ЖЭТФ, 1998, том 114, вып. 5(11), стр. 1897–1914 ©1998

ДИФФУЗИОННЫЕ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ В МОДЕЛЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В АКТИВНЫХ СРЕДАХ

*В. М. Журавлев**

Ульяновский государственный университет
432700, Ульяновск, Россия

Поступила в редакцию 14 марта 1998 г.

Исследуется класс моделей автоволн в форме нелинейных диффузионных уравнений, тесно связанных с уравнением Лиувилля и двумеризованными цепочками Тоды. Строятся и анализируются точные решения этих уравнений. Предлагается простой способ конструирования моделей типа диффузионных цепочек Тоды из известных базовых моделей.

К настоящему времени одним из наиболее важных классов моделей нелинейных волновых процессов являются солитонные модели, основанные на методе обратной задачи рассеяния. Однако, при всей широте области использования этого метода в прикладных задачах, имеются некоторые разделы физики, где характер решений, получаемых с его помощью (солитоны, кинки, бризеры и т. п.) нельзя считать согласующимся с характером изучаемых процессов. Например, это относится к нелинейным диффузионным процессам, которые в последнее время привлекают особое внимание в связи с развитием таких областей физики как теория самоорганизующихся систем, теория волновых процессов в активных средах и т. д. [1–5]. Для описания этих процессов требуются новые подходы к построению базовых моделей, имеющих достаточно богатые классы точных решений. Как правило, модели автоволн исследуются с помощью приближенных аналитических методов [4–7] либо численного моделирования [5]. Однако значимость выводов, которые могут быть сделаны на основе использования этих методов, существенно зависит от возможности проверить достоверность результатов вычислений на точных решениях уравнений. Именно это определяет то, что сделанные упрощения и приближения не выводят за рамки исходной модели. Поэтому отсутствие хорошо развитых методов построения точных решений для моделей с диффузией следует считать препятствием к детальному пониманию нелинейных волновых процессов, протекающих в таких системах и связанных с возникновением регулярных или когерентных структур в них.

В работе [8] был предложен целый класс моделей нелинейных волновых процессов в активных средах с диффузией, допускающих точные решения. Модели такого рода представляют собой обобщение двумеризованных цепочек Тоды [9–11] на случай двумерных диффузионных процессов. Класс точных решений, полученных в работе [8], является новой полезной записью решений двумеризованных цепочек Тоды, рассмотренных впервые в [11, 12], и уравнения Лиувилля [13] в двумерной эрмитовой форме. Заметим также, что на основе симметрийного подхода в работе [14] были найдены но-

*E-mail: zhuravl@themp.univ.simbirsk.su

вые интегрируемые цепочки Тоды, относящиеся к классу диффузионных уравнений в одномерном пространстве.

В настоящей статье развивается предложенный в [8] метод построения и анализа моделей, которые условно можно назвать диффузионными цепочками Тоды. Также в работе рассматриваются свойства этих моделей, приводящие к появлению регулярных структур в диффузионных системах, и принципы, с помощью которых можно получать модели диффузионных цепочек Тоды из известных базовых моделей. Как и в [8], метод построения решений основывается на новой переформулировке метода построения точных решений двумеризованных цепочек Тоды с помощью квадратичных форм [8, 11, 12]. На основе этого подхода строятся точные решения некоторых базовых моделей типа реакция—диффузия.

1. ОБЩАЯ КОНСТРУКЦИЯ РЕШЕНИЙ ДВУМЕРИЗОВАННЫХ ЦЕПОЧЕК ТОДЫ В КЛАССЕ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Под двумеризованными цепочками Тоды понимают такую физическую систему, динамика которой описывается совокупностью дифференциальных уравнений в частных производных следующего вида:

$$\Delta\Phi_n = \exp\{\Phi_{n-1} - 2\Phi_n + \Phi_{n+1}\}, \; n = 1, \dots, N-1, \tag{1}$$

где $\Delta = \partial^2/\partial z\partial\bar{z}$ — оператор Лапласа в случае комплексных координат $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ (или оператор Даламбера в случае действительных координат $z = x + y$, $\bar{z} = x - y$ (конусные координаты)). Для переменных $G_n = \Phi_n - \Phi_{n-1}$ эта система будет иметь более привычный вид:

$$\Delta G_n = \exp\{G_{n+1} - G_n\} - \exp\{G_n - G_{n-1}\}, \quad n = 1, \dots, N-1. \tag{2}$$

Существует определение обобщенных диффузионных цепочек Тоды (см., например, [10, 15]), однако в данной работе они рассматриваться не будут.

Вкратце опишем основные принципы построения точных решений двумеризованных цепочек Тоды с помощью квадратичных форм. Рассмотрим функции $H(z, \bar{z})$ следующего вида

$$H_1(z, \bar{z}) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} h^{\alpha\beta}\psi_\alpha(z)\psi^*_\beta(\bar{z}),$$

где $h^{\alpha\beta}$ — эрмитова матрица размерности $N \times N$. Функция $H_1(z, \bar{z})$ представляет собой эрмитову форму размерности N, определенную на комплексном пространстве $\mathbf{F}^N$. Совокупность функций $\psi_\alpha(z)$, зависящих от z, можно представить в виде вектора $\mathbf{\Psi} = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\}$ в пространстве $\mathbf{F}^N$, в котором длина вектора задается функцией $H_1(z, \bar{z})$. Для сокращения записи полезно ввести вместо комплексно-сопряженных функций $\psi^*_\beta(\bar{z})$ функции с верхними индексами по правилу

$$\psi^\alpha(\bar{z}) = \sum_{\beta=1}^{N} h^{\alpha\beta}\psi^*_\beta(\bar{z}).$$

Тогда при любой невырожденной форме $h^{\alpha\beta}$ функция $H_1(z,\bar{z})$ представима в виде

$$H_1(z,\bar{z}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \psi_\alpha(z)\psi^\alpha(\bar{z}) = \mathbf{\Psi}\bar{\mathbf{\Psi}},$$

где $\bar{\mathbf{\Psi}} = \{\psi^1, \psi^2, \ldots, \psi^N\}$.

