ЖЭТФ, 1998, том 114, вып. 6(12), стр. 2043–2054

ФОРМИРОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОГО МЕТАЛЛА В СИЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

*Н. М. Зубарев**

Институт электрофизики
Уральского отделения Российской академии наук
620049, Екатеринбург, Россия

Поступила в редакцию 13 июня 1998 г.

Рассмотрена нелинейная динамика свободной поверхности идеальной проводящей жидкости в сильном внешнем электрическом поле. Обнаружено, что уравнения движения могут быть решены в приближении малых углов отклонения поверхности от плоской. Это позволило показать, что практически при произвольных начальных условиях за конечное время на исходно гладкой поверхности появляются точки с бесконечной кривизной, соответствующие особенностям корневого типа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно [1–3], что плоская поверхность проводящей жидкости в сильном внешнем электрическом поле становится неустойчивой, если напряженность поля E превышает критическое значение ${E_c}^2 = 8\pi\sqrt{g\alpha\rho}$, где g — ускорение поля тяжести, α — коэффициент поверхностного натяжения, а ρ — плотность среды. Взаимодействие электрического поля и индуцированных им зарядов на поверхности жидкости приводит к взрывному росту возмущений поверхности, формированию за конечное время областей со значительной кривизной [4, 5]. Следствием может быть повышение плотности энергии поля у поверхности, обострение эмиссионных процессов и, наконец, вакуумный пробой [6]. Кроме того, существуют свидетельства, что жидкая фаза играет существенную роль на начальных стадиях взрывной электронной эмиссии [7]. Все это определяет необходимость построения адекватной теоретической модели нелинейных стадий развития неустойчивости, в рамках которой можно было бы рассматривать процесс формирования сингулярного профиля поверхности среды (в приложениях — жидкого металла).

В настоящей работе рассматривается нелинейная динамика электрогидродинамической неустойчивости в пределе сильного электрического поля, $E \gg E_c$, когда можно не учитывать влияния силы тяжести и поверхностного натяжения. Интерес к этому предельному случаю обусловлен, в частности, недавним обнаружением систем с аномально низкими значениями критического поля $E_c \sim 1$ кВ/см [8]. Исследование нелинейных стадий развития неустойчивости проводится с помощью теории возмущений по малому параметру — углу наклона поверхности. Введение в рассмотрение подобного малого параметра, конечно, не позволяет описать формирование наблюдаемых в экспериментах сильных особенностей, которым соответствуют углы наклона порядка единицы. Тем не менее в рамках построенной в работе модели удается показать, что практически для

* E-mail: nick@ami.uran.ru

любого начального условия на поверхности проводящей жидкости за конечное время появляются точки с бесконечной кривизной. Таким образом, уже на слабонелинейных стадиях развития неустойчивости проявляется тенденция к формированию сингулярного профиля поверхности жидкости.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 приводятся основные уравнения движения, описывающие эволюцию свободной поверхности идеальной проводящей жидкости в сильном внешнем электрическом поле. В разд. 3 в приближении малости характерных углов наклона поверхности строится нелинейная модель развития электрогидродинамической неустойчивости. Раздел 4 посвящен рассмотрению динамики одномерных возмущений поверхности. Интегрирование уравнений модели показывает, что в системе за конечное время формируются слабые особенности корневого типа, для которых кривизна поверхности оказывается бесконечной. С математической точки зрения появление сингулярностей связано с разрушением аналитичности комплексного потенциала скорости за счет выхода на границу его особенностей — точек ветвления, что в целом аналогично поведению потенциала скорости идеальной жидкости в отсутствие внешних сил [9–11]. В разд. 5 на примере эволюции уединенных возмущений показывается, что формирование сингулярностей происходит раньше, чем успевает нарушиться условие малости углов в результате развития линейной неустойчивости (сама особенность корневого типа согласуется с малоугловым приближением). В разд. 6 исследуется поведение границы жидкого металла в предположении, что характер автомодельности в малой окрестности особенности сохранится при переходе в рассмотрении от одномерных возмущений поверхности к произвольным. В заключительном разделе обсуждается роль корневых особенностей в общей эволюции системы.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим движение проводящей жидкости, занимающей область $-\infty < z \leq \eta(x, y, t)$, в сильном внешнем электрическом поле E. Будем считать проводящую жидкость идеальной, а ее движение безвихревым. Тогда потенциал скорости жидкости Φ определяется нестационарным уравнением Бернулли:

