ЖЭТФ, 1998, том 114, вып. 6(12), стр. 1930–1943

КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ ПОТЕНЦИАЛОВ СОЛИТОННОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ

*Б. Ф. Самсонов**

Томский государственный университет
634050, Томск, Россия

Поступила в редакцию 10 июня 1998 г.

Исследуются спектральные свойства наиболее общих нестационарных потенциалов солитонного типа, описываемых некоторым самосопряженным оператором, действующим в гильбертовом пространстве. Получено спектральное разложение для них и квазиспектральное разложение для операторов преобразования Дарбу. Рассмотрены когерентные состояния указанных систем. Вычислена мера, реализующая разложение единичного оператора по проекторам на когерентные состояния.

1. ВВЕДЕНИЕ

Когерентные состояния как нерасплывающиеся волновые пакеты были впервые введены Шредингером [1] для гармонического осциллятора. К настоящему времени они нашли весьма широкое применение в самых различных областях физики и математики [2–4]. Различные аспекты когерентных состояний неоднократно обсуждались в многочисленных обзорах (см., например, [5–7]) и монографиях [2–4].

Необходимо отметить, что в настоящее время нет единого общепринятого определения когерентных состояний и разные авторы вкладывают различный смысл в этот термин. Анализ имеющихся определений показывает, что наиболее характерными свойствами таких состояний, описываемых векторами $\psi_z(x,t)$, которые можно взять в качестве их определения, являются следующие [8]: 1) векторы $\psi_z(x,t)$ являются элементами некоторого гильбертова пространства H состояний рассматриваемой системы; 2) параметр z принимает непрерывные значения из некоторой области $\mathscr{D}$ n-мерного комплексного пространства; 3) векторы $\psi_z(x,t)$ обладают временно́й стабильностью; 4) существует мера $\mu = \mu(z,\bar{z})$ (чертой мы обозначаем комплексное сопряжение), реализующая разложение единичного оператора $\mathscr{I}$, действующего в H,

$$\int_{\mathscr{D}} d\mu |\psi_z\rangle\langle\psi_z| = \mathscr{I}. \tag{1}$$

Под временно́й стабильностью понимается то, что состояния, описываемые векторами $\psi_z(x,t)$, в любой момент времени остаются когерентными, т. е. удовлетворяют свойствам 1, 2 и 4. Чтобы удовлетворить этому условию, будем считать, что функции $\psi_z(x,t)$ являются решениями уравнения Шредингера

$$(i\partial_t - h_0)\psi_z(x,t) = 0,$$

*E-mail: samsonov@phys.tsu.ru

где h_0 — гамильтониан (не обязательно стационарный), действующий в H.

Если квантовая система обладает нетривиальными симметриями, то исследование когерентных состояний для нее упрощается, поскольку весьма эффективными оказываются теоретико-групповые методы [2, 6]. В последнее время весьма активно изучаются квантовые системы, дифференциальные операторы симметрии которых не образуют замкнутую алгебру. Они могут образовывать квадратичную [9, 10], полиномиальную [11, 12] или q-деформированную [13, 14] алгебры. В последнем случае вводится понятие q-когерентных состояний [15, 16]. Для многих из таких систем характерно то, что они получаются при помощи некоторой цепочки (возможно бесконечной) преобразований Дарбу [17, 18] из более простых систем таких как свободная частица, кулоновский потенциал, гармонический осциллятор и др. [19, 20]. Когерентные состояния подобных систем весьма мало изучены. Можно отметить в связи с этим работы [21, 22], в которых исследовались когерентные состояния изоспектральных гамильтонианов с эквидистантным спектром, и работу [23], где изучены системы когерентных состояний q-деформированных потенциалов гармонического осциллятора и одного класса автодуальных потенциалов. Отметим также работу [24], в которой рассмотрено некоторое обобщение q-осциллятора, названного f-осциллятором, и получены когерентные состояния для него (f-когерентные состояния).

В тех случаях, когда рассматриваемая система может быть получена при помощи техники операторов преобразования Дарбу, когерентные состояния для нее можно получить, применяя оператор преобразования к когерентным состояниям (если они известны) исходной системы [25, 26]. При этом, чтобы удовлетворить свойству 3, необходимо иметь обобщение этого преобразования на нестационарное уравнение Шредингера. Один из вариантов такого обобщения развит в солитонной теории [27]. Однако он не всегда является подходящим, поскольку может приводить к комплексным потенциалам и, следовательно, к нарушению свойства 1. Этим недостатком не обладает метод, предложенный в [28] и подробно описанный в [19]. Этим методом получены и исследованы когерентные состояния ангармонических осцилляторных гамильтонианов с квазиэквидистантным спектром [25], впервые полученные в [11, 12], когерентные состояния ангармонических осцилляторных гамильтонианов с эквидистантным спектром [26], впервые полученные в [29], когерентные состояния ангармонических потенциалов с сингулярностью в нуле вида γx^{-2} [30], когерентные состояния односолитонного стационарного [31] и нестационарного [32] потенциалов. Отметим, что в случае эквидистантного и квазиэквидистантного спектров такие состояния описывают нерасплывающиеся во времени волновые пакеты [11], которые ранее были известны лишь для систем с квадратичным по координате гамильтонианом.

Характерной особенностью стационарных солитонных потенциалов [27] является их прозрачность. Частица, рассеиваемая на таком потенциале, никогда от него не отражается. Другое важное свойство таких потенциалов заключается в том, что они имеют произвольное наперед заданное расположение уровней дискретного спектра, управляемое параметрами потенциала. Благодаря этому свойству они могли бы найти применение в качестве модельных потенциалов в псевдопотенциальных теориях. С их помощью, например, описываются релаксационные процессы в ферми-жидкости [33]. Обобщением таких потенциалов являются нестационарные солитонные потенциалы, введенные в связи с решением уравнения Кадомцева–Петвиашвили [34]. Отметим, что подобные потенциалы общего вида [27, 34] являются комплексными и им нельзя сопоставить никакой самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве.