Для удобства изложения введем следующее обозначение:

$$[f(z), g(z)] \equiv f(z)\frac{dg(z)}{dz} - g(z)\frac{df(z)}{dz} = fg' - gf', \quad f' = \frac{df(z)}{dz}, \quad g' = \frac{dg(z)}{dz} \tag{3}$$

для двух произвольных функций $f(z)$ и $g(z)$. Тогда с помощью прямых вычислений можно показать, что для любого фиксированного $N > 1$

$$H_1^2(z,\bar{z})\Delta\ln H_1(z,\bar{z}) = H_2(z,\bar{z}), \tag{4}$$

где

$$H_2(z,\bar{z}) = \sum_{\alpha<\beta=1}^{N} w_{\alpha\beta}(z)w^{\alpha\beta}(\bar{z}), \quad w_{\alpha\beta} = [\psi_\alpha(z), \psi_\beta(z)], \quad \alpha \neq \beta.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
H_1^2(z,\bar{z})\Delta\ln H_1(z,\bar{z}) &= H_1(z,\bar{z})\Delta H_1(z,\bar{z}) - H_{1,z}(z,\bar{z})H_{1,\bar{z}}(z,\bar{z}) = \\
&= (\mathbf{\Psi}\bar{\mathbf{\Psi}})\Delta(\mathbf{\Psi}\bar{\mathbf{\Psi}}) - (\mathbf{\Psi}\bar{\mathbf{\Psi}})_z(\mathbf{\Psi}\bar{\mathbf{\Psi}})_{\bar{z}} = \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \left[\psi_\alpha(z)\psi^\alpha(\bar{z})\psi'_\beta(z)\psi'^\beta(\bar{z}) - \psi'_\alpha(z)\psi^\alpha(\bar{z})\psi_\beta(z)\psi'^\beta(\bar{z})\right] = \\
&= \sum_{\alpha<\beta=1}^{N} \left\{\left[\psi_\alpha(z)\psi'_\beta(z) - \psi'_\alpha(z)\psi_\beta(z)\right]\left[\psi^\alpha(\bar{z})\psi'^\beta(\bar{z}) - \psi^\alpha(\bar{z})\psi'^\beta(\bar{z})\right]\right\} = \\
&= \sum_{\alpha<\beta=1}^{N} w_{\alpha\beta}(z)w^{\alpha\beta}(\bar{z}),
\end{aligned} \tag{5}$$

что и требовалось доказать. Функция $H_2(z,\bar{z})$ также представляет собой эрмитову форму, но размерности $N(N-1)/2$. Таким образом, к ней может быть применено то же преобразование (4). В результате последовательного применения этого преобразования к последовательности эрмитовых форм, возникающих на каждом новом этапе, получается цепочка функций $H_n(z,\bar{z})$, $n = 1, 2, \ldots, N$, которая обрывается на N-м шаге. Эти функции удовлетворяют уравнениям (1). При этом никаких ограничений, кроме достаточной гладкости и дифференцируемости, на функции $\psi_i(z)$ не накладывается. В несколько ином виде этот результат сформулирован и доказан в [12, 11]. Отсутствие ограничений на функции $\psi_i(z)$ позволяет рассматривать различные редукции и накладывать дополнительные условия на эти функции, чтобы удовлетворить более общим уравнениям. Например, такими уравнениями могут быть уравнения моделей типа реакция–диффузия с нелинейными источниками.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ ТИПА ДИФФУЗИОННЫХ ЦЕПОЧЕК ТОДЫ

Общий вид моделей, исследуемых в данной работе, можно представить в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \mathbf{D}\Delta\mathbf{U}, \tag{6}$$

где $\mathbf{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_M\}$ — вектор состояния элемента среды, например концентрации вступающих в реакцию химических веществ, $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ — некоторая нелинейная вектор-функция, а $\mathbf{D}$ — матрица коэффициентов диффузии компонент среды. Эти уравнения обычно называются уравнениями типа реакция–диффузия. Классификация этих моделей обычно проводится исходя из вида нелинейного источника в правой части, так называемой нуль-изоклины [3, 5]. Вид нуль-изоклины и соответствующая ей классификация отражают характер равновесного состояния в среде и способы его достижения при заданной форме нелинейного источника. Однако такая классификация, полезная с точки зрения различия моделей по некоторым общим признакам, характеризующим физические процессы в целом, мало чувствительна к форме допустимых структур в таких моделях и их динамике, что определяется более тонкими характеристиками моделей.

Изложенная кратко в предыдущих разделах теория двумеризованных цепочек Тоды позволяет описать в общем несколько различных классов моделей диффузионных цепочек Тоды. Модели, очевидно, будут различаться по размерности N квадратичных форм и числу компонент M независимых неизвестных функций H_i, описывающих физические компоненты модели. Для двумеризонных цепочек Тоды эти числа жестко связаны, если на функции $\psi_i(z)$ не накладываются дополнительные ограничения. В этом случае $N = M$. В случае редукции двумеризованных цепочек Тоды число независимых компонент может уменьшиться. Например, такими редуцирующими условиями, важными для дальнейшего, являются условия периодичности двумеризованных цепочек Тоды. Таким образом, в общем случае $M \leq N$.

Размерность квадратичных форм, равная числу линейно независимых функций $\psi_i(z)$, из которых они строятся, (несколько условно) определяет число независимых пространственных структур (мод), одновременно эволюционирующих в системе. Эту размерность поэтому логично назвать числом пространственных мод или просто мод в системе. Число же независимых квадратичных форм определяет число различных физических компонент в системе, эволюционирующих одновременно. В случае интерпретации таких моделей с точки зрения моделей типа реакция–диффузия число M фактически равно числу различных компонент, участвующих в химических реакциях. В дальнейшем это число будем называть просто числом компонент системы.

В данной работе будут рассматриваться только системы диффузионных цепочек Тоды с двумя и тремя модами. Это обусловлено тем, что структура нелинейных источников в диффузионных цепочках Тоды существенно зависит от числа мод. Поэтому условия замыкания систем уравнений для диффузионных цепочек Тоды для разного количества мод различны, и при переходе от одной размерности квадратичных форм к другой требуется отдельный анализ соответствующих систем уравнений. Естественно этот анализ начинать с малых размерностей квадратичных форм, т. е. числа мод в системе.

3. МНОГОКОМПОНЕНТНЫЕ ДВУХМОДОВЫЕ МОДЕЛИ

Двухкомпонентные двухмодовые модели были рассмотрены ранее [8]. Эти модели не имеют несингулярных периодических решений в виде двухкомпонентных квадратичных форм [8]. Однако несингулярные периодические решения существуют для многокомпонентных двухмодовых систем. Такие системы описываются уравнениями вида [8]

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - D_i \Delta u_i = e^{-2u_i}\left(l_i + e^{u_i}\sum_{k=1}^{n} m_{ik} e^{u_k}\right), \tag{7}$$

где $u_i = \ln \Psi_i(z, \bar{z}, t)$, а решения для функций $\Psi_i(z, \bar{z}, t)$ представляются квадратичными формами относительно функций ψ_1, ψ_2:

$$\Psi_i(z, \bar{z}, t) = |g(z)|^2 \left\{a_i(t)|\psi_1|^2 + b_i(t)|\psi_2|^2 + c_i(t)\psi_1\psi_2^* + c_i^*(t)\psi_2\psi_1^*\right\}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

коэффициенты которых удовлетворяют уравнениям

$$\dot{a}_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} a_j, \quad \dot{b}_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} b_j, \quad \dot{c}_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} c_j, \ i = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

$$(a_i b_i - |c_i|^2) f_i^2 D_i = l_i = \text{const}, \quad |W_{12}|^2 |g|^4 = 1. \tag{10}$$

Здесь $W_{12}(z) = [\psi_1(z), \psi_2(z)]$. Исходя из требования действительности $\Psi_i(z, \bar{z}, t)$, функции $a_i(t)$ и $b_i(t)$ должны быть действительными, а $c_i(t)$ могут быть комплексными.

