобно изображать на графике в двойном логарифмическом масштабе $\ln F - \ln \bar{\omega}$. Неопределенность коэффициентов $C_{1,2}$ в (49) сводится тогда к возможности переноса теоретических кривых вдоль осей координат, причем одинакового для F_1 и F_2 . Не меняющаяся при параллельном переносе «форма» этих кривых для обеих величин $F_{1,2}$ определяется лишь видом скейлинговой функции $f(\omega)$. При построении кривых на рис. 1–3 по оси y откладывались значения «теоретических кривых» (49) в логарифмическом масштабе с $C_1 = C_2 = 1$, а произвол в $C_{1,2}$ использовался для соответствующего «параллельного переноса» экспериментальных данных.

На рис. 1 сравниваются экспериментальные данные с зависимостью отношения $F_2/F_1 = \pi \operatorname{Im} f(C_2 \bar{\omega}) / \operatorname{Re} f(C_2 \bar{\omega})$ от приведенной частоты. Отношение F_2/F_1 зависит только от одной неуниверсальной постоянной C_2 , неопределенность в C_2 соответствует возможности горизонтального смещения теоретической или экспериментальной кривой. Из (43) следует, что $\pi \operatorname{Im} f(C_2 \bar{\omega}) / \operatorname{Re} f(C_2 \bar{\omega}) \rightarrow \pi \operatorname{tg}(\kappa\pi/2)$ при $\bar{\omega} \rightarrow \infty$ (отметим, что этот предел — универсальная константа, численно $\pi \operatorname{tg}(\kappa\pi/2) \simeq 0.28$ при $\kappa \simeq 0.057$). По графику рис. 1 видно, что экспериментальные значения согласуются с этим предсказанием теории (фактически основанном только на гипотезе динамического скейлинга и общих свойствах (41) скейлинговой функции), и эта асимптотика F_2/F_1 реально достигается. Пользуясь возможностью горизонтального смещения, теоретическую кривую для F_2/F_1 удастся совместить с экспериментальной и в области низких частот, тогда различие между экспериментом и теорией проявляются лишь в промежуточной области средних частот. Точками на рис. 1 изображены экспериментальные данные [13] для различных значений ω и τ (заметим, что для ${}^3\text{He}$, с которым проводился эксперимент в [13], оказывается $c_\infty^{-2} \simeq 0$, подробное обсуждение см. в [21]). Кривая 1 построена с функцией $f(\omega)$, вычисленной в однопетлевом приближении, кривая 2 — с добавкой двухпетлевого вклада, пунктирная кривая — результат расчета в [16]. Из рисунка видно, что для однопетлевого приближения имеется заметное расхождение с экспериментом в области средних частот, учет двухпетлевой поправки значительно улучшает ситуацию. Что касается теоретической кривой, полученной в [16] в однопетлевом приближении, то ее отличие от кривой 1 объясняется тем, что при расчете скейлинговой функции с помощью аналогичного (46) соотношения авторы работы [16] заменили коэффициент ε в однопетлевом выражении $h = 1 + \varepsilon h_1$ в (П.11) величиной $12\alpha(z\nu - 2\alpha)^{-1} = \varepsilon + \dots$ с подстановкой экспериментального значения 0.77 вместо $\varepsilon = 1$ для трехмерной задачи. Как видно из рисунка, такая подмена качественно дает такой же эффект, как и