В настоящей работе при помощи нестационарного преобразования Дарбу [19] будут получены достаточно простые выражения для нестационарных многосолитонных вещественных потенциалов. Будет прослежена связь операторов преобразования Дарбу со спектральным разложением оператора импульса, впервые получено разложение этих операторов по квазипроекторам на собственные векторы оператора импульса. Далее рассмотрены два типа когерентных состояний. Состояния первого типа, получаемые при помощи интегрального оператора преобразования, допускают разложение единичного оператора (1), где в качестве меры выступает некоторая непрерывная функция. Во втором случае когерентные состояния определяются при помощи дифференциального оператора преобразования, а мера в выражении (1) определяется некоторой обобщенной функцией.

2. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ МНОГОСОЛИТОННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Один из методов построения многосолитонных нестационарных потенциалов описан в [35], где указаны также их многочисленные физические применения. В общем случае такие потенциалы являются комплексными, и им нельзя сопоставить никакой самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве. В этом разделе мы опишем метод более пригодный с квантовомеханической точки зрения. Он является непосредственным обобщением соответствующих конструкций, хорошо известных в случае стационарного уравнения Шредингера [36–38]. Основная идея будет проиллюстрирована на двухсолитонном потенциале, а для общего случая мы приведем только окончательные выражения.

Чтобы получить двухсолитонный нестационарный потенциал, нужно совершить цепочку из двух преобразований Дарбу [19]. Оператор L преобразования Дарбу определяется некоторым решением $u = u(x,t)$ исходного уравнения Шредингера (в нашем случае это уравнение с нулевым потенциалом), $L = -u_x/u + \partial_x$ ($u_x \equiv \partial u/\partial x$, $\partial_x \equiv \partial/\partial x$). Взяв

$$u = u_1 = \exp\eta_1 \operatorname{ch}\theta_1, \quad \eta_1 = i(\mu_1^2 - \lambda_1^2)t - i\lambda_1 x, \quad \theta_1 = \mu_1 x + 2\lambda_1\mu_1 t,$$

где λ_1, μ_1 — произвольные вещественные числа, получим хорошо известный односолитонный потенциал

$$V^{(1)} = -2\mu_1^2 \operatorname{sech}^2\theta_1.$$

Все решения уравнения Шредингера с потенциалом $V^{(1)}$, за исключением того, которое принадлежит ядру оператора $L^+ = -\bar{u}_x/\bar{u} - \partial_x$, можно получить, действуя оператором L на некоторое решение уравнения Шредингера с нулевым потенциалом. Рассмотрим, в частности, следующее решение уравнения с нулевым потенциалом:

$$u_2 = \exp\eta_2 \operatorname{sh}\theta_2,$$

где η_2 и θ_2 отличаются от η_1 и θ_1 заменой λ_1 на λ_2 и μ_1 на μ_2. Тогда функция

$$v_2 = Lu_2 = i(\lambda_1 - \lambda_2)u_2 + W_2 \exp\eta_2 \operatorname{sech}\theta_1,$$

где

$$W_2 = \frac{1}{2}\left[(\mu_2 + \mu_1)\operatorname{ch}(\theta_1 - \theta_2) + (\mu_2 - \mu_1)\operatorname{ch}(\theta_1 + \theta_2)\right]$$

— вронскиан функций $\widetilde{u}_1 = \operatorname{ch}\theta_1$ и $\widetilde{u}_2 = \operatorname{sh}\theta_2$, будет некоторым решением уравнения Шредингера (квадратично не интегрируемым) с потенциалом $V^{(1)}$. Если функцию v_2 взять в качестве функции преобразования для повторного преобразования Дарбу, то мы получим наиболее общий (комплексный) двухсолитонный потенциал. (Это будет другая форма хорошо известного двухсолитонного потенциала [34]). Для получения вещественного потенциала необходимо, чтобы функция преобразования v_2 удовлетворяла условию вещественности [19]: $[\ln(v_2/\bar{v}_2)]_{xxx} = 0$. Это условие будет выполнено, если положить $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Двухсолитонный потенциал в этом случае становится вещественным:

$$V^{(2)} = -2(\ln W_2)_{xx} = -2(\mu_2^2 - \mu_1^2)W_2^{-2}(\mu_2^2 \operatorname{ch}^2\theta_1 + \mu_1^2 \operatorname{sh}^2\theta_2).$$

Если, кроме того, потребовать, чтобы $\mu_2 > \mu_1 > 0$, то вронскиан W_2 будет сохранять знак при всех вещественных значениях x и t и потенциал $V^{(2)}$ будет регулярной функцией при всех x и t. Отметим, что при $\lambda = 0$ этот потенциал переходит в хорошо известный двухсолитонный стационарный потенциал [27].

Рассмотрим теперь цепочку N преобразований Дарбу подобную той, которую мы только что рассмотрели для $N = 2$. Результирующее действие такой цепочки эквивалентно действию оператора преобразования N-го порядка [19]

$$L = W^{-1}(u_1, u_2, \ldots, u_N) \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & 1 \\ u_{1x} & u_{2x} & \ldots & \partial_x \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ u_{1x}^{(N)} & u_{2x}^{(N)} & \ldots & \partial_x^N \end{vmatrix}, \tag{2}$$