Опишем общую конструкцию этих решений сначала в общем случае. Пусть $\mathbf{n}^{(a)}$, $a = 1, \ldots, n$, — совокупность собственных векторов действительной матрицы $\mathbf{M} = (m_{ij})$, соответствующих собственным числам λ_a:

$$m_{ij} = \sum_{a=1}^{n} \lambda_a \bar{n}_j^{(a)} n_i^{(a)}. \tag{11}$$

Здесь $\bar{n}_i^{(a)}$ — компоненты сопряженных собственных векторов. Собственные и сопряженные им векторы удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{n}_i^{(a)} n_i^{(b)} = \delta^{ab}.$$

В силу действительности матрицы $\mathbf{M}$ каждому комплексному ее собственному числу λ_a соответствует комплексно-сопряженное число $\lambda_b = \lambda_a^*$. Соответствующие собственные векторы также будут комплексно сопряжены. Тогда решения для коэффициентов можно представить в виде

$$a_i(t) = \sum_{a=1}^{n} A_a n_i^{(a)} \exp(\lambda_a t), \quad b_i(t) = \sum_{a=1}^{n} B_a n_i^{(a)} \exp(\lambda_a t),$$
$$c_i(t) = \sum_{a=1}^{n} C_a n_i^{(a)} \exp(\lambda_a t). \tag{12}$$

Постоянные A_a, B_a, C_a должны выбираться таким образом, чтобы функции $a_i(t)$ и $b_i(t)$ были действительными и выполнялись n соотношений (10). Подстановка этих соотношений в (12) приводит, вообще говоря, к совокупности из n^2 алгебраических уравнений для постоянных A_a, B_a, C_a. В соотношениях

$$\sum_{a,b=1}^{n} D_i n_i^{(a)} n_i^{(b)} \exp\left[(\lambda_a + \lambda_b)t\right](A_a B_b - C_a C_b^* - C_a^* C_b) = l_i = \text{const}, \quad i = 1, \dots, n$$

коэффициенты при экспонентах, у которых показатели $\lambda_a + \lambda_b$ отличны от нуля, должны обращаться в нуль. Однако в некоторых случаях число уравнений меньше чем n^2, и тогда имеются решения с постоянными параметрами модели l_i.

Рассмотрим в качестве примера случай $n = 3$. Потребуем, чтобы собственные числа матрицы $\mathbf{M}$ имели значения $(0, -i\Omega, +i\Omega)$. Пусть $\mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}, \mathbf{n}^{(3)} = \mathbf{n}^{(2)*}$ — соответствующие им собственные векторы. Вектор $\mathbf{n}^{(1)}$ имеет действительные компоненты. Векторы $\bar{\mathbf{n}}^{(2,3)}$, сопряженные собственным векторам матрицы $\mathbf{M}$, равны просто комплексно-сопряженным векторам: $\bar{\mathbf{n}}^{(2,3)} = \mathbf{n}^{2,3*}$, причем

$$\sum_{i=1}^{3} n_i^{a*} n_i^{a} = 0, \quad a = 2, 3.$$

Поэтому

$$m_{ij} = i\Omega(n_j^{(2)*} n_i^{(2)} - n_i^{(2)*} n_j^{(2)}), \quad i, j = 1, 2, 3$$

и функции $a_i(t), b_i(t), c_i(t)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}
a_i(t) &= a_0 n_i^{(1)} + A n_i^{(2)} e^{i\Omega t} + A^* (n_i^{(2)})^* e^{-i\Omega t},\\
b_i(t) &= b_0 n_i^{(1)} + B n_i^{(2)} e^{i\Omega t} + B^* (n_i^{(2)})^* e^{-i\Omega t},\\
c_i(t) &= c_0 n_i^{(1)} + C_1 n_i^{(2)} e^{i\Omega t} + C_2 (n_i^{(2)})^* e^{-i\Omega t},\\
c_i^*(t) &= c_0^* n_i^{(1)} + C_2^* n_i^{(2)} e^{i\Omega t} + C_1^* (n_i^{(2)})^* e^{-i\Omega t}.
\end{aligned}$$

Числа a_0, b_0 — действительные, A, B, c_0, C_1, C_2 — комплексные. Подставляя эти решения в соотношения (10), получаем следующую систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
&a_0 B + b_0 A = c_0 C_2^* + c_0^* C_1,\\
&AB = C_1 C_2^*,\\
&D_i \left[(a_0 b_0 - |c_0|^*)(n_i^{(1)})^2 + (A^* B + AB^* - |C_1|^2 - |C_2|^2) n_i^{(2)} (n_i^{(2)})^*\right] = l_i, \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Из первых двух уравнений этой системы находятся, например, комплексные постоянные A и B:

$$B = \frac{1}{2a_0}(c_0 C_2^* + c_0^* C_1) \pm \sqrt{\frac{1}{4a_0^2}(c_0 C_2^* + c_0^* C_1)^2 - C_1 C_2^* \frac{b_0}{a_0}}, \quad A = \frac{C_1 C_2^*}{B}. \tag{13}$$

После этого остается еще восемь действительных постоянных, три из которых при заданных значениях D_i и l_i находятся из последних трех действительных алгебраических условий. Для того чтобы соответствующие решения системы (7) не были сингулярными (необходимое условие), требуется, чтобы функции a_i, b_i, c_i одновременно не обращались в нуль. Достаточными условиями являются требования

$$|a_0| > |A|, \quad |b_0| > |B|, \quad |c_0|^2 > \frac{1}{2}(|C_1|^2 + |C_2|^2)$$

и требования к функциям ψ_1, ψ_2: а) эти функции не имеют полюсов и б) они одновременно не обращаются в нуль.

Таким образом, показано, что трехкомпонентные модели диффузионных цепочек Тоды с двухмодовым возбуждением имеют точные периодические несингулярные решения.