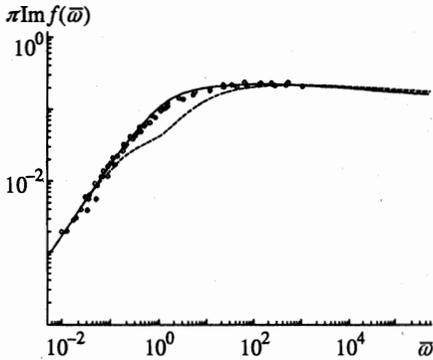


Рис. 2

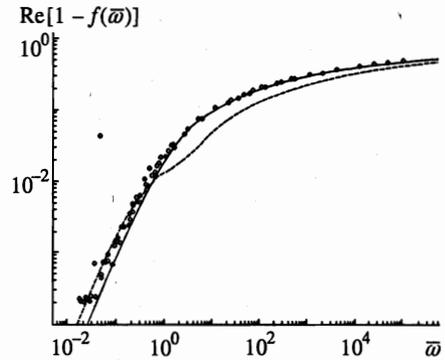


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость приведенного поглощения $\alpha_\lambda(\omega)c^{-2}(\omega)\tau^\alpha$ от $\bar{\omega}$ по данным Роя и Мейера для ^3He . Штриховая кривая — расчет в порядке ε , сплошная — в порядке ε^2

Рис. 3. Зависимость приведенной дисперсии скорости звука $[c^{-2}(0) - c^{-2}(\omega)]\tau^\alpha$ от $\bar{\omega}$ по данным Роя и Мейера для ^3He . Штриховая кривая — расчет в порядке ε , сплошная — в порядке ε^2

двухпетлевая поправка, улучшая согласие с экспериментом. Но с теоретической точки зрения такая подмена в рамках ε -разложения некорректна, так как соответствует «превышению точности по ε » в однопетлевой скейлинговой функции. (Полезное замечание: «численные эксперименты» показывают, что двухпетлевое приближение (П.11) для $h \ll \varepsilon = 1$ почти точно воспроизводится однопетлевым выражением $h = 1 + \varepsilon h_1$ с заменой коэффициента $\varepsilon = 1$ числом 0.42. Этим можно пользоваться при построении графиков двухпетлевого приближения.)

Сказанное выше о незаконности превышения точности не относится к показателям степеней α и $z\nu$ в (49), так как вычисление этих показателей и скейлинговой функции — две независимо решаемые задачи. Поэтому для показателей степеней не возбраняется использовать экспериментальные данные для трехмерной задачи: $\alpha = 0.11$, $\nu = 0.63$, $z = 3.07$, $z\nu = 1.93$, $\kappa = \alpha/z\nu = 0.057$. Именно эти данные были использованы (как и в [16]) при построении теоретических кривых на рис. 1–3.

При сравнении с экспериментом порознь дисперсии скорости и коэффициента поглощения звука в соотношениях (49) обычно делается вычитание на нулевой частоте, так как величина $c(0)$ легче извлекается из экспериментальных данных, чем константа $c(\infty)$. Это дает

$$[c^{-2}(0, \tau) - c^{-2}(\omega, \tau)]\tau^\alpha = C_1 \text{Re}[1 - f(C_2\bar{\omega})]. \quad (50)$$

Экспериментальные данные [13] сравниваются с кривыми дисперсии скорости (50) и поглощения звука (второе равенство (49)) на рис. 2 и 3. Произвол в $C_{1,2}$ использован для возможно более точного совмещения асимптотик экспериментальных данных и теоретических кривых, построенных при $C_1 = C_2 = 1$. Для поглощения звука (рис. 2) таким путем удастся совместить обе асимптотики, а для дисперсии скорости (рис. 3) в низкочастотной области остается заметное расхождение с экспериментом (о причине см. ниже). Из графиков рис. 2, 3 видно, что во всех случаях учет двухпетлевой поправки существенно улучшает согласие с экспериментом.

