

ДЛИННОВОЛНОВАЯ СТРУКТУРА НА ЗАРЯЖЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

Г. В. Колмаков, Е. В. Лебедева*

*Институт физики твердого тела Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 5 мая 1998 г.

Рассмотрена задача о равновесной форме заряженной поверхности диэлектрической жидкости в сильном электрическом поле, когда плоская поверхность теряет устойчивость. В случае, когда зазор между поверхностью и заряженным электродом мал по сравнению с капиллярной длиной и заряд полностью экранирует электрическое поле, возможно возникновение периодической длинноволновой структуры с малой амплитудой. В предположении об одномерном характере возникающей волны рассчитана равновесная форма поверхности. Оценено влияние граничных условий на стенках сосуда на зависимость амплитуды стоячей волны от приложенного напряжения. Показано, что эта зависимость весьма чувствительна к условиям смачивания жидкостью стенок сосуда. Обсуждается возможность применить развитую теорию для объяснения результатов экспериментов с заряженной поверхностью жидкого водорода.

1. ВВЕДЕНИЕ

В недавних экспериментах по реконструкции заряженной поверхности жидкого водорода [1, 2] наблюдалось возникновение стационарной структуры на поверхности жидкости — холма солитоноподобной формы с амплитудой много меньшей капиллярной длины $a = \sqrt{\sigma/\rho g}$, где σ и ρ — соответственно поверхностное натяжение и плотность жидкости. Подобное явление не удается объяснить в рамках существующей теории [3–6], развитой для случая электронов, локализованных над поверхностью массивного гелия и предсказывающей «жесткий» переход в реконструированное состояние с амплитудой структуры порядка a .

В настоящей работе рассчитана равновесная форма поверхности в условиях эксперимента [1], т.е. в случае, когда расстояние d между управляющим электродом и заряженной поверхностью жидкого водорода существенно меньше характерного горизонтального размера возникающей на поверхности волны деформации и поверхностный заряд полностью экранирует внешнее электрическое поле (заряженные кластеры образуют квазидвумерный слой под поверхностью жидкости). Расчет показывает, что в полях выше критической величины $V_0 = \sqrt{4\pi\rho g d^3}$ может образовываться стационарная периодическая волна с амплитудой много меньшей и периодом много большим капиллярной длины. Наблюдаемому в экспериментах [1] холму соответствует один период волны с максимумом внутри экспериментальной ячейки. Проведены численные расчеты зависимости амплитуды волны от напряжения, приложенного к обкладкам диода, при учете условий смачивания жидкостью стенок ячейки.

*E-mail: lebedeva@issp.ac.ru

Наличие малого параметра — угла наклона поверхности — позволяет значительно упростить расчет и выписать локальное уравнение, задающее форму поверхности и совпадающее с уравнением для бегущей периодической нелинейной волны на поверхности жидкости в канале [7]. Подход, основанный на разложении по малому параметру, был применен ранее в работе [8] при расчете стационарной формы заряженной поверхности жидкого гелия.

2. РАВНОВЕСНАЯ ФОРМА ПОВЕРХНОСТИ

Равновесной форме поверхности соответствует минимум эффективной энергии \mathcal{E} жидкости в поле электрических сил при заданных потенциале V на поверхности и объеме жидкости [9],

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{mech} - \frac{1}{8\pi} \int d\mathbf{r} \int_{\zeta(\mathbf{r})}^d dz E^2, \quad (1)$$

где \mathcal{E}_{mech} — полная механическая энергия жидкости, равная сумме энергии в поле силы тяжести и поверхностной энергии. Второе слагаемое в (1) — энергия электрического поля (интегрирование проводится по объему между поверхностью и управляющим электродом, находящимся над жидкостью на расстоянии d). Ось z направлена вертикально, противоположно направлению силы тяжести, \mathbf{r} — вектор в плоскости (x, y) , $z = \zeta(\mathbf{r})$ — уравнение поверхности.

Как будет видно из дальнейшего расчета, существует интервал напряжений V , в котором пространственная производная $|\nabla\zeta(\mathbf{r})| \ll 1$. При выполнении этого неравенства можно воспользоваться теорией возмущений, рассматривая величину $\nabla\zeta(\mathbf{r})$ в качестве малого параметра для вычисления электростатической энергии (1). Для упрощения расчетов будем также считать, что вместе с производной мала сама деформация поверхности, $\zeta \ll d$ (последнее предположение не носит принципиального характера).