$$\Phi_t + \frac{(\nabla\Phi)^2}{2} + \frac{p}{\rho} = F(t),$$

где p — давление, а F — некоторая функция времени. Кроме того, для потенциального движения несжимаемой жидкости справедливо

$$\Delta\Phi = 0.$$

Уравнения движения замыкаются кинематическим условием на свободной поверхности

$$\eta_t = [\Phi_z - \nabla\eta \cdot \nabla\Phi]\big|_{z=\eta},$$

условием на бесконечности

$$\nabla\Phi\big|_{z\to-\infty} \to 0,$$

а также условием для давления на границе между проводником и вакуумом [3]:

$$\left[8\pi p + (\nabla\varphi)^2\right]\big|_{z=\eta} = 0,$$

где φ — потенциал электрического поля.

Распределение потенциала поля в отсутствие пространственных зарядов описывается уравнением Лапласа $\Delta\varphi = 0$ с условием эквипотенциальности поверхности проводника $\varphi|_{z=\eta} = 0$ и условием однородности поля на бесконечности $\varphi|_{z\to\infty} \to -Ez$.

Следует отметить, что рассматриваемые уравнения движения обладают гамильтоновской структурой, а функции $\eta(x,y,t)$ и $\psi(x,y,t) = \Phi|_{z=\eta}$ являются канонически-сопряженными величинами [12, 13]:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta\eta}, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\psi},$$

где гамильтониан

$$H = \int\limits_{z\le\eta} \frac{(\nabla\Phi)^2}{2} d^3r - \int\limits_{z\ge\eta} \frac{(\nabla\varphi)^2}{8\pi\rho} d^3r$$

с точностью до константы совпадает с полной энергией системы.

3. ПРИБЛИЖЕНИЕ МАЛЫХ УГЛОВ

С помощью формулы Грина гамильтониан можно представить в виде поверхностного интеграла:

$$H = \int\limits_s \left[\frac{\psi}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial n} + \frac{E^2\eta}{8\pi\rho}\frac{\partial\tilde\varphi}{\partial n}\right] ds,$$

где $\tilde\varphi = (\varphi + Ez)/E$ — возмущение скалярного потенциала, ds — дифференциал поверхности, $\partial/\partial n$ обозначает нормальную производную.

Будем в дальнейшем считать $|\nabla\eta| \ll 1$, что соответствует малости углов наклона поверхности. Это позволяет разложить нормальные производные по степеням канонических переменных. Тогда для гамильтониана получаем

$$H = \int \frac{\psi}{2}\left(\hat T_+\hat k\hat T_+^{-1}\psi - \nabla\eta\cdot\hat T_+\nabla\hat T_+^{-1}\psi\right) d^2r - \int\frac{E^2\eta}{8\pi\rho}\left(\hat T_-\hat k\hat T_-^{-1}\eta + \nabla\eta\cdot\hat T_-\nabla\hat T_-^{-1}\eta\right) d^2r.$$

Здесь $\hat k$ — двумерный интегральный оператор с ядром, фурье-образ которого равен модулю волнового вектора:

$$\hat k f = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x',y')\,dx'dy'}{\left[(x'-x)^2+(y'-y)^2\right]^{3/2}}.$$

Нелинейные операторы $\hat T_\pm$, задаваемые выражениями

$$\hat T_\pm = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pm\eta)^n\hat k^n}{n!},$$

играют роль операторов сдвига (т. е. $f|_{z=\eta} = \hat T f|_{z=0}$) для гармонических функций, затухающих при $z\to\mp\infty$.

