

ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ АНГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Ю. Л. Болотин, В. Ю. Гончар*, М. Я. Грановский, А. В. Чечкин

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
310108, Харьков, Украина

Поступила в редакцию 26 июня 1998 г.

В работе исследованы особенности стохастической динамики гамильтоновой системы с потенциалом x^{2n} под действием внешнего монохроматического возмущения. Обнаружены три режима стохастической диффузии, отвечающих различной амплитуде внешнего возмущения. Показана возможность реализации хаотических режимов в маятниковых колебаниях шахты ядерного энергетического реактора типа ВВЭР как одно из приложений исследуемой модели. Предложен метод простого пропорционального контроля, позволяющий управлять хаотическими колебаниями ангармонического осциллятора.

1. ВВЕДЕНИЕ

Возрождение интереса к классической задаче о динамике нелинейной системы, подвергнутой периодическому возмущению, связано с двумя обстоятельствами. С одной стороны, интерес диктуется необходимостью описания быстро растущего числа экспериментов по взаимодействию периодических полей с нелинейными системами, а с другой — развитые в последние десятилетия принципиально новые представления [1–4] о динамике нелинейных систем требуют модельного подтверждения. Суть новых представлений заключается в том, что при определенных условиях движение строго детерминированной системы становится неотличимым от случайного, несмотря на отсутствие всякого источника случайности. Примеры динамического хаоса были обнаружены практически во всех разделах физики, и их число продолжает непрерывно увеличиваться.

Одномерная нелинейная гамильтонова система с зависящим от времени взаимодействием — простейшая динамическая система, допускающая хаотическое поведение. Случай монохроматического возмущения удобен для анализа и достаточно адекватно отражает экспериментальную ситуацию. Это связано с тем, что во многих случаях движение трехмерных объектов может быть приближенно описано с помощью одной эффективной степени свободы. Такая ситуация имеет место, например, в случае ридберговских состояний в микроволновом поле [5, 6] или поверхностных состояний электрона над жидким гелием [7]. Эти системы представляют и концептуальный интерес с точки зрения проблемы квантового хаоса [8, 9].

Общее изучение динамики любой нелинейной системы, допускающей хаотическое поведение, включает следующие этапы.

1. Численное изучение структуры классического фазового пространства.

*E-mail: vgonchar@kipt.kharkov.ua

2. Аналитические оценки критических параметров перехода к хаосу.
3. Исследование особенностей динамики системы в хаотических режимах, разработка методов описания этих особенностей.

Предыдущие работы авторов [10, 11] были посвящены решению двух первых проблем для ангармонического осциллятора с периодическим возмущением. Цель настоящей работы — исследование хаотических режимов в этой модели. Во втором разделе мы кратко опишем структуру фазового пространства и приведем выражение для амплитуды периодического возмущения, позволяющее определить интервалы регулярного и хаотического движений. В третьем разделе в квазилинейном приближении будет получено выражение для локального коэффициента диффузии и исследованы различные режимы диффузии. В четвертом разделе мы используем модель ангармонического осциллятора с периодическим возмущением для описания однонаправленных колебаний шахты ядерного энергетического реактора. Будет показана возможность стохастизации колебаний шахты реактора при параметрах, соответствующих находящимся в эксплуатации реакторам типа ВВЭР. Наконец, в пятом разделе мы продемонстрируем возможность трансформации хаотических колебаний ангармонического осциллятора в регулярные за счет введения в систему малого программируемого возмущения. Будет исследована устойчивость рассмотренного алгоритма контроля хаоса относительно аддитивного гауссова шума.

2. СТРУКТУРА ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

В настоящей работе исследуется классическая динамика частицы, генерируемая гамильтонианом

$$H(p, x, t) = H_0(p, x) + Fx \cos(\Omega t), \quad (1)$$

где невозмущенный гамильтониан

$$H_0(p, x) = p^2/2m + Ax^n = E \quad (n = 2l, \quad l > 1). \quad (2)$$

Здесь p, x, t — импульс, координата и масса частицы, а F и Ω — амплитуда и частота внешнего поля.