где $u_{kx}^{(N)} = \partial^N u_k/\partial x^N$ и операторный определитель понимается как дифференциальный оператор, получаемый разложением определителя по последнему столбцу с функциональными коэффициентами, помещенными перед операторами дифференцирования. Функции u_k в нашем случае имеют вид

$$\begin{gathered} u_1 = \exp\eta_1 \operatorname{ch}\theta_1, \quad u_2 = \exp\eta_2 \operatorname{sh}\theta_2, \quad u_3 = \exp\eta_3 \operatorname{ch}\theta_3, \quad u_4 = \exp\eta_4 \operatorname{sh}\theta_4, \ldots, \\ \eta_k = i\left(\mu_k^2 - \lambda^2\right)t - i\lambda x, \quad \theta_k = \mu_k x + 2\lambda\mu_k t, \quad \lambda, \mu_k \in \mathbb{R}, \quad 0 < \mu_{k-1} < \mu_k. \end{gathered} \tag{3}$$

N-солитонный потенциал определяется выражением

$$V^{(N)} = -2\left[\ln W(u_1, u_2, \ldots, u_N)\right]_{xx}.$$

Несложно видеть, что

$$[\ln W(u_1, u_2, \ldots, u_N)]_{xx} = \left[\ln W(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \ldots, \widetilde{u}_N)\right]_{xx},$$

где $\widetilde{u}_1 = \operatorname{ch}\theta_1$, $\widetilde{u}_2 = \operatorname{sh}\theta_2$, $\widetilde{u}_3 = \operatorname{ch}\theta_3, \ldots$

Для вронскиана $W(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \ldots, \widetilde{u}_N)$ известно простое аналитическое выражение [38]

$$W(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \ldots, \widetilde{u}_N) = 2^{1-N} \sum_{k=1}^{2^{N-1}} B_k \operatorname{ch}\gamma_k. \tag{4}$$

Все коэффициенты γ_k имеют вид

$$\gamma_k = \sum_{i=1}^{N} \vartheta_i, \quad \vartheta_i = \varepsilon\theta_i, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Слагаемые в сумме (4) подразделяются на группы. При четном N мы имеем $N/2+1$ групп, и при нечетном N число групп равно $(N+1)/2$. Каждая группа, кроме последней, содержит $\binom{N}{k}$ членов, где $k = 0,1,\ldots,N/2-1$ при четном N и $k = 0,1,\ldots,(N-3)/2$ при нечетном N. Последняя группа содержит $\frac{1}{2}\binom{N}{N/2}$ членов при четном N и $\binom{N}{(N-1)/2}$ при нечетном N. Одна группа отличается от другой количеством отрицательных значений параметра ε. В первой группе (она содержит лишь один член) все $\varepsilon = 1$, во второй группе (N членов) только одно $\varepsilon = -1$ в каждом члене, в третьей группе дважды $\varepsilon = -1$ в каждом члене и так далее. Для коэффициентов B_k мы имеем выражение:

$$B_k = \prod_{i>j}^{N^2} |m_i - m_j|, \quad m_i = \varepsilon\mu_i.$$

Отметим, что после того как абсолютное значение множителей $(m_i - m_j)$ в B_k при $\mu_i > \mu_j$ вычислено, формула (4) становится справедливой при произвольных значениях μ_i. Отметим также, что в частном случае $\lambda = 0$ мы получаем известный [27] N-солитонный стационарный потенциал.

В разд. 4 мы покажем, что с таким потенциалом связан некоторый самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве.

3. ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ СВОБОДНОЙ ЧАСТИЦЫ

В соответствии со свойством 1, сформулированным во Введении, нам необходимо построить гильбертово пространство состояний солитонного потенциала. Согласно результатам работы [19], для этого можно использовать гильбертово пространство состояний исходной системы (в нашем случае это свободная частица) и применить к его элементам оператор преобразования Дарбу. (Точные области определения операторов в данной работе мы описывать не будем.)

Конструкция гильбертова пространства на решениях уравнения Шредингера для свободной частицы хорошо известна (см., например, монографию [39] и ссылки в ней). В данном разделе мы приведем сведения, необходимые нам для дальнейшего изложения.

Алгеброй симметрии уравнения Шредингера с нулевым потенциалом является шестимерная алгебра Ли, известная как алгебра Шредингера [39]. В частности, операторы

$$a = (i-t)\partial_x + ix/2, \quad a^+ = (i+t)\partial_x - ix/2$$

образуют подалгебру Гейзенберга—Вейля этой алгебры. Квадратично интегрируемые решения уравнения Шредингера можно получить методом разделения переменных [39], если в качестве оператора симметрии, разделяющего переменные, взять

$$K_0 = aa^+ + a^+a.$$

Ортонормированные волновые функции при этом имеют вид

$$\psi_n(x,t) = (-i)^n (n! 2^n \sqrt{2\pi})^{-1/2} (1+it)^{-1/2} \exp\left[-in \operatorname{arctg} t - \frac{x^2}{4(1+it)}\right] H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2+2t^2}}\right),$$

где $H_n(z)$ — многочлены Эрмита. Операторы a^+ и a являются для них операторами сдвига по переменной n: $a\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1}$, $a^+\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}$, $a\psi_0 = 0$.

Обозначим через $\mathscr{L}_0$ линейное пространство, составленное из всевозможных конечных линейных комбинаций функций $\psi_n(x,t)$ с комплексными коэффициентами. Операторы a и a^+ в силу их линейности определены на всем пространстве $\mathscr{L}_0$ и отображают его на себя. Отметим, что гамильтониан $h_0 = p_x^2 = -\partial_x^2$ и оператор импульса $p_x = -i\partial_x$ выражаются через a и a^+, например, $p_x = -(a+a^+)/2$. Поэтому они также определены на $\mathscr{L}_0$ и отображают его на себя.