Ограничиваясь членами второго и третьего порядков малости, получаем после масштабирования

$$t \to tE^{-1}(4\pi\rho)^{1/2}, \quad \psi \to \psi E/(4\pi\rho)^{1/2}, \quad H \to HE^2/(4\pi\rho)$$

следующее выражение для гамильтониана:

$$H = \frac{1}{2}\int \left[\psi\hat{k}\psi - \eta\hat{k}\eta + \eta\left((\nabla\psi)^2 - (\hat{k}\psi)^2 + (\nabla\eta)^2 - (\hat{k}\eta)^2\right)\right] d^2r. \tag{1}$$

Уравнения движения, соответствующие этому гамильтониану, имеют вид

$$g_t + \hat{k}g = \frac{1}{2}\left[(\hat{k}f)^2 - (\nabla f)^2 + (\hat{k}g)^2 - (\nabla g)^2\right] + \hat{k}\left[(f-g)\hat{k}f\right] + \nabla\left[(f-g)\nabla f\right]. \tag{2}$$

$$f_t - \hat{k}f = \frac{1}{2}\left[(\hat{k}f)^2 - (\nabla f)^2 + (\hat{k}g)^2 - (\nabla\hat{k}g)^2\right] + \hat{k}\left[(g-f)\hat{k}g\right] + \nabla\left[(g-f)\nabla g\right], \tag{3}$$

где мы перешли для от переменных η и ψ к нормальным переменным f и g:

$$f = \frac{\psi+\eta}{2}, \qquad g = \frac{\psi-\eta}{2}.$$

В линейном приближении соотношение (2) описывает релаксацию величины g к нулю с характерными временами $1/|k|$. В таком случае в правых частях уравнений (2) и (3) можно положить $g = 0$, что соответствует рассмотрению нарастающей ветви возмущений с учетом квадратичной нелинейности. В итоге получаем систему уравнений

$$g_t + \hat{k}g = \frac{1}{2}(\hat{k}f)^2 - \frac{1}{2}(\nabla f)^2 + \hat{k}(f\hat{k}f) + \nabla(f\nabla f), \tag{4}$$

$$f_t - \hat{k}f = \frac{1}{2}(\hat{k}f)^2 - \frac{1}{2}(\nabla f)^2. \tag{5}$$

Таким образом, мы показали, что рассмотрение динамики возмущений поверхности проводящей среды в сильном электрическом поле в приближении малых углов сводится к рассмотрению системы уравнений (4) и (5). Ее особенностью является то, что нелинейное уравнение (5) не содержит функцию g; кроме того, уравнение (4) линейно по g и легко интегрируется:

$$g = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{G(x',y',t')\,(t-t')\,dx'dy'dt'}{\left[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(t'-t)^2\right]^{3/2}}, \tag{6}$$

$$G(x,y,t) = \frac{1}{2}(\hat{k}f)^2 - \frac{1}{2}(\nabla f)^2 + \hat{k}(f\hat{k}f) + \nabla(f\nabla f), \tag{7}$$

где мы считали, что $g|_{t=0} = 0$.

4. ФОРМИРОВАНИЕ КОРНЕВЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ

В случае одномерных возмущений поверхности (пренебрегаем зависимостью всех величин от y) интегральный оператор $\hat{k}$ может быть выражен через оператор Гильберта $\hat{H}$:

$$\hat{k} = -\frac{\partial}{\partial x}\hat{H}, \qquad \hat{H}f = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{P}\!\!\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{x'-x}\,dx'.$$

Тогда уравнения модели (4) и (5) записываются в виде

$$g_t - \hat{H}g_x = \frac{1}{2}(\hat{H}f_x)^2 - \frac{1}{2}(f_x)^2 + \hat{H}\left(f\hat{H}f_x\right)_x + (ff_x)_x\,, \tag{8}$$

$$f_t + \hat{H}f_x = \frac{1}{2}(\hat{H}f_x)^2 - \frac{1}{2}(f_x)^2. \tag{9}$$

Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести функции, аналитические в верхней полуплоскости комплексной переменной x:

$$\phi = \hat{P}f, \qquad \chi = \hat{P}g,$$

где $\hat{P} = (1 - i\hat{H})/2$. Поскольку действие оператора Гильберта на аналитическую в верхней полуплоскости функцию сводится к ее домножению на мнимую единицу, уравнения (8), (9) принимают вид

$$\mathrm{Re}\left(\phi_t + i\phi_x + \phi_x^2\right) = 0,$$

$$\mathrm{Re}\left(\chi_t - i\chi_x + \phi_x^2 - 2\hat{P}\left(\phi\phi_x^*\right)_x\right) = 0.$$