В рассматриваемом случае ($d \ll a$) выражение для энергии жидкости (1), выписанное с точностью до кубических по ζ/d слагаемых, имеет вид

$$\mathcal{E} = \frac{\sigma}{2} \int d\mathbf{r} (\nabla\zeta)^2 - \frac{\rho g \gamma}{2} \int d\mathbf{r} \zeta^2 - \frac{V^2}{8\pi d^4} \int d\mathbf{r} \zeta^3. \quad (2)$$

Здесь $\gamma = V^2/V_0^2 - 1$, $V_0 = \sqrt{4\pi\rho g d^3}$. Заметим, что величина $\nabla\zeta$ возникает в выражении (2) только из поверхностной энергии жидкости (т.е. из первого слагаемого в (1)).

В области напряжений $V > V_0$ (т.е. при $\gamma > 0$) квадрат частоты поверхностных волн с малыми волновыми векторами $\omega^2 < 0$ и плоская поверхность жидкости неустойчива [10]. Уравнение для равновесной формы $\zeta(\mathbf{r})$ несжимаемой жидкости с учетом сохранения ее полного объема при изменении формы, справедливое при $\gamma > 0$, можно получить из условия равенства нулю вариации от суммы энергии жидкости \mathcal{E} и объема, добавленного с неопределенным множителем Лагранжа p [11],

$$\delta \left(\mathcal{E} - p \int dx \zeta \right) = 0. \quad (3)$$

Величина p имеет смысл давления на поверхности жидкости. Из (2), (3) следует, что равновесная форма поверхности жидкости описывается уравнением

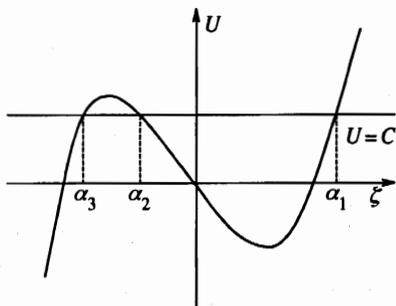


Рис. 1. График потенциальной энергии для движения фиктивной частицы

$$\zeta'' + \frac{D-1}{x}\zeta' + \gamma\zeta + \frac{3V^2}{2}\zeta^2 + p = 0. \quad (4)$$

Здесь D — размерность пространства, уравнение (4) записано в безразмерных переменных: расстояния в горизонтальной плоскости xy измеряются в единицах капиллярной длины, напряжение — в V_0 , а деформация $\zeta(\mathbf{r})$ — в единицах d .

В дальнейшем будем рассматривать одномерный случай ($D = 1$), когда деформация поверхности зависит лишь от одной координаты x . Это соответствует системе «валов» на поверхности жидкости. Тогда уравнение (4) имеет первый интеграл вида

$$\zeta'^2/2 + U(\zeta) = C, \quad (5)$$

где $U(\zeta) = \gamma\zeta^2/2 + V^2\zeta^3/2 + p\zeta$. Форма поверхности $\zeta(x)$ может быть получена интегрированием уравнения (5) с последующим вычислением величины p из условия

$$\int dx \zeta = 0. \quad (6)$$

(Уровень жидкости отсчитывается от его среднего значения.)

Уравнение, описывающее равновесную форму поверхности (4) имеет периодические решения с периодом X_0 , зависящим от напряжения V и амплитуды волны. При описании свойств таких решений полезна следующая механическая аналогия. При фиксированном p уравнение (4) может рассматриваться как уравнение движения для фиктивной точечной частицы с массой $m = 1$ во внешнем поле с потенциальной энергией $U(\zeta)$. При этом ζ играет роль координаты частицы, а x — времени. Тогда функционал (2) является лагранжианом частицы. Уравнение (5) выражает закон сохранения энергии, первое слагаемое в левой части имеет смысл «кинетической энергии» частицы, C — ее «полной энергии». График потенциальной энергии при $\gamma > 0$ приведен на рис. 1.