Определим на $\mathscr{L}_0$ скалярное произведение $\langle\psi_a|\psi_b\rangle$ при помощи обычного интеграла Лебега. Гильбертово пространство H является пополнением $\mathscr{L}_0$ по норме, определяемой этим скалярным произведением. Хорошо известно, что операторы p_x и h_0 являются самосопряженными в H, имеют общие собственные (в смысле обобщенных функций) функции и спектр их чисто непрерывный. Обозначим через $\psi_p = \psi_p(x,t)$ их общие собственные функции $p_x\psi_p = p\psi_p$, $h_0\psi_p = p^2\psi_p$, $p \in \mathbb{R}$. Функции ψ_p хорошо известны, и мы не будем приводить их явный вид. Отметим только, что они ортогональны и нормированы (в смысле обобщенных функций), $\langle\psi_p|\psi_q\rangle = \delta(p-q)$, и образуют полный набор в H. Соотношение полноты символически выражается через проекторы на эти функции как на элементы пространства H:

$$\int dp|\psi_p\rangle\langle\psi_p| = 1.$$

В интегралах по всей вещественной прямой область интегрирования не указываем. Отметим, что соответствующим конструкциям можно придать строгий математический смысл, если использовать понятие оснащенного гильбертова пространства [40, 41].

Когерентные состояния рассматриваемой системы можно получить действием оператора трансляции на группе Гейзенберга—Вейля на вакуумный вектор ψ_0 [2]:

$$\psi_z(x,t) = \exp(za^+ - \bar{z}a)\psi_0(x,t), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Эти векторы являются также собственными для оператора a, $a\psi_z = z\psi_z$. Для их описания недостаточно использовать пространство $\mathscr{L}_0$. Они принадлежат более широкой области, плотно расположенной в H. Их разложение по базису ψ_n имеет вид [3]

$$\psi_z = \Phi\sum_n a_n z^n \psi_n, \quad \Phi = \Phi(z,\bar{z}) = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{2}\right), \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Они удовлетворяют всем перечисленным во Введении свойствам. В частности, мера $d\mu = d\mu(z,\bar{z})$, осуществляющая разложение единицы (1) по этим состояниям, хорошо известна [3]: $d\mu = dxdy/\pi$, $z = x+iy$.

4. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СОЛИТОННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Структура спектра гамильтонианов, связанных между собой преобразованием Дарбу, исследовалась многими авторами. Наиболее подробное из таких исследований содержится, по-видимому, в работе [42], в которой приведены также ссылки на наиболее важные работы в этой области. В данном разделе будут изучены свойства операторов преобразования Дарбу для свободной частицы и солитонных гамильтонианов как операторов, действующих в гильбертовом пространстве состояний рассматриваемой системы, не нашедшие отражения в публикациях авторов предыдущих работ.

Как уже отмечалось, многосолитонный гамильтониан можно построить при помощи некоторой цепочки преобразований Дарбу или при помощи оператора преобразования Дарбу N-го порядка (2). Обозначим через L_1 оператор, соответствующий первому звену цепочки, и через L_1^+ оператор, ему формально сопряженный. Отметим, что при определении скалярного произведения при помощи интеграла Лебега оператор, сопряженный относительно скалярного произведения к ∂_x, есть $-\partial_x$. Поэтому оператор L_1^+ будет являться эрмитово-сопряженным к L_1. Не будем в данной работе углубляться в математические детали и описывать области определения этих операторов. Отметим только, что они определены не во всем пространстве H и область их значений также отлична от H. Кроме того, можно показать, что если первоначальная область определения, например L_1, есть пространство $\mathscr{L}_0$, то у него существует замкнутое расширение в H.

Несложные вычисления показывают, что

$$L_1^+L_1 = (p_x + \lambda)^2 + \mu_1^2 \equiv g_{01}(\mu_1).$$

Оператор $g_{00} = (p_x + \lambda)^2$ является оператором симметрии уравнения Шредингера для свободной частицы, и функция преобразования $u_1(\notin H)$ является для него собственной функцией с собственным значением равным $-\mu_1^2$. Как оператор в гильбертовом пространстве H он определен на некоторой плотной области (которую при необходимости можно уточнить), самосопряжен в нем и имеет чисто непрерывный спектр. Его собственные функции совпадают с ψ_p: $g_{00}\psi_p = (p+\lambda)^2\psi_p$. Отметим также, что $g_{00} = h_0$ при $\lambda = 0$.

Несложно видеть, что все функции преобразования u_k (3) являются собственными для g_{00}: $g_{00}u_k = -\mu_k^2 u_k$. Именно выбор всех параметров λ равными у всех функций преобразования u_k является решающим для этого обстоятельства. При этом также и оператор $2N$-го порядка L^+L является некоторым самосопряженным оператором в H. Последнее свойство обеспечено также тем, что операторы L и L^+ обладают следующим замечательным свойством факторизации [19]: $L^+L = f(g_{00})$, где $f(x)$ — полином $f(x) = (x + \mu_1^2)(x + \mu_2^2)\ldots(x + \mu_N^2)$.

Для оператора

$$g_0 = L^+L = g_{01}(\mu_1)g_{01}(\mu_2)\ldots g_{01}(\mu_N)$$

несложно получить матричное представление в базисе ψ_n. Поскольку оператор $g_{01}(\mu_1)$ выражается через лестничные операторы a и a^+:

$$g_{01}(\mu_1) = [\lambda - (a + a^+)/2]^2 + \mu_1^2,$$

то матрица

$$S_0(\mu_1) = \|S_{nk}^0\|, \quad S_{nk}^0 = \langle\psi_n|g_{00}|\psi_k\rangle,$$

является пятидиагональной, симметричной, вещественной матрицей со следующими отличными от нуля элементами:

$$S_{nn}^0 = \lambda^2 + \mu_1^2 + \frac{n}{2} + \frac{1}{4}, \quad S_{nn+1}^0 = -\lambda\sqrt{n+1}, \quad S_{nn+2}^0 = \frac{1}{4}\sqrt{(n+1)(n+2)}.$$

Тогда матрица оператора g_0, $S = \|S_{nk}\|$, имеет вид

$$S = S_0(\mu_1)S_0(\mu_2)\dots S_0(\mu_N)$$

и имеет в каждой своей строке (а следовательно, и столбце) конечное число ненулевых элементов $S_{nk} = S_{kn}$. Отсюда следует, что функция

$$g_0\psi_n = \sum_k S_{kn}\psi_k$$

принадлежит пространству $\mathscr{L}_0$ и $\mathscr{L}_0$ является инвариантным пространством для g_0. Отметим, что оператор g_0 имеет чисто непрерывный спектр и его собственными функциями являются ψ_p, $g_0\psi_p = N_p^2\psi_p$, где $N_p^2 = f((p+\lambda)^2) > 0$.