4. ТРЕХМОДОВЫЕ МОДЕЛИ. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В качестве примеров многокомпонентных моделей с трехмодовым возбуждением рассмотрим модели, описывающиеся уравнениями двух типов. Первая из них соответствует уравнениям следующего типа:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi_j^{-1} - D_j \Delta \ln \Psi_j = F_j(\Psi_1, \Psi_2, \ldots), \tag{14}$$

а вторая — более привычным уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln \Psi_j - D_j \Delta \ln \Psi_j = G_j(\Psi_1, \Psi_2, \ldots). \tag{15}$$

Для удобства первый тип моделей (14) будем называть моделями с нелинейной диффузией, а второй — с линейной. После замены переменных по формулам $u_j = \ln \Psi_j$ эти уравнения соответственно приобретают вид диффузионных цепочек Тоды:

$$\frac{\partial}{\partial t}u_j + D_j e^{u_j}\Delta u_j = e^{u_j}F_j(e^{u_1}, e^{u_2}, \ldots),$$
$$\frac{\partial}{\partial t}u_j - D_j \Delta u_j = G_j(e^{u_1}, e^{u_2}, \ldots).$$

Заметим, что уравнения типа (14) с помощью замены $\Psi_j \to 1/\Psi_j$ могут быть записаны и в несколько иной форме, а именно

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi_j + D_j \Delta \ln \Psi_j = F_j\left(\frac{1}{\Psi_1}, \frac{1}{\Psi_2}, \ldots\right). \tag{16}$$

Задача данного раздела — вычислить тип нелинейности и построить классы точных решений для некоторых моделей.

Решения для трехмодовых моделей имеют, согласно общей классификации, предложенной в разд. 2, представление в виде трехмерных квадратичных форм,

$$\Psi_j(z, \bar{z}, t) = |w(z)|^2 \left[a_j(t)|\psi_1|^2 + b_j(t)|\psi_2|^2 + c_j(t)|\psi_3|^2\right], \tag{17}$$

относительно линейно независимых дифференцируемых функций $\psi_1(z), \psi_2(z), \psi_3(z)$ с множителем $|w(z)|^2$, вводимым для общности решений. Для этих функций, согласно общим соотношениям, рассмотренным в разд. 1, имеются следующее тождества:

$$\Delta \ln \Psi_j = \frac{a_j b_j |W_{12}|^2 + b_j c_j |W_{23}|^2 + a_j c_j |W_{13}|^2}{\Psi_j^2}, \tag{18}$$

где

$$W_{\alpha\beta}(z) = [\psi_\alpha, \psi_\beta], \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

Введем дополнительно функции вида

$$\Phi_j(z, \bar{z}, t) = a_j b_j |W_{12}|^2 + b_j c_j |W_{23}|^2 + a_j c_j |W_{13}|^2 = A_j |W_{23}|^2 + B_j |W_{31}|^2 + C_j |W_{12}|^2, \tag{19}$$

где

$$\begin{aligned} &A_j(t) = c_j b_j = \frac{Q_j}{a_j}, \quad B_j(t) = a_j c_j = \frac{Q_j}{b_j}, \quad C_j(t) = a_j b_j = \frac{Q_j}{c_j}, \\ &Q_j(t) = a_j(t) b_j(t) c_j(t). \end{aligned} \tag{20}$$

Согласно (5), для произвольных $\psi_1(z), \psi_2(z), \psi_3(z)$ функции Φ_j удовлетворяют тождеству

$$\Delta \ln \Phi_j = a_j b_j c_j |W_{123}|^2 \frac{a_j |\psi_1|^2 + b_j |\psi_2|^2 + c_j |\psi_3|^2}{\Phi^2}, \tag{21}$$

где

$$W_{123}(z) = \det \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_1' & \psi_1'' \\ \psi_2 & \psi_2' & \psi_2'' \\ \psi_3 & \psi_3' & \psi_3'' \end{pmatrix}$$

— определитель Вронского функций ψ_i. Исходя из этих тождеств можно получить общие соотношения для функций $a_j(t), b_j(t), c_j(t)$, при которых функции Ψ_j и Φ_j удовлетворяют уравнениям типа (14) или (15).

Если не накладывать никаких ограничений на вид функций $\psi_i(z)$, то сложно найти такие условия, при которых в правой части уравнения (14) или (15) не будет функций, явным образом зависящих от времени. Действительно, в общем случае функции $|\psi_i|^2$ и $|W_{ij}|^2$ линейно независимы. Поэтому производные по времени от функций Ψ_j могут зависеть только от Ψ_j, а производные от функций Φ_j — только от Φ_j. Следствием этого и условия постоянства коэффициентов исходных уравнений являются уравнения

$$\dot{a}_j = \sum_{k=1}^{L} m_{jk} a_k, \quad \dot{b}_j = \sum_{k=1}^{L} m_{jk} b_k \quad \dot{c}_j = \sum_{k=1}^{L} m_{jk} c_k, \tag{22}$$

где $m_{ik} = \text{const}$, а L — число компонент исходной системы. Соотношения для A_j, B_j, C_j теперь автоматически следуют из (22). Форма (линейность) и размерность систем уравнений для A_j, B_j, C_j должна быть такой же, как и (22). Поэтому число различных собственных чисел системы характеристических уравнений для A_j, B_j, C_j не должно превышать L. Поскольку функции A_j, B_j, C_j выражаются через парные произведения функций a_j, b_j, c_j, число их различных собственных чисел в общем случае удваивается. Последнее накладывает существенные ограничения на матрицу коэффициентов (m_{ik}) в (22), удовлетворить которым оказывается сложно.

Другой способ построить разрешимую систему уравнений динамики мод состоит в принятии некоторых ограничений на вид функций $\psi_i(z)$, которые носят характер условий периодичности двумеризованных цепочек Тоды.

Потребуем, чтобы выполнялись соотношения

$$W_{12} = k_3 g(z)\psi_3, \quad W_{23} = k_1 g(z)\psi_1, \quad W_{31} = k_2 g(z)\psi_2, \tag{23}$$

где k_1, k_2, k_3 — комплексные постоянные, а $g(z)$ — некоторая произвольная функция. В результате функции Φ будут иметь тот же общий вид (17), что и функции Ψ.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (23) относительно функций ψ_1, ψ_2, ψ_3 имеет общее решение вида

$$\psi_1(z) = q_1 f(z)\cos\xi(z), \quad \psi_2(z) = q_2 f(z)\sin\xi(z), \quad \psi_3(z) = f(z), \quad \frac{d}{dz}\xi(z) = \frac{q_3}{g(z)f(z)},$$

где

$$q_1 = i\sqrt{\frac{k_3}{k_1}}, \quad q_2 = i\sqrt{\frac{k_3}{k_2}}, \quad q_3 = \sqrt{k_1 k_2}.$$

а функция $f(z)$ — произвольна.