Таким образом, исследование интегродифференциальных уравнений (8) и (9) сводится к анализу линейного неоднородного уравнения

$$\chi_t - i\chi_x = -\phi_x^2 + 2\hat{P}\left(\phi\phi_x^*\right)_x \tag{10}$$

и отдельно нелинейного уравнения в частных производных

$$\phi_t + i\phi_x = -\phi_x^2. \tag{11}$$

Для удобства введем в рассмотрение новую функцию $v = \phi_x$. С ее использованием уравнение (11) переписывается в виде

$$v_t + iv_x = -2vv_x.$$

Следует отметить, что это уравнение совпадет с предложенным в работах [14, 15] для описания нелинейных стадий развития неустойчивости тангенциального разрыва в течениях жидкости. Кроме того, данное уравнение с точностью до замены $x \to x + it$ совпадает с уравнением, полученным в работах [9–11] при рассмотрении нелинейной динамики свободной поверхности идеальной жидкости в отсутствие внешних сил, где оно описывает временну́ю эволюцию комплексной скорости. Решение этого нелинейного уравнения с частными производными первого порядка находится с помощью метода характеристик:

$$v = Q(x'), \tag{12}$$

$$x = x' + it + 2Q(x')t. \tag{13}$$

где функция Q определяется из начальных условий $Q(x) = v|_{t=0}$.

Покажем по аналогии с работами [9–11], что эти соотношения с учетом требования аналитичности v описывают формирование сингулярности за конечное время. Задача нахождения явного решения сводится к анализу отображения $x \to x'$, задаваемого соотношением (13). В общем случае это отображение становится неоднозначным в точках, где

$$\partial x/\partial x' = 1 + 2Q_{x'}t = 0. \tag{14}$$

Решение (14) задает некоторую траекторию $x' = x'(t)$ в комплексной плоскости x'. Тогда движение точки ветвления функции v определяется выражением

$$x(t) = x'(t) + it + 2Q(x'(t))t.$$

В некоторый момент времени t_0, когда точка ветвления достигает вещественной оси, аналитичность функции v нарушается и решения уравнения (9) становятся сингулярными.

Рассмотрим поведение решений вблизи особенности. Разлагая (12) и (13) в малой окрестности точки $t = t_0$, $x = x_0 = x(t_0)$, $x' = x'_0 = x'(t_0)$, получим в основном порядке

$$v = q_0 - \delta x'/(2t_0),$$

$$\delta x = i\delta t + 2q_0\delta t + q''t_0(\delta x')^2,$$

где $q_0 = Q(x'_0)$, $q'' = Q_{x'x'}(x'_0)$, $\delta x = x - x_0$, $\delta x' = x' - x'_0$ и $\delta t = t - t_0$.

Исключая из этих выражений $\delta x'$, получаем

$$v = q_0 - \left[\frac{\delta x - i\delta t - 2q_0\delta t}{4q''t_0^3}\right]^{1/2}. \tag{15}$$

Дифференцируя это выражение по x, получим

$$\phi_{xx} \equiv v_x = -\left[16q''t_0^3 2(\delta x - i\delta t - 2q_0\delta t)\right]^{-1/2}, \tag{16}$$

откуда видно, что величина ϕ_{xx} ведет себя автомодельным образом ($\delta x \sim \delta t$), обращаясь в бесконечность при $\delta t \to 0$.