В силу того что $g_0 = L^+L$, функции $\varphi_p = N_p^{-1}L\psi_p$ будут собственными для оператора $g_1 = LL^+$: $g_1\varphi_p = N_p^2\varphi_p$ и $\langle\varphi_p|\varphi_q\rangle = \delta(p-q)$. Оператор g_1 имеет в гильбертовом пространстве H смешанный спектр. Дискретная часть его спектра совпадает с числами $-\mu_k^2$, $k = 1,\dots,N$. Обозначим собственные функции дискретного спектра через φ_{-k}. Очевидно, что оператор g_1 самосопряжен в H и определен на плотной области, которую при необходимости несложно точно описать. Поэтому все гильбертово пространство H можно представить в виде ортогональной суммы $H = H_0 \oplus H_1$, где H_0 является N-мерным гильбертовым пространством с базисом φ_{-k}, $k = 1,\dots,N$. В дальнейшем мы не будем рассматривать это пространство. Пространство H_1 является инвариантным для g_1 и ограничение g_1 на это пространство имеет чисто непрерывный спектр с собственными функциями φ_p. В дальнейшем будем рассматривать g_1 только как оператор, действующий в H_1 и поэтому сохраним для него прежнее обозначение. Отметим, что функции φ_{-k} нельзя получить действием оператора L на какую-либо из функций из H.

Оператор L вида (2) можно применять ко всем функциям из H, входящим в область определения оператора g_0, поскольку величина

$$\langle L\psi_a|L\psi_b\rangle = \langle\psi_a|L^+L\psi_b\rangle = \langle\psi_a|g_0|\psi_b\rangle$$

является конечной при всех $\psi_{a,b}$ из этой области. (Более точно, отсюда следует, что в качестве области определения оператора L может выступать область определения оператора $\sqrt{g_0}$, которая шире области определения оператора g_0.) Совершенно аналогично, оператор L^+ можно применять ко всякой функции из H_1, входящей в область определения оператора g_1.

Операторы g_{00} и g_0 можно выразить через проекторы на их собственные функции при помощи спектральных разложений:

$$g_{00} = \int dp(p+\lambda)^2|\psi_p\rangle\langle\psi_p|, \quad g_0 = \int dpN_p^2|\psi_p\rangle\langle\psi_p|.$$

Аналогичное выражение имеет и оператор g_1 через проекторы на φ_p:

$$g_1 = \int dpN_p^2|\varphi_p\rangle\langle\varphi_p|.$$

Тогда оператору g_1 можно сопоставить оператор g_{11}, такой что $g_1 = f(g_{11})$, определив его в H_1 при помощи спектрального разложения

$$g_{11} = \int dp(p+\lambda)^2|\varphi_p\rangle\langle\varphi_p|.$$

Очевидно, что g_{11} будет самосопряженным оператором с чисто непрерывным спектром из промежутка $[\lambda^2, \infty)$. При $\lambda = 0$ оператор g_1 совпадет с гамильтонианом стационарного N-солитонного потенциала, действие которого ограничено пространством H_1.

Волновые функции ψ_p и φ_p представляют собой ортонормированные (в смысле обобщенных функций) базисы в пространствах соответственно H_0 и H_1. Рассмотрим оператор, который каждой функции ψ_p ставит в соответствие функцию φ_p:

$$U = \int dp |\varphi_p\rangle\langle\psi_p|.$$

Обратное отображение осуществляет сопряженный к нему оператор

$$U^{-1} = U^+ = \int dp |\psi_p\rangle\langle\varphi_p|.$$

Очевидно, что U сохраняет величину скалярного произведения и, следовательно, является изометрическим оператором. Следовательно, для операторов L и L^+ получаем

$$L = \int dp N_p |\varphi_p\rangle\langle\psi_p|, \quad L^+ = \int dp N_p |\psi_p\rangle\langle\varphi_p|.$$

Отсюда следует представление операторов L и L^+ через U, g_0 и g_1:

$$L = U g_0^{1/2} = g_1^{1/2} U, \quad L^+ = g_0^{1/2} U^+ = U^+ g_1^{1/2}.$$

Такое представление операторов известно как их полярное разложение (см., например, [43]).

Рассмотрим оператор $M = (L^+)^{-1} = U g_0^{-1/2} = g_1^{-1/2} U$. Поскольку

$$g_0^{\pm 1/2} = \int dp N_p^{\pm 1} |\psi_p\rangle\langle\psi_p|,$$

то

$$M = \int dp N_p^{-1} |\varphi_p\rangle\langle\psi_p|, \quad M^+ = \int dp N_p^{-1} |\psi_p\rangle\langle\varphi_p|.$$

Оператор M совпадает с интегральным оператором, введенным в [25] (см. также [27]). Операторы M и M^+ факторизуют операторы g_0^{-1} и g_1^{-1}: $M^+M = g_0^{-1}$, $MM^+ = g_1^{-1}$.