Уравнение $U(\zeta) = C$ может иметь три решения: $\zeta = \alpha_i$, $i = 1, 2, 3$ (будем считать, что $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$). Интересующая нас периодическая волна деформации соответствует движению частицы в области $\alpha_2 \leq \zeta \leq \alpha_1$, в которой $\zeta'^2 = C - U(\zeta) > 0$.

Пусть в некоторой точке $x = x_0$ функция ζ принимает минимальное значение α_2 . Это соответствует нулевой скорости ζ' фиктивной частицы в начальный момент времени. Тогда при $0 \leq x - x_0 \leq X_0/2$ форма поверхности может быть найдена из уравнения

$$\int_{\alpha_2}^{\zeta(x)} \frac{dz}{\sqrt{G(z)}} = x - x_0, \quad (7)$$

где $G(\zeta) = V^2(\alpha_1 - \zeta)(\zeta - \alpha_2)(\zeta - \alpha_3)$. Интеграл в (7) выражается через неполный эллиптический интеграл первого рода. Вычисление по формуле (7) приводит к следующему выражению для равновесной формы поверхности:

$$\zeta(x) = \alpha_3 + \frac{\alpha_{32}}{\operatorname{dn}^2 u}, \quad (8)$$

где $u = \sqrt{\alpha_{31}} V(x - x_0)/2$, dn — эллиптическая функция, ее модуль $k = \sqrt{\alpha_{21}/\alpha_{31}}$, $\alpha_{ik} = \alpha_k - \alpha_i$.

При действительном u функция $\operatorname{dn} u$ имеет период равный $2K(k)$, где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Следовательно, период стационарной волны (8) равен

$$X_0 = \frac{4K(k)}{\sqrt{\alpha_{31}} V}. \quad (9)$$

Деформация поверхности принимает значения

$$\zeta = \begin{cases} \alpha_1 > 0, & x - x_0 = (n + 1/2)X_0, \\ \alpha_2 < 0, & x - x_0 = nX_0, \end{cases}$$

где $n = 0, \pm 1, \dots$. Присутствие параметра x_0 в формуле (8) выражает трансляционную инвариантность уравнения (4).

Вычисление интеграла (6) с функцией $\zeta(x)$, взятой из уравнения (8), приводит к следующему уравнению, которое неявным образом определяет зависимость p от энергии C :

$$E(k) + \frac{\alpha_3}{\alpha_{31}} K(k) = 0. \quad (10)$$

Рассмотрим вначале волну малой амплитуды ($C \rightarrow 0$). При этом модуль k близок к нулю, и для нахождения корней α_i можно воспользоваться известными асимптотическими выражениями для интегралов K и E [12]. Из уравнений (8), (10) следует, что $\alpha_2 = -\alpha_1$ и

$$\zeta = \zeta_0 \cos qx. \quad (11)$$

Волновой вектор $q = \sqrt{\gamma}$ не зависит от C , $\zeta_0 = \zeta_0(C)$ — амплитуда волны, $p = 0$. Такое решение соответствует колебаниям фиктивной частицы вблизи минимума $\zeta = 0$ потенциала $U(\zeta)$ в пренебрежении нелинейным слагаемым (т. е., когда $V^2 \zeta_0 \ll \gamma$).

При конечных $C > 0$ значения корней α_i , необходимые для расчета формы поверхности по формуле (8), могут быть найдены численно. При этом величина p , определяемая из уравнения (10), оказывается отрицательной. График функций (8) при различных амплитудах волны представлен на рис. 2.

Результат численных расчетов зависимости амплитуды одномерной волны ζ_0 от периода X_0 представлен на рис. 3. Из него следует, что период волны при заданном V уменьшается с ростом амплитуды.

При произвольных значениях корней α_i уравнение (8) имеет решение в виде уединенного холма, которое может быть получено предельным переходом $X_0 \rightarrow \infty$. Однако образование такой волны запрещается условием постоянства полного объема жидкости,

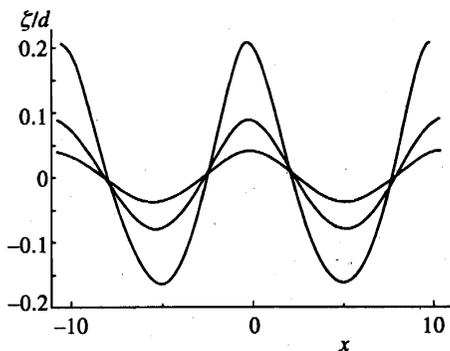


Рис. 2

Рис. 2. Форма поверхности жидкости при фиксированном напряжении и различных амплитудах волны ($\gamma = 0.3$)