Что касается комплексной функции χ, определяющее ее временну́ю динамику уравнение (10) может быть проинтегрировано методом характеристик (см. также выражения (6), (7) предыдущего раздела). Полагая в качестве начального условия $\chi|_{t=0} = 0$, получаем

$$\chi = \int_0^t D(x + it - it', t')\,dt', \qquad D(x,t) = -\phi_x^2 + 2\hat{P}\left(\phi\phi_x^*\right)_x.$$

Подставляя сюда выражение (15), находим, что вблизи особенности производная χ_{xx} может быть выражена через ϕ_{xx}:

$$\chi_{xx} = \frac{q_0^* - q_0}{q_0 + i}\,\phi_{xx}.$$

Это означает, что аналитичность χ_{xx} также нарушается в момент $t = t_0$.

Исследуем поведение поверхности жидкого металла к моменту формирования сингулярностей в решениях уравнений (10) и (11). Учитывая, что $\eta = f - g$, получаем, что ее кривизна

$$K = \eta_{xx}\left(1 + \eta_x^2\right)^{-3/2}$$

с точностью до квадратичной нелинейности задается выражением

$$K \approx \eta_{xx} = 2\,\mathrm{Re}\,(\phi_{xx} - \chi_{xx}).$$

Подставляя сюда найденные выражения для ϕ_{xx} и χ_{xx}, получим в малой окрестности особой точки

$$K \approx 2\mathrm{Re}\left[1 - \frac{q_0^* - q_0}{q_0 + i}\right]\phi_{xx}. \tag{17}$$

Поскольку величина ϕ_{xx} задается выражением (16), выполняются следующие соотношения:

$$K|_{x=x_0} \propto |\delta t|^{-1/2}, \qquad K|_{t=t_0} \propto |\delta x|^{-1/2},$$

т. е. на поверхности за конечное время формируется особенность корневого типа, для которой кривизна поверхности жидкости оказывается бесконечной.

В заключение раздела заметим, что, поскольку $\psi = f + g$, для комплексного потенциала движения жидкости $\Psi \equiv 2\hat{P}\psi$ вблизи особенности справедливо соотношение

$$\Psi_{xx} = 2(\phi_{xx} + \chi_{xx}) \approx 2\frac{q_0^* + i}{q_0 + i}\,\phi_{xx},$$

т. е. первая производная комплексной скорости также демонстрирует сингулярное поведение при $\delta t \to 0$. Это означает, что, как и в работах [9–11], появление сингулярностей можно интерпретировать как результат разрушения аналитичности комплексного потенциала за счет выхода на границу его особенностей.

5. ЭВОЛЮЦИЯ УЕДИНЕННОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

Покажем на простом примере, что к моменту формирования сингулярности в решениях уравнений (8), (9) условия применимости нашей модели выполняются.

Рассмотрим начальное возмущение в виде

$$f|_{t=0} = -\varepsilon a^m \hat{k}^{m-1}\ln(x^2 + a^2), \tag{18}$$

где m — некоторое натуральное число; а для параметров a и ε справедливы неравенства $a > 0$ и $\varepsilon > 0$. Это представление соответствует одномерному уединенному возмущению поверхности, симметричному относительно точки $x = 0$, в которой поверхность имеет отрицательную кривизну. Характерные углы наклона поверхности определяются параметром ε, который считаем малым.

Отметим, что в линейном приближении уравнение (9) имеет вид

$$f_t + \hat{H} f_x = 0.$$

Его решением с начальным условием (18) является:

$$f(x,t) = -\varepsilon a^m \hat{k}^{m-1} \ln(x^2 + (a-t)^2),$$

т. е. возмущение в рамках линейной модели неограниченно возрастает, становясь бесконечным к моменту $t = a$, что, конечно, нарушает условия ее применимости.

Возникает вопрос, приведет ли учет нелинейности в рамках предлагаемой модели к тому, что сингулярность в решениях возникнет раньше, чем будет нарушено условие $|\eta_x| \approx |f_x| \ll 1$ (сама особенность корневого типа согласуется с условием малости углов). Для ответа на него рассмотрим эволюцию возмущения (18) в рамках нелинейного уравнения (9).