Обсудим теперь подробнее поведение дисперсии скорости (50) в области низких частот. Как видно из графика рис. 3, здесь имеется заметное отклонение теоретической кривой двухпетлевого приближения от экспериментальных данных, проявляющееся, в частности, в различии наклонов. Это обстоятельство не является случайным. Дело в том, что первые два слагаемых (порядка единицы и $i\omega$) низкочастотной асимптотики $f(w)$ в (43) вообще не дают вклада в выражение (50) из-за сделанного там вычитания на нулевой частоте. Низкочастотная асимптотика (50) определяется, таким образом, не приведенными в (43) поправочными вкладами. Как видно из (П.14), в рамках ε -разложения эти поправки имеют вид

$$w^2 [(a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2) \ln w + (b_2\varepsilon^2 + \dots) \ln^2 w + \dots]. \quad (51)$$

Ясно, что в следующих порядках ε -разложения будут появляться старшие степени $\ln w$, так что для корректного определения низкочастотной асимптотики величины (50) необходимо решать проблему суммирования «главных логарифмов» $\sim (\varepsilon \ln w)^n$ во всех порядках ε -разложения.

Решение этой задачи не относится непосредственно к компетенции метода РГ. В теории критического поведения аналогичные проблемы возникают, например, при изучении асимптотики $\tau \rightarrow 0$ статического коррелятора в простой ψ^4 -модели и решаются с помощью операторного разложения Вильсона [11], при этом логарифмы типа (51) суммируются, как правило, в некоторые дробные степени. По аналогии естественно предположить, что результатом суммирования главных логарифмов (51) будет некоторая дробная степень $w^{2+a(\varepsilon)}$ с $a(\varepsilon) = O(\varepsilon)$. Анализ диаграмм подтверждает это предположение. Асимптотика однопетлевого графика Γ_1^R (П.3), рассчитанного вне рамок ε -разложения (с конечным $0 < \varepsilon < 2$), дает для показателя значение $a = -\varepsilon/2$. Важно, что в данном случае, как показывает анализ двухпетлевых диаграмм $\Gamma_{2,3,4}^R$ (П.3), старшие порядки теории возмущений приводят к той же степенной асимптотике $\sim w^{2-\varepsilon/2}$. Поэтому можно предположить, что уточненная низкочастотная асимптотика (43) функции $f(w)$ имеет следующий вид:

$$f(w) = 1 + ikw + D(-iw)^{2-\varepsilon/2} + O(w^2) \quad (52)$$

с вещественным коэффициентом $D = D(\varepsilon)$. Разложение вклада с D в (52) в ряд по ε приводит, как нетрудно убедиться, к асимптотике, согласующейся с полученной в (П.13) в рамках ε -разложения. Предсказываемый соотношением (52) начальный наклон $3/2$ (при $\varepsilon = 1$) дисперсии скорости (50) хорошо согласуется с экспериментальными данными. Строгое доказательство этого соотношения можно выполнить с помощью «инфракрасной теории возмущений» [22, 23].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-02-17-033) и Конкурсного центра фундаментального естествознания Госкомвуза (грант № 97-0-14.1-30).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Результаты вычислений

Приведем расшифровку вкладов в диаграммы $\Gamma_{3,4}$ в (37):

(П.1)

Приведены лишь диаграммы, дающие вклад в H_0 -модели.

Ренормированные аналоги Γ_i^R величин Γ_i (38), определяющие ренормированную функцию отклика

$$R_R(\omega, \tau) = \sum_{i=1}^4 \Gamma_i^R(\omega, \tau), \quad (\text{П.2})$$

даются выражениями (везде используются обозначения (39))