5. ТРЕХМОДОВЫЕ МОДЕЛИ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИЕЙ

Рассмотрим сначала простейшую однокомпонентную модель типа (14). Подстановка (23) в (21) приводит к следующему тождеству:

$$\Delta \ln \Psi = |w(z)|^4 |g(z)|^2 \frac{ab|k_3|^2|\psi_3|^2 + bc|k_1|^2|\psi_1|^2 + ac|k_2|^2|\psi_2|^2}{\Psi^2}. \tag{24}$$

В однокомпонентной модели требование, что нелинейность имеет вид функции, зависящей только от самой неизвестной функции приводит к требованию $g(z) = 1/w(z)$ и следующим уравнениям для функций $a(t), b(t), c(t)$:

$$\dot{a} - D_1 bc|k_1|^2 = \lambda a, \quad \dot{b} - D_1 ac|k_2|^2 = \lambda b, \quad \dot{c} - D_1 ab|k_3|^2 = \lambda c. \tag{25}$$

Эта система подобна уравнениям, встречающимся в задачах трехволнового взаимодействия, и интегрируется в квадратурах. Ее общее решение строится из следующих соотношений, получающихся прямо из (25):

$$a^2 = \left(\alpha_0 + 2D_1|k_1|^2 \int \exp(-2\lambda t')Q\,dt'\right)\exp(2\lambda t),$$

$$b^2 = \left(\beta_0 + 2D_1|k_2|^2 \int \exp(-2\lambda t')Q\,dt'\right)\exp(2\lambda t),$$

$$c^2 = \left(\gamma_0 + 2D_1|k_3|^2 \int \exp(-2\lambda t')Q\,dt'\right)\exp(2\lambda t),$$

где $Q(t) = a(t)b(t)c(t)$, а $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ — постоянные. Перемножая эти уравнения, находим, что $Q(t)$ удовлетворяет уравнению

$$Q^2 = \left(\alpha_0 + 2D_1|k_1|^2 \int \exp(-2\lambda t')Q dt'\right) \left(\beta_0 + 2D_1|k_2|^2 \int \exp(-2\lambda t')Q dt'\right) \times$$
$$\times \left(\gamma_0 + 2D_1|k_3|^2 \int \exp(-2\lambda t')Q dt'\right) \exp(6\lambda t).$$

Если ввести функцию $P = \int \exp(-2\lambda t')Q dt'$, то для нее получаем следующее уравнение:

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)^2 = (\alpha_0 + 2D_1|k_1|^2 P)(\beta_0 + 2D_1|k_2|^2 P)(\gamma_0 + 2D_1|k_3|^2 P)e^{2\lambda t},$$

которое сводится к эллиптическому интегралу

$$\int \frac{dP}{\sqrt{(\alpha_0 + 2D_1|k_1|^2 P)(\beta_0 + 2D_1|k_2|^2 P)(\gamma_0 + 2D_1|k_3|^2 P)}} = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} + C_0.$$

Здесь C_0 — постоянная интегрирования.

Два частных решения этих уравнений можно записать в элементарных функциях. Одно — в тригонометрических функциях:

$$a(t) = \frac{a_0 e^{\lambda t}}{\cos\theta}, \quad b(t) = \frac{b_0 e^{\lambda t}}{\cos\theta}, \quad c(t) = c_0 e^{\lambda t} \operatorname{tg}\theta, \tag{26}$$

где

$$\theta(t) = \theta_0 \pm D_1 c_0 |k_1||k_2| \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}, \quad a_0 = \pm c_0 \frac{|k_1|}{|k_3|}, \quad b_0 = \pm c_0 \frac{|k_2|}{|k_3|}, \tag{27}$$

c_0 — произвольная действительная постоянная. Второе — в гиперболических функциях:

$$a(t) = \frac{a_0 e^{\lambda t}}{\operatorname{sh}\theta}, \quad b(t) = \frac{b_0 e^{\lambda t}}{\operatorname{sh}\theta}, \quad c(t) = c_0 e^{\lambda t} \operatorname{cth}\theta, \tag{28}$$

где все постоянные и функция $\theta(t)$ удовлетворяют тем же соотношениям (27). Заметим, что оба решения подбором постоянных могут быть сделаны несингулярными на любом интервале времени $t > t_0$, поскольку функция $\theta(t)$, играющая роль фазы колебаний в среде, подбором постоянных может быть сделана ограниченной функцией на этом интервале времени.

Таким образом, построены точные решения однокомпонентной диффузионной модели следующего вида:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \Psi^2 D_1 \Delta \ln\Psi + \lambda\Psi, \tag{29}$$

или в форме диффузионных цепочек Тоды

$$-\frac{\partial}{\partial t}u = D_1 e^u \Delta u + \lambda, \tag{30}$$

где $u = \ln\Psi$. Эту же модель можно представить и в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}v = -D_1 \nabla\left(\frac{1}{v}\nabla v\right) + \lambda v, \tag{31}$$

где $v = 1/\Psi$. Форма этих уравнений объясняет название соответствующих моделей — модели с нелинейной диффузией.

Для двухкомпонентной модели типа (14) с компонентами вида

$$\Psi(z,\bar z,t) = |w(z)|^2\left(a(t)|\psi_1|^2 + b(t)|\psi_2|^2 + c(t)|\psi_3|^2\right),$$
$$\Phi(z,\bar z,t) = |w(z)|^2\left(A(t)|\psi_1|^2 + B(t)|\psi_2|^2 + C(t)|\psi_3|^2\right)$$

условия замыкания модели сводятся к условию $g(z) = 1/w(z)$ и к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов квадратичных форм следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot a + D_1 bc|k_1|^2 &= \mu_1 A + \lambda_1 a,\\ \dot b + D_1 ac|k_2|^2 &= \mu_1 B + \lambda_1 b,\\ \dot c + D_1 ab|k_3|^2 &= \mu_1 C + \lambda_1 c, \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} \dot A + D_2 BC|k_1|^2 &= \mu_2 A + \lambda_2 a,\\ \dot B + D_2 AC|k_2|^2 &= \mu_2 B + \lambda_2 b,\\ \dot C + D_2 AB|k_3|^2 &= \mu_2 C + \lambda_2 c. \end{aligned} \tag{33}$$

Эта система, по-видимому, не является полностью интегрируемой и допускает сложное поведение решений. Уравнения этой модели при этом следующие:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi_1^{-1} - D_1\Delta\ln\Psi_1 = \frac{\mu_1\Psi_2 + \lambda_1\Psi_1}{\Psi_1^2}, \tag{34}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi_2^{-1} - D_2\Delta\ln\Psi_2 = \frac{\mu_2\Psi_2 + \lambda_2\Psi_1}{\Psi_2^2}, \tag{35}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}u + D_1\nabla\left(\frac{1}{u}\nabla u\right) = \frac{u}{v}(\mu_1 u + \lambda_1 v), \tag{36}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v + D_2\nabla\left(\frac{1}{v}\nabla v\right) = \frac{v}{u}(\mu_2 u + \lambda_2 v), \tag{37}$$

где $u = \Psi_1^{-1}$, $v = \Psi_2^{-1}$.