Из симметрии выражения (18) ясно, что сингулярность возникнет в точке $x = 0$; тогда из (13) и (14) следует, что момент ее появления t_0 определяется совместным решением уравнений

$$x_0' + it_0 + 2Q(x_0')\, t_0 = 0,$$

$$1 + 2Q_{x'}(x_0')\, t_0 = 0,$$

где функция Q, соответствующая выражению (18), имеет полюс кратности m в точке $x' = -ia$:

$$Q(x') = i\varepsilon(m-1)! \left(\frac{ia}{x' + ia}\right)^m .$$

Разложением по малому параметру ε получаем в основном порядке

$$t_0 \approx a \left[1 - \frac{m+1}{m} (2\varepsilon m!)^{1/(m+1)}\right],$$

$$x_0' \approx -ia \left[1 - (2\varepsilon m!)^{1/(m+1)}\right].$$

Поскольку в рамках линейного приближения особенность формируется в момент $t = a$, из полученного выражения для t_0 следует, что нелинейность ускоряет формирование особенности (в случае, когда $\varepsilon < 0$, нелинейность, наоборот, сдерживает развитие неустойчивости).

Подставляя найденное значение x_0' в выражение для функции Q и ее второй производной $Q_{x'x'}$, получим

$$q'' \approx -\frac{i(m+1)}{2a^2} (2\varepsilon m!)^{-1/(m+1)},$$

$$q_0 \approx \frac{i}{2m}(2\varepsilon m!)^{1/(m+1)}.$$

Таким образом, параметр q'' для возмущений вида (18) отличен от нуля. Это означает, что динамика рассматриваемых возмущений поверхности вблизи особой точки удовлетворительно описывается соотношениями (15)–(17) предыдущего раздела. Что касается параметра q_0, то вследствие малости ε будет $|q_0| \ll 1$. Этот результат имеет важное значение для настоящей работы. Дело в том, что этот параметр, как следует из выражений (12) и (15), определяет характерные углы наклона поверхности к моменту формирования сингулярности. Тогда для производной η_x в момент коллапса справедлива оценка

$$|\eta_x| \sim \varepsilon^{1/(m+1)} \ll 1,$$

т. е. характерные углы остались малыми, несмотря на то что они увеличились в $\varepsilon^{-m/(m+1)}$ раз. В таком случае условие малости углов не успевает нарушиться в результате развития линейной неустойчивости, а предлагаемая в настоящей работе модель (8), (9) оказывается замкнутой в том смысле, что если исходное возмущение удовлетворяет всем требуемым для применимости модели условиям, то это свойство сохраняется на протяжении всей эволюции системы вплоть до момента коллапса t_0.

Рассмотрим также поведение возмущения напряженности электрического поля на поверхности проводника

$$\delta E(x,t) \equiv -E - \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{z=\eta}$$

вблизи сингулярностей. Несложно обнаружить, что в линейном приближении возмущение поля задается выражением

$$\delta E \approx -E\hat{H}f_x = 2E\,\mathrm{Im}\,(v).$$

Подставляя сюда выражение для v (15), получаем в особой точке

$$\delta E|_{\delta x=\delta t=0} \approx 2E\,\mathrm{Im}\,(q_0).$$

Поскольку параметр q_0 мал, возмущение напряженности поля в момент формирования особенности остается много меньше внешнего поля (сингулярными будут величины δE_x и δE_t).

6. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

В предыдущем разделе мы показали, что в малоугловом приближении $|q_0| \ll 1$. Это позволяет пренебречь зависимостью от этого параметра в выражениях (16) и (17). Тогда при условии, что $q'' \neq 0$, динамика кривизны поверхности в одномерном случае определяется выражением

$$K \approx -\mathrm{Re}\left[4q''t_0^3(\delta x - i\delta t)\right]^{-1/2}. \tag{19}$$

В частности, для симметричного относительно точки $x = x_0$ возмущения имеем

$$K \approx -\frac{1}{\sqrt{8t_0^3|q''|}} \left[\frac{-\delta t + \sqrt{\delta x^2 + \delta t^2}}{\delta x^2 + \delta t^2}\right]^{1/2}.$$

В этом выражении начальные условия определяют лишь постоянный множитель. Таким образом, поведение системы вблизи особой точки носит универсальный характер.