В силу изометричности оператора U функции $\zeta_n = U\psi_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ образуют ортонормированный базис в H_1. Простые явные выражения для них получить не удается, поскольку U выражается через нелокальный оператор $g_0^{-1/2}$. Гораздо более простой вид имеют функции $\varphi_n(x,t) = L\psi_n(x,t)$, поскольку действие оператора L, согласно формуле (2), сводится к вычислению производных и арифметическим операциям. Очевидно, что $\varphi_n = g_1^{1/2}\zeta_n$ и оператор g_1 (а также и $g_1^{1/2}$) имеет в H_1 нулевое ядро. Отсюда следует, что функции φ_n образуют в H_1 неортогональный базис, $\langle\varphi_n|\varphi_k\rangle = S_{nk}$ (так называемый базис эквивалентный ортонормированному или базис Рисса, см., например, [44]). Функции $\eta_n = g_1^{-1/2}\zeta_n = M\psi_n$ образуют базисный набор биортогональный с φ_n, $\langle\varphi_n|\eta_k\rangle = \delta_{nk}$ и $\langle\eta_n|\eta_k\rangle = S_{nk}^{-1}$, где $S_{nk}^{-1} = S_{kn}^{-1}$ — элементы матрицы S^{-1}, обратной к S. Матричные элементы S_{nk}^{-1} можно вычислить, используя спектральное разложение оператора g_0^{-1}:

$$g_0^{-1} = \int dp N_p^{-2} |\psi_p\rangle\langle\psi_p|. \qquad (6)$$

Тогда

$$S_{nk}^{-1} = \langle\psi_n|M^+M\psi_k\rangle = \langle\psi_n|g_0^{-1}|\psi_k\rangle = \int dp N_p^{-2} \langle\psi_n|\psi_p\rangle\langle\psi_p|\psi_k\rangle.$$

В заключение этого раздела отметим, что не всякую функцию φ из H_1 можно представить в виде $\varphi = L\psi$, где ψ — некоторая функция из H_0. Это связано с тем, что H_1 является замыканием линейной оболочки векторов $\varphi_n = L\psi_n$ относительно скалярного произведения в H, ограниченного на пространство этих векторов. Совокупность же функций вида $\varphi = L\psi$ будет полным гильбертовым пространством относительно скалярного произведения $\langle\varphi_a|\varphi_b\rangle_1 = \langle L\psi_a|L\psi_b\rangle_1 = \langle\psi_a|g_0|\psi_b\rangle$, которое вложено в H_1.

5. КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ СОЛИТОННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Согласно идеологии работ [25, 26, 31], чтобы получить когерентные состояния преобразованных по Дарбу систем, достаточно оператором преобразования подействовать на когерентные состояния исходной системы. При этом, очевидно, свойства 1–3, сформулированные во Введении, будут выполнены. Таким образом, чтобы получаемые таким путем состояния можно было трактовать как когерентные, достаточно установить существование меры, реализующей разложение единичного оператора (1) по этим состояниям. Отметим, что в работах [25, 26, 31] указанное разложение не обсуждается. В данном разделе будут получены явные выражения для соответствующих мер для двух типов когерентных состояний нестационарного многосолитонного потенциала, получаемых при помощи операторов L и M. Частный случай $\lambda = 0$ соответствует обычному стационарному многосолитонному потенциалу.

Рассмотрим состояния, описываемые следующими волновыми функциями:

$$\varphi_z = L\psi_z = \Phi \sum_n a_n z^n \varphi_n, \quad \eta_z = M\psi_z = \Phi \sum_n a_n z^n \eta_n.$$

Убедимся в том, что меры $\mu_\varphi = \mu_\varphi(z, \bar{z})$ и $\mu_\eta = \mu_\eta(z, \bar{z})$, осуществляющие разложение единицы по данным состояниям, существуют.

Рассмотрим вначале состояния η_z и меру μ_η. Поскольку функции $\eta_p = N_p M\psi_p$, $\langle\eta_p|\eta_q\rangle = \delta(p-q)$, $p \in \mathbb{R}$ являются базисными (в смысле обобщенных функций) в H_1, то соотношение (1) эквивалентно условию

$$\int d\mu_\eta \langle\eta_p|\eta_z\rangle\langle\eta_z|\eta_p\rangle = \delta(p-q).$$

Отсюда следует, что

$$N_p^{-1} N_q^{-1} \int d\mu_\eta \langle\psi_p|\psi_z\rangle\langle\psi_z|\psi_q\rangle = \delta(p-q).$$

Необходимо отметить, что интеграл в левой части этого равенства не зависит от времени и, следовательно, его можно вычислить при $t = 0$. В дальнейшем мы будем этим пользоваться без дополнительных оговорок. С учетом выражения для функции $\langle\psi_p|\psi_z\rangle$,

$$\langle\psi_p|\psi_z\rangle = (2\pi)^{1/4}\Phi\psi_p(z), \quad \psi_p(z) = \exp(-p^2 + 2zp - z^2/2), \quad z = x + iy,$$

ищем меру μ_η, такую чтобы $d\mu_\eta = \omega_\eta(x)dxdy$. После интегрирования по переменной y, получаем уравнение для $\omega_\eta(x)$:

$$\int dx\omega_\eta(x)F_p(x) = N_p^2(2\pi)^{-1/2}\exp(2p^2), \quad F_p(x) = \exp(4px - 2x^2).$$

Поскольку N_p^2 является многочленом от p, отсюда следует, что $\omega_\eta(x)$ есть многочлен от x, коэффициенты которого полностью определяются коэффициентами многочлена N_p^2. Например, при $N_p^2 = (p-\lambda)^2 + \mu_1^2$ (односолитонный потенциал) мы имеем $\omega_\eta = [(x-\lambda)^2 + \mu_1^2 - 1/4]/\pi$. Таким образом, мы убедились в том, что состояния η_z удовлетворяют всем свойствам когерентных состояний. Используя факторизационные свойства операторов M и M^+ и спектральное разложение оператора g_0^{-1} (6), вычисляем коэффициент нормировки этих состояний:

$$N_z^{-2} = \langle\eta_z|\eta_z\rangle = \langle\psi_z|g_0^{-1}|\psi_z\rangle = \int dpN_p^{-2}|\langle\psi_z|\psi_p\rangle|^2.$$