Многокомпонентные системы типа (14) в случае условий (23) имеют уравнения замыкания, сводящиеся к совокупности уравнений вида аналогичного (32)

$$\dot a_j + D_j b_j c_j|k_1|^2 = \sum_{k=1}^{L}\mu_{jk}a_k,$$

$$\dot b_j + D_j a_j c_j|k_2|^2 = \sum_{k=1}^{L}\mu_{jk}b_k,$$

$$\dot c_j + D_j a_j b_j|k_3|^2 = \sum_{k=1}^{L}\mu_{jk}c_k,$$

$j = 1, 2, \ldots, L$, L — число компонент в системе. Соответствующие уравнения модели имеют следующую форму:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi_j^{-1} - D_j \Delta \ln \Psi_j = \frac{\sum\limits_{k=1}^{L} \mu_{jk}\Psi_k}{\Psi_j^2}, \quad j = 1, 2, \ldots, L.$$

6. ТРЕХМОДОВЫЕ МОДЕЛИ С ЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИЕЙ

Рассмотрим теперь модели типа (15). Однокомпонентная модель этого типа имеет тривиальную временную динамику. Пусть функция Ψ имеет вид (17), тогда условия замыкания модели сводятся к уравнениям

$$a(t) = a_0 e^{\lambda t}, \quad b(t) = b_0 e^{\lambda t}, \quad c(t) = c_0 e^{\lambda t},$$

где a_0, b_0, c_0 — постоянные, а сама модель описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \Psi - D_1 \Delta \ln \Psi = \lambda + D_1 q_0 \frac{e^{\lambda t}}{\Psi}$$

при некоторых дополнительных условиях на постоянные k_1, k_2, k_3, q_0.

Двухкомпонентные модели обладают более сложной динамикой, аналогичной динамике моделей типа (14), рассмотренной выше. Пусть первой компоненте соответствует квадратичная форма (17), а второй — (19). Тогда условия замыкания системы уравнений этой модели с учетом (24) и (23) сводятся к переопределенной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \lambda a + \mu A(t), & D_1 bc|k_1|^2 &= \nu a + \kappa A(t), \\ \dot{b} &= \lambda b + \mu B(t), & D_1 ac|k_2|^2 &= \nu b + \kappa B(t), \\ \dot{c} &= \lambda c + \mu C(t), & D_1 ab|k_3|^2 &= \nu c + \kappa C(t). \end{aligned} \tag{38}$$

К этой системе следует еще добавить уравнения для коэффициентов A, B, C, которые следуют из условий замыкания модели и должны иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \lambda_1 a + \mu_1 A, & D_2 BC|k_1|^2 &= \lambda_2 a + \mu_2 A, \\ \dot{B} &= \lambda_1 b + \mu_1 B, & D_2 AC|k_2|^2 &= \lambda_2 b + \mu_2 B, \\ \dot{C} &= \lambda_1 c + \mu_1 C, & D_2 AB|k_3|^2 &= \lambda_2 c + \mu_2 C. \end{aligned} \tag{39}$$

Однако совокупность уравнений (38) уже полностью определяет как вид функций a, b, c, так и вид функций A, B, C. Поэтому из этой системы можно вычислить и явный вид коэффициентов $\lambda_{1,2}$ и $\mu_{1,2}$, теперь уже функций времени. Действительно, из (38) следует, что функции a, b, c удовлетворяют той же системе уравнений (25):

$$\dot{a} = \Lambda a + R_1 bc|k_1|^2, \quad \dot{b} = \Lambda b + R_1 ac|k_2|^2, \quad \dot{c} = \Lambda c + R_1 ab|k_3|^2, \tag{40}$$

где $\Lambda = \lambda - \nu\mu/\kappa$, $R_1 = \mu D_1/\kappa$. Следствием этой системы являются соотношения

$$\frac{d}{dt}(bc) = 2\Lambda bc + R_1 a(|k_2|^2c^2 + |k_3|^2b^2),$$
$$\frac{d}{dt}(ac) = 2\Lambda ac + R_1 b(|k_3|^2a^2 + |k_1|^2c^2),$$
$$\frac{d}{dt}(ab) = 2\Lambda ab + R_1 c(|k_2|^2a^2 + |k_1|^2b^2).$$

Из тех же уравнений получаем

$$\frac{d}{dt}(|k_2|^2c^2 + |k_3|^2b^2) - 2\Lambda(|k_2|^2c^2 + |k_3|^2b^2) = 2R_1|k_2k_3|^2Q,$$
$$\frac{d}{dt}(|k_3|^2a^2 + |k_1|^2c^2) - 2\Lambda(|k_3|^2a^2 + |k_1|^2c^2) = 2R_1|k_1k_3|^2Q,$$
$$\frac{d}{dt}(|k_2|^2a^2 + |k_1|^2b^2) - 2\Lambda(|k_2|^2a^2 + |k_1|^2b^2) = 2R_1|k_1k_2|^2Q,$$

где $Q(t) = a(t)b(t)c(t)$. Решения этих уравнений можно записать в следующей форме:

$$|k_2|^2c^2 + |k_3|^2b^2 = \left[\alpha_0 + 2R_1|k_2k_3|^2P(t)\right]e^{2\Lambda t},$$
$$|k_3|^2a^2 + |k_1|^2c^2 = \left[\beta_0 + 2R_1|k_1k_3|^2P(t)\right]e^{2\Lambda t},$$
$$|k_2|^2a^2 + |k_1|^2b^2 = \left[\gamma_0 + 2R_1|k_2k_1|^2P(t)\right]e^{2\Lambda t}.$$

Здесь $P(t) = \int e^{-2\Lambda t}Q(t)dt$. Для замыкания системы постоянные интегрирования $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ следует выбрать равными

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_0}{|k_1|^2}, \quad \beta_0 = \frac{\sigma_0}{|k_2|^2}, \quad \gamma_0 = \frac{\sigma_0}{|k_3|^2}.$$

Объединяя полученные соотношения, окончательно находим

$$\lambda_1(t) = \left(\lambda - 2\frac{\mu\nu}{\kappa}\right)\frac{\nu}{\kappa} + \frac{D_1^2\mu}{\kappa^2}\left[\sigma_0 + 2R_1|k_1k_2k_3|^2P(t)\right]e^{2\Lambda t},$$
$$\mu_1(t) = 2\lambda - 3\frac{\mu\nu}{\kappa} = \text{const},$$
$$\lambda_2(t) = \frac{\nu^3 D_2}{\kappa^2 D_1} - \frac{D_1D_2\nu}{\kappa^2}\left[\sigma_0 + 2R_1|k_1k_2k_3|^2P(t)\right]e^{2\Lambda t} + \frac{D_1^2D_2}{\kappa^2}|k_1k_2k_3|^2Q(t),$$
$$\mu_2(t) = \frac{\nu^2 D_2}{\kappa D_1} = \text{const}.$$

В результате уравнения модели принимают следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\Psi - D_1\Delta\ln\Psi = \frac{\Psi(\lambda\Psi + \mu\Phi) + \nu\Psi + \kappa\Phi}{\Psi^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\Phi - D_2\Delta\ln\Phi = \frac{\Phi(\lambda_1(t)\Psi + \mu_1\Phi) + \lambda_2(t)\Psi + \mu_2\Phi}{\Phi^2}, \tag{41}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}u - D_1\Delta u = e^{-2u}\left(\lambda e^{2u} + \mu e^{u+v} + \nu e^u + \kappa e^v\right) \tag{42}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}v - D_2\Delta v = e^{-2v}\left[\lambda_1(t)e^{u+v} + \mu_1(t)e^{2v} + \lambda_2(t)e^u + \mu_2 e^v\right],$$

где $u = \ln\Psi$, $v = \ln\Phi$.