$$\begin{aligned} \Gamma_1^R &= \int \mathcal{D}\mathbf{k} \frac{\lambda k^2}{\alpha_k(2\varepsilon_k - i\omega)} - \frac{\mu^{-\varepsilon}}{16\pi^2\varepsilon}, \quad \Gamma_2^R = -g_1\mu^\varepsilon(\Gamma_1^R)^2, \\ \Gamma_3^R &= g_1 \mathcal{F}^R \partial_\tau \Gamma_1^R, \quad \mathcal{F}^R = -\frac{1}{2}\tau \left(\int \mathcal{D}\mathbf{q} \frac{\mu^\varepsilon}{q^2\alpha_q} - \frac{1}{8\pi^2\varepsilon} \right), \\ \Gamma_4^R &= -\lambda g_2 \mu^\varepsilon i\omega \left\{ \int \mathcal{D}\mathbf{k} \int \mathcal{D}\mathbf{q} \frac{k^2 q^2 - (\mathbf{kq})^2}{|\mathbf{k} + \mathbf{q}|^4 \alpha_k \alpha_q (2\varepsilon_k - i\omega)^2 (2\varepsilon_q - i\omega)^2} - \right. \\ &\quad - \int \mathcal{D}\mathbf{k} \frac{\tau}{\alpha_k(2\varepsilon_k - i\omega)^2} \int \mathcal{D}\mathbf{q} \frac{k^2 q^2 - (\mathbf{kq})^2}{q^2 |\mathbf{k} + \mathbf{q}|^4 \alpha_q} - \\ &\quad \left. - \int \mathcal{D}\mathbf{k} \frac{k^2}{\alpha_k(2\varepsilon_k - i\omega)^2} \left[\int \mathcal{D}\mathbf{q} \frac{k^2 q^2 - (\mathbf{kq})^2}{k^2 q^2 |\mathbf{k} + \mathbf{q}|^4} - \frac{3\mu^{-\varepsilon}}{32\pi^2\varepsilon} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Величина Γ_4^R приведена в удобном для вычисления виде, в ней каждое слагаемое в фигурных скобках конечно при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Рассчитанные по формулам (П.3) функции

$$\bar{\Gamma}_i(\omega) \equiv 32\pi^2 \mu^\varepsilon \Gamma_i^R(\tau = \mu^2, \omega = 2\lambda\omega\mu^4, g = g_*) \quad (\text{П.4})$$

с учетом двух членов ε -разложения для $\bar{\Gamma}_1$ и одного для $\bar{\Gamma}_{2,3,4}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_1 &= \beta + \varepsilon(\beta^2 + \pi^2/6)/4 + iw\{q_1[1 + (\beta + 1)\varepsilon/2] - \varepsilon q_2/2\}, \\ \bar{\Gamma}_2 &= -\varepsilon(\beta + iwq_1)^2/6, \quad \bar{\Gamma}_3 = (\beta + 1)\varepsilon(1 + 2iwq_3)/6, \\ \bar{\Gamma}_4 &= 9\varepsilon iw[q_4 + 2q_5 - (\beta + 4/3)q_3]/19.\end{aligned}\quad (\text{П.5})$$

Здесь $\beta \equiv \ln 4\pi - C$, C — постоянная Эйлера, $q_i \equiv q_i(w)$ — функции, определенные соотношениями

$$\begin{aligned}q_1 &= \int_0^\infty dx \frac{x}{(x+1)^2(\bar{x}+z)}, \quad \bar{x} \equiv x(x+1), \quad z \equiv -iw, \\ q_2 &= \int_0^\infty dx \frac{x \ln x}{(x+1)^2(\bar{x}+z)}, \quad q_3 = \partial_z(zq_1), \\ q_4 &= \int_0^\infty dx \frac{x + (x^2 - 1) \ln(x+1)}{(x+1)(\bar{x}+z)^2}, \\ q_5 &= \int_0^\infty dx \int_0^x dy \frac{y^2}{(x+1)(\bar{x}+z)(y+1)(\bar{y}+z)} = \\ &= q_6 \ln z + \frac{(1-3z)}{2} q_6^2 + \int_0^\infty dx \frac{3 \ln(x+1) - \ln(\bar{x}+z)}{(x+1)(\bar{x}+z)}, \\ q_6 &= \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(\bar{x}+z)}.\end{aligned}\quad (\text{П.6})$$

Интегралы $q_{1,2,3,6}$ при желании можно выразить через элементарные функции; в частности,

$$q_1 = -\frac{1}{z} - \frac{1-z}{2z^2} \ln z - \frac{1-3z}{2z^2\Delta} \ln \left[\frac{1+\Delta}{1-\Delta} \right], \quad (\text{П.7})$$