Поскольку функция N_p^2 является полиномом относительно $\tau = (p+\lambda)^2$:

$$N_p^2 = (\tau + \mu_1^2)(\tau + \mu_2^2)\ldots(\tau + \mu_N^2),$$

то

$$N_p^{-2} = \sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{\tau + \mu_k^2}, \quad A_k = \left[(dN_p^2/d\tau)_{\tau=-\mu_k^2}\right]^{-1}. \tag{7}$$

Отсюда для интеграла нормировки получаем выражение

$$N_z^{-2} = \sum_{k=1}^{N} A_kF_k, \quad z = x + iy,$$

$$F_k = \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda}\exp\left[2(\lambda^2 - x^2)\right]\,\mathrm{Re}\left[\exp\left[4i\lambda(x-\mu_k)\right]\mathrm{erfc}\left(\lambda\sqrt{2} + i\sqrt{2}(x-\mu_k)\right)\right].$$

Рассмотрим теперь состояния φ_z и меру μ_φ. Будем искать меру μ_φ такую, чтобы $d\mu_\varphi = dyd\omega_\varphi(x)$. Тогда для $\omega_\varphi(x)$ получим уравнение

$$\int d\omega_\varphi(x)F_p(x) = N_p^{-2}(2\pi)^{-1/2}\exp(2p^2). \tag{8}$$

Покажем, что решением этого уравнения является обобщенная функция, заданная на некотором линейном пространстве. Отметим прежде всего, что $|F_p(x+iy)| \le \exp(-dx^2 + by^2)$, $2 \le d \le b$. Это означает, что $F_p(x) \in S_{1/2}^{1/2}$, где $S_{1/2}^{1/2}$ является пространством целых функций F таких, что $|F(x+iy)| \le \exp(-dx^2 + by^2)$, $0 \le d \le b$ [45]. Будем искать ω_φ в виде функционала над $S_{1/2}^{1/2}$. Известно, что положительно определенные обобщенные функции над $S_{1/2}^{1/2}$ задаются при помощи своих фурье-образов. Если обозначить через $\tilde\omega_\varphi$ фурье-образ обобщенной функции ω_φ, то левую часть равенства (8) нужно понимать в смысле следующего равенства:

$$\int d\omega_\varphi(x)F_p(x) = \int d\tilde\omega_\varphi(t)\tilde F_p(t),$$

где $\tilde{F}_p(t) = \sqrt{\pi/2}\exp(2p^2 + ipt - t^2/8)$ — фурье-образ функции $F_p(x)$. В результате из (8) следует уравнение для $\tilde{\omega}_\varphi$:

$$\pi \int d\tilde{\omega}_\varphi(t) \exp\left(-\frac{t^2}{8} + ipt\right) = N_p^{-2}.$$

Если теперь искать $\tilde{\omega}_\varphi$ такую, чтобы $d\tilde{\omega}_\varphi(t) = \rho_\varphi(t)dt$, то с учетом выражения (7) для N_p^{-2} получим для $\rho_\varphi(t)$ следующую формулу:

$$\rho_\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{\mu_k} \exp\left(i\lambda t - \mu_k|t| + \frac{t^2}{8}\right). \tag{9}$$

Необходимо отметить, что для функции $\rho_\varphi(t)$ вида (9) интеграл $\int d\tilde{\omega}_\varphi(t)\tilde{F}(t)$ сходится не при всех $F(x) \in S_{1/2}^{1/2}$. Несложно видеть, что условие сходимости этого интеграла налагает ограничение на убывание функции $F(x)$ при $|x| \to \infty$. Он сходится, только если $|F(x)| \geq \exp(-2x^2 - Ax)$, где $A \geq 0$ — некоторая постоянная, своя для каждой функции $F(x) \in S_{1/2}^{1/2}$. Обозначим совокупность функций (очевидно, что она является линейным пространством), удовлетворяющих этому условию, через $\overset{\circ}{S}{}_{1/2}^{1/2} (\in S_{1/2}^{1/2})$.

Таким образом, нами установлено, что разложение единичного операторов (1) имеет место для состояний φ_z, если меру $d\mu_\varphi = dy d\omega_\varphi(x)$ определить при помощи фурье-образа $\tilde{\omega}_\varphi$ меры ω_φ, которая задает функционал на пространстве $\overset{\circ}{S}{}_{1/2}^{1/2}$. При этом интеграл по мере μ_φ нужно вычислять следующим образом:

$$\int d\mu_\varphi \langle\varphi_a|\varphi_z\rangle\langle\varphi_z|\varphi_b\rangle = \int dt \rho_\varphi(t)\tilde{F}_{ab}(t),$$

где $\tilde{F}_{ab}(t)$ является фурье-образом функции

$$F_{ab}(x) = \int dy \langle\varphi_a|\varphi_z\rangle\langle\varphi_z|\varphi_b\rangle, \quad z = x + iy.$$

Квадрат нормы функции φ_z совпадает со средним значением оператора g_0 в состоянии ψ_z и легко может быть вычислен. Например, для односолитонного потенциала имеем

$$\langle\varphi_z|\varphi_z\rangle = \langle\psi_z|g_0|\psi_z\rangle = 1/4 + \mu_1^2 + (x - \lambda)^2, \quad z = x + iy.$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для солитонных вещественных потенциалов наиболее общего вида — нестационарных многосолитонных вещественных потенциалов — установлена связь со спектральной задачей для некоторого самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. В частном случае, когда потенциал становится стационарным, этот оператор является многочленом от гамильтониана солитонного потенциала. Получено квазиспектральное разложение операторов преобразования Дарбу. Рассмотрены две системы когерентных состояний солитонных потенциалов, получаемые при помощи оператора преобразования Дарбу и некоторого интегрального оператора. В каждом случае вычислена мера, реализующая разложение единичного оператора по когерентным состояниям.