Рассмотрим также частный случай, когда $q'' = 0$. Пусть, например,

$$\left.\frac{\partial^2 Q}{\partial x'^2}\right|_{x'=x_0'} = \ldots = \left.\frac{\partial^{n-1} Q}{\partial x'^{n-1}}\right|_{x'=x_0'} = 0, \qquad q_n \equiv \left.\frac{\partial^n Q}{\partial x'^n}\right|_{x'=x_0'} \neq 0,$$

где $n > 2$. Тогда, разлагая (13) по $\delta x'$ до степени n, в основном порядке получим

$$K \approx -\frac{1}{nt_0}\,\mathrm{Re}\left(\frac{n!}{2t_0 q_n}\right)^{1/n} (\delta x - i\delta t)^{1/n-1}. \tag{20}$$

Из выражений (19), (20) видно, что для произвольного одномерного возмущения поверхности, удовлетворяющего условию $|\eta_x| \ll 1$, вблизи особенности кривизна ведет себя автомодельным образом:

$$K \approx \frac{1}{|\delta t|^p}\, h\left(\frac{\delta x}{|\delta t|}\right), \tag{21}$$

h — некоторая функция, а показатель степени задается выражением

$$p = (n-1)/n, \tag{22}$$

n — некоторое натуральное число.

Заметим теперь, что выражения (19) и (20) являются точными решениями линейного интегродифференциального уравнения

$$K_t + \hat{H} K_x = 0,$$

которое, как следует из (9) с учетом того, что в основном порядке $K = f_{xx}$, описывает эволюцию кривизны поверхности в линейном приближении. Выражение (21) при произвольном показателе p задает класс его автомодельных решений. Это означает, что, с одной стороны, динамика поверхности вблизи особенности описывается автомодельными решениями линеаризованных уравнений модели; с другой стороны, влияние нелинейности приводит к тому, что из всех возможных автомодельных решений реализуются лишь решения с рациональными показателями p, задаваемыми выражением (22) (в случае общего положения $p = 1/2$).

Естественно предположить по аналогии с одномерным случаем, что и в двумерном случае решения в малой окрестности сингулярности будут автомодельными:

$$K \approx \frac{1}{|\delta t|^p}\, h\left(\frac{\delta x}{|\delta t|}, \frac{\delta y}{|\delta t|}\right), \tag{23}$$

где p удовлетворяет условию (22). Особенностью приближения слабой нелинейности в нашей задаче является то, что конкретный вид зависимости всех величин от автомодельных переменных можно рассматривать в рамках уравнения

$$K_t = \hat{k}K, \tag{24}$$

линейность которого позволяет эффективно исследовать формирование двумерных особенностей на поверхности проводящей среды. Следует отметить, что это утверждение справедливо при соблюдении условия $p < 1$, которое, как видно из (22), в нашем случае естественным образом выполняется. Дело в том, что при $p = 1$ выражение вида (23) соответствует симметриям исходных нелинейных уравнений движения; тогда вклад нелинейности вблизи особенности сравним с вкладом линейных членов, а анализ поведения поверхности выходит за рамки настоящей работы.

Подставляя выражение (23) в (24), получаем следующее интегродифференциальное уравнение для неизвестной функции h:

$$\xi h_\xi + \zeta h_\zeta + ph = \hat{k}(\xi, \zeta)h,$$

где $\xi = \delta x/|\delta t|$ и $\zeta = \delta y/|\delta t|$. Поскольку профиль поверхности сначала формируется на периферии и затем распространяется к точке $\delta x = \delta y = 0$, в момент коллапса кривизна поверхности в окрестности особой точки определяется асимптотическими решениями этого уравнения при $\xi^2 + \zeta^2 \to \infty$. Они, как несложно заметить, описываются уравнением в частных производных

$$\xi h_\xi + \zeta h_\zeta + ph = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$h = \left[\xi^2 + \zeta^2\right]^{-p/2} F(\zeta/\xi),$$

где F — некоторая функция. Подставляя это выражение в (23) и затем переходя к полярным координатам

$$\delta x = r\cos\beta, \quad \delta y = r\sin\beta,$$

для кривизны поверхности вблизи особой точки получаем

$$K|_{t=t_0} \approx \frac{F(\operatorname{tg}\beta)}{r^p}.$$

Видно, что мы снова имеем дело с корневой особенностью.