где $\Delta \equiv (1-4z)^{1/2}$. Логарифмы комплексных величин определяются в приведенных соотношениях обычным образом: $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, $-\pi < \arg z < \pi$ с $\arg z = 0$ для $z > 0$. Из соотношений (35), (36), (П.2), (П.4) находим скейлинговую функцию $\Phi(w)$ с точностью до членов $\sim \varepsilon^2$ включительно:

$$\Phi(w) = 1 + \frac{\varepsilon}{6} \left(1 - \frac{19}{27}\varepsilon \right) \sum_{i=1}^4 \bar{\Gamma}_i(w). \quad (\text{П.8})$$

Подстановка выражений (П.5) дает

$$\begin{aligned}\Phi(w) &= 1 + \frac{\varepsilon}{6}(\beta + iwq_1) + \frac{\varepsilon^2}{6} \left\{ \frac{\beta^2}{16} + \frac{\pi^2}{24} - \frac{29\beta}{54} + \frac{1}{6} + iw \left[\left(\frac{\beta}{6} - \frac{11}{54} \right) q_1 - \frac{iwq_1^2}{6} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{q_2}{2} - \frac{q_3(8\beta + 17)}{57} + \frac{9(q_4 + 2q_5)}{19} \right] \right\}.\end{aligned}\quad (\text{П.9})$$

Из соотношений (42), (44), (П.9) получаем ε -разложение нормированной функции $f(w)$:

$$f(w) = 1 + \varepsilon f_1(w) + \varepsilon^2 f_2(w) + \dots, \quad f_1 = iwq_1/6, \\ f_2 = \frac{iw}{12} \left\{ -\frac{11}{27}q_1 - \frac{1}{3}iwq_1^2 - q_2 + \frac{1}{19} [(241 - 30\pi^2)q_3 + 18(q_4 + 2q_5)] \right\}. \quad (\text{П.10})$$

Из определения (46) функции $h(w)$ по известным ε -разложениям функции $f(w)$ и индекса $\kappa = \alpha/z\nu$ в (46) находим ε -разложение $h(w)$:

$$h(w) = 1 + \varepsilon h_1(w) + \varepsilon^2 h_2(w) + \dots, \quad h_1 = f_1 + \frac{1}{12} \ln(1 - iw), \\ h_2 = f_2 + \frac{1}{12} f_1 \ln(1 - iw) - \frac{479}{12312} \ln(1 - iw) + \frac{1}{288} \ln^2(1 - iw) \quad (\text{П.11})$$

с $f_{1,2}$ из (П.10).

Приведем асимптотики полученных функций. Входящие в (П.9), (П.10) функции q_i из (П.6) имеют следующие асимптотики (везде $z \equiv -i\omega$): при $w \rightarrow 0$

$$q_1 = \frac{1}{2} + z \ln z + O(z), \quad q_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} z \ln^2 z + O(z), \\ q_3 = \frac{1}{2} + 2z \ln z + O(z), \quad q_4 = \frac{\pi^2 - 9}{2} + z \ln z + O(z), \\ q_5 = \frac{\pi^2 - 9}{6} + O(z), \quad (\text{П.12})$$

а при $w \rightarrow \infty$

$$q_1 = \frac{\ln z}{2z} - \frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right), \quad q_2 = \frac{\ln^2 z}{8z} - \frac{\pi^2}{8z} + o\left(\frac{1}{z}\right), \\ q_3 = \frac{1}{2z} + o\left(\frac{1}{z}\right), \quad q_4 = \frac{\ln z}{4z} + o\left(\frac{1}{z}\right), \quad q_5 = \frac{\pi^2}{24z} + o\left(\frac{1}{z}\right). \quad (\text{П.13})$$

Из (П.12), (П.13) получаем следующие асимптотики для функций $f_{1,2}$ из (П.10): при $w \rightarrow 0$

$$f_1 = -\frac{1}{12}z - \frac{1}{6}z^2 \ln z + O(z^2), \\ f_2 = \frac{1}{12} \left\{ \frac{479}{1026}z + \frac{1}{2}z^2 \ln^2 z + \left[\frac{20}{19}(3\pi^2 - 25) + \frac{11}{27} \right] z^2 \ln z \right\} + O(z^2), \quad (\text{П.14})$$