Как видно из приведенных примеров, условия замыкания однокомпонентных и двухкомпонентных моделей типа (15) приводят к нелинейностям, явно зависящим от времени специальным образом. По всей видимости, этот факт относится и к многокомпонентным моделям этого типа. Поэтому такие модели могут показаться менее полезными в качестве базовых для процессов распространения волн в активных средах и образования в них регулярных структур, чем модели типа (14) или модели с двухмодовым возбуждением. Однако на себя обращает внимание тот факт, что коэффициенты в уравнениях (41) и (42), явно зависящие от времени, имеют порядок величин D_1D_2 и $D_1^2D_2$. Поэтому в тех ситуациях, когда безразмерные коэффициенты диффузии являются малыми величинами, зависимостью коэффициентов от времени можно пренебречь. Таким образом, эти модели не менее полезны, чем модели (14), во многих реально встречающихся системах.

7. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ МОДЕЛЕЙ ТИПА ДИФФУЗИОННЫХ ЦЕПОЧЕК ТОДЫ

Как было продемонстрировано выше и в [8], модели диффузионных цепочек Тоды, допускающие точные решения в квадратичных формах, представляют собой достаточно богатый класс моделей. Этот класс моделей может быть расширен рассмотрением многокомпонентных систем и систем с многомодовым возбуждением исходя из более общей теории точных периодических двумеризованных цепочек Тоды, которая также может быть сформулирована на основе квадратичных форм (см. [11, 12]). Решения, допускаемые рассмотренными моделями, образуют классы точных решений, которые зависят от произвольных функциональных параметров. Хотя анализ устойчивости решений не проводился в данной работе, можно надеяться, что в силу произвольности функциональных параметров, от которых зависят решения, построенные классы решений достаточно устойчивы. Все это указывает на определенную выделенность рассмотренных моделей среди других базовых моделей. Поэтому представляет интерес найти те общие физические свойства диффузионных цепочек Тоды, отличающие их от других базовых моделей, которые бы объяснили существование в них особых условий, приводящих к образованию регулярных структур с простой эволюцией во времени. В связи с этим возникает также вопрос о физических принципах их конструирования и использования в качестве базовых моделей.

Обычным средством конструирования моделей автоволн являются кинетические уравнения или уравнения баланса физических параметров систем, дополненные членами, ответственными за диффузию отдельных компонент в этих системах, и нелинейными источниками, учитывающими взаимовлияние отдельных компонент друг на друга. Вид нелинейности обычно диктуется некоторыми простыми физическими соображениями, например вероятностным характером моделей типа Вольтерра–Лотке, или формой закона действующих масс и требованиями обращения нелинейности в нуль в точках равновесия среды для моделей типа реакция–диффузия.

Одной из характерных черт моделей диффузионных цепочек Тоды является наличие нелинейности типа нелинейности в цепочках Тоды, т. е. суммы экспонент с показателями, кратными полям модели. Обычно в теории автоволн такие типы нелинейности в явном виде не появляются, поскольку, например, кинетические уравнения, описывающие изменение концентраций веществ, содержат степенные нелинейности, что обусловлено формой закона действующих масс. Если следовать этим соображениям при интерпретации и анализе моделей диффузионных цепочек Тоды, то естественно стараться придать им форму, в которой нелинейность имеет вид рациональных функций от компонент модели. Нетрудно убедиться, что уравнения диффузионных цепочек Тоды, записанные относительно неизвестных функций Ψ_i, оказываются похожими на кинетические уравнения с диффузией относительно концентраций веществ с нелинейностями в форме рациональных функций, например, (34), (41). Однако диффузионный оператор при такой форме записи хотя и превращается вновь в диффузионный, но с появлением дополнительных членов. Эти члены описывают физические процессы, которых нет при другой форме записи, соответствующей общей форме диффузионных цепочек Тоды. Например,

$$\Psi_i \Delta \ln \Psi_i = \Delta \Psi_i - \frac{(\nabla \Psi_i)^2}{\Psi_i}.$$

Последний член в правой части этого выражения может быть интерпретирован как перенос вещества с концентрацией Ψ_i течением, имеющим поле скорости $\mathbf{v} = \nabla \Psi_i / \Psi_i$. Хотя на самом деле адвекции в модели нет, дополнительный источник таков, что он полностью эквивалентен адвективному переносу. Таким образом, модели диффузионных цепочек Тоды содержат некоторые дополнительные физические механизмы переноса вещества к обычно рассматриваемым механизмам в базовых моделях [3].

Для того чтобы продемонстрировать роль этих дополнительных механизмов в динамике моделей диффузионных цепочек Тоды, рассмотрим формальный способ построения моделей такого типа исходя из стандартных кинетических моделей. В качестве такой модели рассмотрим модель Вольтерра–Лотке (хищник–жертва) без диффузии, уравнения которой имеют вид

$$\dot{N}_1 = \kappa_1 N_1 - \alpha N_1 N_2, \quad \dot{N}_2 = \beta N_1 N_2 - \kappa_2 N_2.$$

Здесь $\kappa_1, \kappa_2, \alpha, \beta$ — постоянные. Следуя общей идеологии диффузионных цепочек Тоды, вместо концентраций N_1 и N_2 следует ввести условные энтропии каждой компоненты системы по формуле

$$S_1 = -\ln N_1, \quad S_2 = -\ln N_2. \tag{43}$$

Тогда уравнения модели примут вид производства энтропии каждой компоненты системы:

$$\dot{S}_1 = -\kappa_1 + \alpha \exp(-S_2), \quad \dot{S}_2 = -\beta \exp(-S_1) + \kappa_2. \tag{44}$$

Постоянные κ_1 и κ_2, описывающие естественную рождаемость жертв и естественную смертность хищников, в такой постановке соответствуют естественному постоянному приросту энтропии в компоненте 1 (жертвы) и постоянной убыли энтропии в компоненте 2 (хищники). В этом случае энтропию следует понимать скорее как меру числа доступных состояний системы, а не как меру ее неупорядоченности. При такой ее интерпретации оставшиеся элементы уравнений описывают также производство компонент энтропии, связанное со взаимовлиянием подсистем друг на друга. Таким образом, система уравнений (44) уже имеет форму, соответствующую моделям типа цепочки Тоды, и имеет смысл уравнений производства компонент энтропии. Очевидно, что в кинетических моделях без диффузии с рациональными нелинейностями замены типа (43) будут всегда приводить к уравнениям типа цепочек Тоды.