Наличие разложения единичного оператора (1) по когерентным состояниям позволяет получить голоморфное представление пространства состояний и операторов, действующих в нем. Далее, используя технику ковариантных символов Березина [46], можно получить классическую механическую систему, соответствующую данной квантовой системе (см., например, [2]). На этом пути в [30] получен классический механический аналог для квантовой системы, получающейся преобразованием Дарбу из системы с потенциалом вида $x^2+\gamma x^{-2}$ и дана формулировка преобразования Дарбу на языке классической механики для этого случая. Результаты данной работы позволяют построить классический механический аналог квантовой системы с солитонным потенциалом и таким образом провести для нее процесс обратный квантованию.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 9702-16279).

Литература

1. E. Schrödinger, Naturwissenschaften **14**, 664 (1926) [Э. Шредингер, *Избранные труды по квантовой механике*, Наука, Москва (1976)].
2. А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их применение*, Наука, Москва (1987).
3. И. А. Малкин, В. И. Манько, *Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем*, Наука, Москва (1979).
4. J. R. Klauder and B.-S. Skagerstam, *Coherent States: Applications in Physics and Mathematical Physics*, World Scientific, Singapore (1985).
5. В. В. Додонов, В. И. Манько, Труды ФИАН **183**, 71 (1987).
6. Я. А. Смородинский, А. Л. Шелепин, Л. А. Шелепин, УФН **162**(12), 1 (1992).
7. В. В. Додонов, В. И. Манько, О. В. Малкин, Труды ФИАН **192**, 204 (1988).
8. J. R. Klauder, J. Phys. A **29**, L293 (1996).
9. Я. И. Грановский, А. С. Жеданов, И. М. Луценко, ЖЭТФ **99**, 369 (1991).
10. Ya. I. Granovskii, I. M. Lutzenko, and A. S. Zhedanov, Ann. Phys. (USA) **217**, 1 (1992).
11. С. Ю. Дубов, В. М. Елеонский, Н. Е. Кулагин, ЖЭТФ **102**, 814 (1992).
12. В. М. Елеонский, В. Г. Королев, ЖЭТФ **110**, 1967 (1996).
13. V. P. Spiridonov, Phys. Rev. Lett. **69**, 398 (1992).
14. S. Skorik and V. Spiridonov, Lett. Math. Phys. **28**, 59 (1993).
15. A. S. Zhedanov, J. Math. Phys. **34**, 2631 (1993).
16. V. P. Spiridonov, Lett. Math. Phys. **35**, 179 (1995).
17. G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les application géométriques du calcul infinitésimale*, Deuxième partie, Gautier-Villar et Fils, Paris (1889).
18. Э. Л. Айнс, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, ОНТИ, Харьков (1939).
19. В. Г. Багров, Б. Ф. Самсонов, Физ. элементар. частиц атом. ядра **28**, 951 (1997).
20. A. B. Shabat, Inverse Problems **6**, 303 (1992).
21. C. D. J. Fernandez, V. Hussin, and L. M. Nieto, J. Phys. A **27**, 3547 (1994).
22. C. D. J. Fernandez, L. M. Nieto, and O. Rosas-Ortiz, J. Phys. A **28**, 2963 (1995).
23. V. Spiridonov, Phys. Rev. A **52**, 1909 (1995).
24. V. I. Man'ko, G. Marmo, E. C. G. Sudarshan, and F. Zaccaria, Phys. Scripta **55**, 528 (1997).
25. В. Г. Багров, Б. Ф. Самсонов, ЖЭТФ **109**, 1105 (1996).

26. V. G. Bagrov and B. F. Samsonov, J. Phys. A **29**, 1011 (1996).
27. V. Matveev and M. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer, New York (1991).
28. V. G. Bagrov and B. F. Samsonov, Phys. Lett. A **210**, 60 (1996).
29. P. B. Abraham and H. E. Moses, Phys. Rev. A **22**, 1333 (1980).
30. B. F. Samsonov, J. Math. Phys. **38**, 4492 (1997).
31. Б. Ф. Самсонов, ЯФ **59**, 753 (1996).
32. В. Г. Багров, Б. Ф. Самсонов, Л. А. Шекоян, Изв. вузов, Физика, Вып. 1, 84 (1998).
33. J. Vogel, E. Vogel, and C. Toepffer, Ann. Phys. (NY) **164**, 463 (1985).
34. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Наука, Москва (1980).
35. Б. А. Дубровин, Т. М. Маланюк, И. М. Кричевер, В. Г. Маханьков, Физ. элементар. частиц атом. ядра **19**, 579 (1988).
36. В. П. Березовой, А. И. Пашнев, ТМФ **74**, 392 (1988).
37. C.V. Sukumar, J. Phys. A **19**, 2297 (1986).
38. B. F. Samsonov, J. Phys. A **28**, 6989 (1995).
39. У. Миллер, *Симметрия и разделение переменных*, Мир, Москва (1981).
40. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции*, Вып. 3, Физматгиз, Москва (1958).
41. Ф. А. Березин, М. А. Шубин, *Уравнение Шредингера*, изд-во Московского университета, Москва (1983).
42. А. П. Веселов, А. Б. Шабат, Функ. анализ и его прилож. **27**, 1 (1993).
43. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 1, Мир, Москва (1977).
44. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов*, Наука, Москва (1965).
45. И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, *Обобщенные функции*, вып. 4, Физматгиз, Москва (1961).
46. Ф. А. Березин, *Метод вторичного квантования*, Наука, Москва (1986).