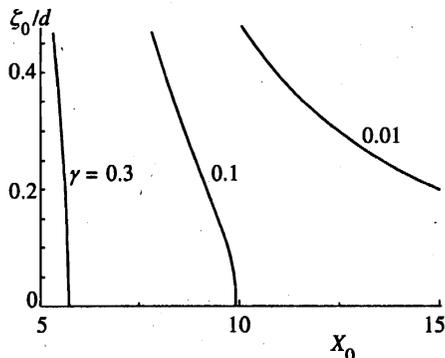


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость амплитуды волны на бесконечной поверхности жидкости от периода волны при различных напряжениях

которое выражается уравнением (10). Действительно, из уравнения (9) следует, что такое предельное решение возникает при слиянии корней α_2 и α_3 полинома $G(\zeta)$. При этом модуль $k \rightarrow 1$. Между тем уравнение (10) не имеет решений для k , близких к единице, что может быть показано разложением эллиптических интегралов по малой величине $k'^2 = 1 - k^2$.

Из отсутствия решений с $\alpha_2 = \alpha_3$ следует также, что при $C > 0$ уравнение $U(\zeta) - C = 0$ всегда имеет три корня. Таким образом, решение (8) уравнения (4) представляет собой периодическую волну при любом значении энергии $C > 0$ (т.е. при произвольной амплитуде волны).

Из приведенного расчета следует, что в случае одномерной волны на неограниченной в горизонтальном направлении поверхности, возникающей при заданном напряжении $V > V_0$, форма поверхности описывается однопараметрическим семейством кривых вида (8). Роль параметра играет амплитуда волны (или связанная с ней соотношением (10) константа $C > 0$). Следовательно, в отличие от известной задачи о равновесной форме поверхности массивного жидкого гелия при фиксированном числе зарядов, локализованных у поверхности, в рассматриваемом случае ($d \ll a$) невозможно однозначно определить равновесную форму поверхности без учета граничных условий на стенках сосуда.

Рассмотрим влияние граничных условий на возможную стационарную форму поверхности. Простейшим граничным условиям отвечает задание угла смачивания β жидкостью вертикальных стенок сосуда (ширину которого обозначим за L):

$$\zeta'(-L/2) = -\theta_0, \quad \zeta'(L/2) = \theta_0, \quad (12)$$

где $\theta_0 = \theta(x_0) = \text{ctg } \beta$. Будем предполагать выполненным неравенство $\theta_0 \ll 1$, в противном случае нарушается условие малости ζ' , которое является принципиальным при выводе уравнения (4).

Условия (12) ограничивают возможные значения C дискретной последовательностью C_n ($n = 0, 1, 2, \dots$). Число n оказывается равным числу максимумов функции $\zeta(x)$

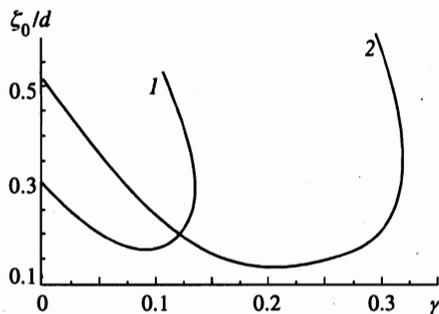


Рис. 4. Зависимость от напряжения амплитуды волны на поверхности жидкости в сосуде двух разных размеров: 1 — $x_0 = 14$; 2 — $x_0 = 10$. $\theta_0^2 = 0.001$

в промежутке $-L/2 < x < L/2$.

Рассмотрим вначале случай $\theta_0 = 0$. Зависимость амплитуды волны от приложенного напряжения может быть определена из зависимости $\zeta_0(X_0)$, рассчитанной для бесконечной поверхности. Амплитуда волны с заданным числом максимумов n равна ординате точки пересечения кривой $\zeta_0(X_0)$ с вертикальной прямой $X_0 = L/n$. Из рис. 3 следует, что ζ_0 монотонно уменьшается при повышении напряжения V .