Рассмотрим теперь переход от кинетических моделей без диффузии к моделям с диффузией. При таком переходе уравнения (43) дополняют диффузионным потоком «вещества». В результате получаются уравнения следующего типа:

$$\dot{N}_1 - D_1\Delta N_1 = \kappa_1 N_1 - \alpha N_1 N_2, \quad \dot{N}_2 - D_2\Delta N_2 = \beta N_1 N_2 - \kappa_2 N_2. \tag{45}$$

Здесь D_1 и D_2 — коэффициенты диффузии каждой из компонент системы. Других механизмов переноса «вещества» данная модель не содержит.

Если теперь воспользоваться подстановкой (43), то в уравнениях для условных энтропий компонент системы появятся члены, которые по форме можно интерпретировать как адвективный перенос вещества со скоростями среды $\mathbf{v}_1 = -D_1\nabla S_1$ для первой компоненты и $\mathbf{v}_2 = -D_2\nabla S_2$ для второй:

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 - D_1\Delta S_1 - D_1(\nabla S_1)^2 &= -\kappa_1 + \alpha\exp(-S_2), \\ \dot{S}_2 - D_2\Delta S_2 - D_2(\nabla S_2)^2 &= -\beta\exp(-S_1) + \kappa_2. \end{aligned} \tag{46}$$

В исходной модели эти члены отсутствуют, поэтому, чтобы избежать их появления при построении модели диффузионных цепочек Тоды, следует уравнения (44) дополнить диффузионным потоком именно энтропии. Тогда (44) приобретают форму

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 - D_1\Delta S_1 &= -\kappa_1 + \alpha\exp(-S_2), \\ \dot{S}_2 - D_2\Delta S_2 &= -\beta\exp(-S_1) + \kappa_2. \end{aligned} \tag{47}$$

Эта система уравнений уже имеет форму двухкомпонентных диффузионных цепочек Тоды и подобна моделям, рассмотренным здесь и в [8].

Отличие уравнений (46) от (47) состоит в дополнительном источнике энтропии, величина которого во всем пространстве всегда положительна:

$$J_1 = D_1(\nabla S_1)^2 > 0, \quad J_2 = D_1(\nabla S_2)^2 > 0.$$

Влияние этих источников можно понять, опираясь на их аналогичность адвективному переносу энтропии, обусловленному течением среды со скоростями

$$\mathbf{u}_1 = -D_1\nabla S_1, \quad \mathbf{u}_2 = -D_2\nabla S_2.$$

Как видно, скорости адвективного переноса соответствуют переносу энтропии в направлении, обратном ее градиенту, т. е. эти источники ускоряют выравнивание контрастов энтропий. Отсутствие этих источников в (47) означает, что в этой модели контрасты как энтропий, так и концентраций выравниваются медленнее. Именно это указывает на причину, по которой в моделях с диффузией энтропии типа диффузионных цепочек Тоды более «легко» возникают регулярные структуры: специфическое замедление процесса диффузионного размывания контрастов благоприятствует формированию регулярных структур.

Этот факт, в свою очередь, указывает общий путь для конструирования базовых моделей типа диффузионных цепочек Тоды, описывающих процессы возникновения регулярных структур в активных средах с диффузией. Действительно, если имеется некоторая модель вида

$$\frac{\partial}{\partial t}N_i - D_i\Delta N_i = R(N_1,\ldots,N_n), \quad i=1,\ldots,n,$$

где $R(N_1,\ldots,N_n)$ — рациональная функция своих аргументов, то на ее основе можно с помощью подстановки $N_i \to S_i = -\ln N_i$ перейти к уравнениям типа диффузионных цепочек Тоды,

$$\frac{\partial}{\partial t}S_i - D_i\Delta S_i = R\left(\exp(-S_1),\ldots,\exp(-S_n)\right), \quad i=1,\ldots,n,$$

в которых дополнительно осуществлен переход от диффузии концентраций к диффузии энтропий.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как было показано выше, существует богатый класс моделей, описывающих волны в активных средах с диффузией (модели типа реакция—диффузия) и по форме уравнений представляющих собой модели типа диффузионных цепочек Тоды. Основным отличительным свойством этих моделей является то, что они допускают достаточно представительные классы точных решений. Это позволяет использовать эти модели в качестве базовых для исследования различных явлений и типов волн в активных средах. Одним из основных результатов данной работы является дальнейшее развитие метода построения точных решений уравнений этих моделей, начатых в работе [8] для нескольких основных видов моделей диффузионных цепочек Тоды. Другим важным результатом данной работы является анализ основных способов построения моделей типа диффузионных цепочек Тоды исходя из стандартных базовых моделей с нелинейными источниками в форме неизвестных степенных функций (концентраций). Как показано, такой переход формально можно осуществить во многих интересных с точки зрения практического использования случаях, заменяя в уравнениях концентрации величинами, имеющими смысл энтропий пространственного распределения компонент системы, и заменяя диффузионные потоки вещества на диффузионные потоки энтропии.

В данной работе не проводилось какого-либо сопоставления исследованных моделей с уже достаточно стандартной классификацией на основе формы нуль-изоклин нелинейных источников [3, 5]. С одной стороны, это обусловлено большим многообразием формы источников в диффузионных цепочках Тоды, а с другой стороны тем, что, как это было показано в [8], комбинируя переменные и уравнения многокомпонентных систем, можно получить источники с различной формой изоклин по классификации [3] при формальной неизменности формы решений в классе квадратичных форм.

Литература

1. Г. Хакен, *Синергетика*, Мир, Москва (1980).
2. И. Пригожин, *От существующего к возникающему*, Наука, Москва (1991).
3. В. А. Васильев, Ю. М. Романовский, В. Г. Яхно, *Автоволновые процессы*, под ред. Д. С. Чернавского, Наука, Москва (1987).
4. В. А. Давыдов, В. Г. Морозов, УФН **166**(3), 327 (1996).
5. Б. С. Кернер, В. В. Осипов, *Автосолитоны: локализованные сильно-неравновесные области в однородных диссипативных системах*, Наука, Москва (1991).
6. В. А. Давыдов, В. С. Зыков, А. С. Михайлов, УФН **161**, 45 (1991).
7. П. К. Бражник, В. А. Давыдов, А. С. Михайлов, ТМФ **74**, 440 (1988).
8. В. М. Журавлев, Письма в ЖЭТФ **65**, 285 (1997).
9. М. Тода, *Теория нелинейных решеток*, Мир, Москва (1984).
10. В. Г. Дринфельд, В. В. Соколов, в сб. *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики*, т. 24, ВИНИТИ, Москва (1984), с. 81.
11. А. Н. Лезнов, М. В. Савельев, *Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем*, Наука, Москва (1985).
12. A. Lesnov and M. Savel'ev, Physica D **3**, 6272 (1981).
13. В. М. Журавлев, ПММ **58**(6), 61 (1994).
14. В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, ТМФ **111**, 323 (1997).
15. В. В. Козлов, *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике*, Изд.-во Удмуртского гос. ун-та, Ижевск (1995).