7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Анализ эволюции границы проводящей жидкости в сильном электрическом поле в малоугловом приближении показал, что практически при произвольных начальных условиях нелинейность приводит к формированию на изначально гладкой поверхности точек с бесконечной кривизной, соответствующих особенностям корневого типа. Подобные особенности, однако, не обеспечивают значительной концентрации электрического поля вблизи поверхности проводника и, следовательно, не могут сами собой обусловливать нарушение электрической прочности вакуумного промежутка. В таком случае можно предположить, что основная роль корневых особенностей в общей эволюции системы заключается в том, что в дальнейшем они будут порождать более сильные особенности, способные оказывать существенное влияние на процессы эмиссии из жидкого металла, в частности, способные обеспечить условия для инициирования взрывной электронной эмиссии. К таким особенностям относятся, например, разрывы в первой производной профиля поверхности, наблюдавшиеся в экспериментах [5, 7]. Следует отметить, что их теоретическое рассмотрение выходит за рамки малоуглового приближения, а также требует учета поверхностного натяжения. Действительно, применимость предложенной в настоящей работе модели ограничивается масштабами $|\delta x| \gg l$, где параметр l задает характерный размер, при котором становятся существенными капиллярные эффекты. Из размерных соображений этот параметр определяется отношением коэффициента поверхностного натяжения к плотности энергии электрического поля: $l \propto \alpha/E^2$. Стабилизирующее влияние поверхностного давления приведет к тому, что к моменту t_0 кривизна поверхности останется конечной ($K \sim 1/l$), ее профиль — гладким, а формирование сингулярного профиля поверхности будет приходиться на более поздние стадии развития неустойчивости.

Автор считает своим долгом поблагодарить А. М. Искольдского и Н. Б. Волкова за стимулирующие обсуждения, а также Е. А. Кузнецова, любезно указавшего на работы [9–11]. Данная работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 97-02-16177).

Литература

1. L. Tonks, Phys. Rev. **48**, 562 (1935).
2. Я. И. Френкель, ЖЭТФ **6**, 347 (1936).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
4. М. Д. Габович, В. Я. Порицкий, Письма в ЖЭТФ **33**, 320 (1981).
5. А. В. Батраков, С. А. Попов, Д. И. Проскуровский, Письма в ЖТФ **19**, 66, 71 (1993).
6. Л. И. Праневичюс, И. Ю. Барташюс, В. И. Илгунас, Изв. вузов. Физика № 4, 44 (1969).
7. А. В. Батраков, Дисс.... канд. физ.-мат. наук, ИСЭ СО РАН, Томск (1997).
8. А. В. Батраков, С. А. Попов, Д. И. Проскуровский, Письма в ЖЭТФ **63**, 583 (1996).
9. E. A. Kuznetsov, M. D. Spector, and V. E. Zakharov, Phys. Lett. A **182**, 387 (1993).
10. E. A. Kuznetsov, M. D. Spector, and V. E. Zakharov, Phys. Rev. E **49**, 1283 (1994).
11. А. И. Дьяченко, В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, Физика плазмы **22**, 916 (1996).
12. В. Е. Захаров, ПМТФ № 2, 86 (1968).
13. Е. А. Кузнецов, М. Д. Спектор, ЖЭТФ **71**, 262 (1976).
14. С. К. Жданов, Б. А. Трубников, ЖЭТФ **94**(8), 104 (1988).
15. С. К. Жданов, Б. А. Трубников, *Квазигазовые неустойчивые среды*, Наука, Москва (1991).