При $\theta_0 \neq 0$ зависимость ζ_0 от напряжения может быть рассчитана аналогичным образом. Для этого необходимо рассмотреть точки пересечения вертикальной прямой $x_1 = L/n$ с графиком $\zeta_0(x_1)$, описывающим зависимость амплитуды от x -координаты точки (обозначенной за x_1), в которой выполняется условие (12). Численный расчет для случая $\theta_0 > 0$ приводит к двузначной функции $\zeta_0(x_0)$ при заданном γ . Результатом этого является существование двух ветвей в зависимости $\zeta_0(\gamma)$, одна из которых монотонно убывает, а другая имеет минимум. При некотором $\gamma = \gamma_1$ ветви переходят одна в другую. Если $\gamma > \gamma_1$, то стационарное решение с данным n отсутствует, поскольку оказывается невозможным удовлетворить граничным условиям (12). На рис. 4 приведена зависимость амплитуды ζ_0 волны с одним холмом от γ для двух значений ширины сосуда L .

Таким образом, непрерывный переход между состояниями с разным числом максимумов n невозможен, и образование холма на поверхности происходит со скачком амплитуды волны. Для каждого n существует некоторое минимальное возможное значение ζ_m амплитуды образующейся волны. При малых θ_0 по порядку величины $\zeta_m \sim \theta_0 d$.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из приведенных расчетов следует, что при выполнении соотношения $d \ll a$ на заряженной поверхности жидкости при напряжениях выше критической величины V_0 (при которой плоская поверхность теряет устойчивость) возможно образование длинноволновой стационарной волны малой амплитуды вида (8) («мягкая» реконструкция поверхности). В случае бесконечной поверхности форма и период волны при заданном напряжении V зависят от положительного параметра C и не могут быть однозначно определены без учета граничных условий на стенках сосуда. Учет условий смачивания на границе сосуда конечных размеров выделяет дискретный спектр возможных значений C_n , где n — число максимумов на профиле волны внутри сосуда конечных размеров. Характер зависимости амплитуды волны от приложенного напряжения различен

для нулевого и конечного углов смачивания.

В первом случае амплитуда волны уменьшается с ростом напряжения. При $\theta_0 > 0$ возможна немонотонная зависимость амплитуды возникающей на поверхности структуры от напряжения. Переход первоначального состояния (до реконструкции) в состояние с одним или несколькими максимумами осуществляется со скачком амплитуды $\sim \theta_0 d$, т.е. величина скачка мала в области применимости теории (при $\theta_0 \ll 1$). При достижении напряжения $V_2 = V_0 \sqrt{1 + \gamma_1}$, зависящего от размеров сосуда, реконструированная поверхность теряет устойчивость.

Приведенный расчет указывает на чрезвычайную чувствительность амплитудной зависимости волны, формирующейся в сосуде конечных размеров, к виду граничных условий на стенках сосуда.

Авторы глубоко благодарны Л. П. Межову-Деглину, А. А. Левченко и А. Б. Трусову за предоставление экспериментальных данных и многочисленные обсуждения результатов расчета. Работа частично поддержана грантами РКА-NASA TM-17 и Российского фонда фундаментальных исследований (№ 980216640).

Литература

1. А. А. Левченко, Е. Теске, Г. В. Колмаков, П. Лейдерер, Л. П. Межов-Деглин, В. Б. Шикин, Письма в ЖЭТФ 65, 547 (1997).
2. Г. В. Колмаков, А. А. Левченко, Л. П. Межов-Деглин, А. Б. Трусов, ФНТ 24, 158 (1998).
3. В. Б. Шикин, Ю. П. Монарха, *Двумерные заряженные системы в гелии*, Наука, Москва (1989).
4. В. Б. Шикин, П. Лейдерер, Письма в ЖЭТФ 32, 439 (1980).
5. Д. М. Черникова, ФНТ 6, 1513 (1980).
6. В. И. Мельников, С. В. Мешков, ЖЭТФ 81, 951 (1981).
7. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов*, Наука, Москва (1980).
8. В. Шикин, П. Лейдерер, ФНТ 23, 624 (1997).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
10. Д. М. Черникова, ЖЭТФ 68, 249 (1975).
11. Я. И. Френкель, ЖЭТФ 18, 659 (1948).
12. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов*, Физматгиз, Москва (1963).