а при $w \rightarrow \infty$

$$f_1 = -\frac{1}{12} \ln z + \frac{1}{6} + O\left(\frac{1}{z}\right), \\ f_2 = \frac{1}{288} \ln^2 z + \frac{77}{3078} \ln z + \frac{1}{8} \left(\frac{89\pi^2}{228} - \frac{7267}{1539} \right) + O\left(\frac{1}{z}\right). \quad (\text{П.15})$$

Подстановка асимптотик (П.14) в (П.11) дает

$$h = 1 - \frac{1}{6}\varepsilon z^2 \ln z + \frac{1}{12}\varepsilon^2 z^2 \left\{ \frac{1}{2} \ln^2 z + \left[\frac{20}{19}(3\pi^2 - 25) + \frac{11}{27} \right] \ln z \right\} + O(z^2), \quad (\text{П.16})$$

что согласуется с первым соотношением (47), подстановка (П.15) в (П.11) приводит ко второму из соотношений (47) с константой A из (48). Все входящие в (П.15) $\ln z$ в аналогичной асимптотике (П.11) сокращаются.

Литература

1. P. Hohenberg and B. Halperin, *Rev. Mod. Phys.* **49**, 435 (1977).
2. А. З. Паташинский, В. Л. Покровский, *Флуктуационная теория фазовых переходов*, Наука, Москва (1982).
3. E. Siggia, B. Halperin, and P. Hohenberg, *Phys. Rev. B* **13**, 2110 (1976).
4. R. Dengler and F. Schwable, *Europhys. Lett.* **4**, 1233 (1987).
5. Е. В. Гурович, Е. И. Кац, В. В. Лебедев, А. Р. Муратов, *Письма в ЖЭТФ* **55**, 56 (1992).
6. Е. В. Гурович, Е. И. Кац, В. В. Лебедев, *ЖЭТФ* **100**, 855 (1991).
7. M. Fixman, *J. Chem. Phys.* **36**, 1961 (1962).
8. W. Botch and M. Fixman, *J. Chem. Phys.* **42**, 199 (1965).
9. R. A. Ferrel and J. K. Bhattacharjee, *Phys. Lett. A* **86**, 109 (1981).
10. R. A. Ferrel and J. K. Bhattacharjee, *Phys. Rev. A* **31**, 1788 (1985).
11. J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford Univ. Press (1989).
12. H. C. Burstyn, J. V. Sengers, J. K. Bhattacharjee, and R. A. Ferrel, *Phys. Rev. A* **28**, 1567 (1983).
13. D. B. Roe and H. Meyer, *J. Low. Temp. Phys.* **30**, 91 (1978).
14. D. B. Roe, B. A. Wallace, and H. Meyer, *J. Low. Temp. Phys.* **16**, 51 (1974).
15. D. Sarid and D. S. Cannel, *Phys. Rev. A* **15**, 735 (1977).
16. D. M. Kroll and J. M. Ruhland, *Phys. Lett. A* **80**, 45 (1980).
17. R. Folk and G. Moser, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2706 (1995).
18. C. de Dominicis and L. Peliti, *Phys. Rev. B* **18**, 353 (1978).
19. R. Vaush, H. K. Janssen, and H. Z. Wagner, *Z. Phys. B* **24**, 113 (1976).
20. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика, Ч. 1*, Наука, Москва (1995).
21. R. A. Ferrel and J. K. Bhattacharjee, *Phys. Lett. A* **88**, 77 (1982).
22. Л. Ц. Аджемян, А. Н. Васильев, Ю. М. Письмак, *ТМФ* **74**, 360 (1988).
23. М. Ю. Налимов, *ТМФ* **80**, 212 (1989).