Ангармонический осциллятор, описываемый гамильтонианом (2), заполняет нишу между двумя важнейшими физическими моделями — гармоническим осциллятором ($n = 2$) и бесконечно высокой прямоугольной ямой ($n = \infty$). Исследование как классической, так и квантовой динамики ангармонического осциллятора (2) имеет богатую историю. Достаточно подробный список литературы можно найти в [12].

Гамильтониан (1) можно записать в безразмерных переменных, если ввести произвольные единицы массы m_0 , длины l_0 и времени t_0 . Новые параметры (m', A', F', Ω') связаны с исходными соотношениями

$$\begin{aligned} A' &= Fl_0^{n-2} t_0^2 / m_0, & \Omega' &= \Omega t_0, \\ F' &= Ft_0^2 m_0^{-1} l_0^{-1}, & m' &= m / m_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Систему (3) путем выбора единиц m_0, l_0, t_0 можно использовать для получения «удобных» значений параметров m', A', F', Ω' . Из этих четырех параметров три могут

быть фиксированы. Например, выбор $A' = m' = \Omega' = 1$ реализуется при следующем выборе основных единиц:

$$m_0 = m, \quad t_0 = \Omega^{-1}, \quad l_0 = (m\Omega^2/A)^{1/(n-2)}. \quad (4)$$

При этом единственный входящий в масштабированный гамильтониан

$$H = p^2/2 + x^n + Fx \cos(t) \quad (5)$$

параметр F (в дальнейшем там, где это не вызывает недоразумений, штрихи будем опускать) выражается через исходные физические параметры соотношением

$$F' = F \left(\frac{1}{m\Omega^2} \right) \left(\frac{A}{m\Omega^2} \right)^{1/(n-2)} = \frac{F}{m\Omega^2 l_0}. \quad (6)$$

Масштабированный гамильтониан $H_0(p, x)$ в переменных действие—угол (I, θ) [11, 13] имеет вид

$$H_0(I) = [2\pi/\alpha G(n)I]^\alpha, \quad (7)$$

где

$$G(n) = 2(2\pi)^{1/2} \frac{\Gamma(1 + 1/n)}{\Gamma(1/2 + 1/n)}, \quad \alpha = \frac{2n}{n+2}. \quad (8)$$

Резонансные значения действия I_k , определяемые из условия

$$k\omega(I) = 1, \quad \omega(I) = \frac{\partial H_0}{\partial I}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

равны

$$I_k = \alpha [G(n)/2\pi]^{2n/(n-2)} k^{(2+n)/(2-n)}. \quad (10)$$

Если разложить возмущение в ряд Фурье по θ , то полный гамильтониан системы может быть записан в виде

$$H(I, \theta, t) = H_0(I) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k(I) \cos(k\theta - t), \quad (11)$$

где амплитуды Фурье x_k определяются интегралами

$$x_k(I) = \int \frac{d\theta}{2\pi} x(I, \theta) \exp(ik\theta). \quad (12)$$

Анализ, базирующийся на критерии перекрытия резонансов Чирикова [14], приводит к следующему выражению для критической амплитуды внешнего поля, обеспечивающей перекрытие соседних нечетных резонансов [11] (ширины четных резонансов для рассматриваемого потенциала в первом порядке по амплитуде внешнего поля F равны нулю):

$$F_k^{cr} = 2^{(2-3n)/(n-2)} \frac{n(n-2)}{(n+2)^2 x_k} \left[\frac{G(n)}{\pi} \right]^{4n/(n-2)} \times \\ \times k^{4/(n-2)} \left[k^{(2+n)/(2-n)} - (k+1)^{(2+n)/(2-n)} \right]^2. \quad (13)$$

Соотношение (13) решает проблему восстановления структуры фазового пространства рассматриваемого гамильтониана при произвольных значениях параметров. Его анализ позволяет выделить следующие основные особенности этой структуры.

1. Для прямоугольной ямы ($n = \infty$) при любом значении F можно указать энергию (или номер резонанса), выше и ниже которой движение будет соответственно регулярным или хаотическим.

2. Для любого $n < \infty$ всегда можно указать значение внешнего возмущения $F_0(n)$ такое, что для всех $F < F_0(n)$ движение будет регулярным при всех энергиях.

3. Для любого $F > F_0(n)$ ангармонический осциллятор испытывает переход регулярность—хаос—регулярность, т. е. в этом случае мы всегда можем указать энергетический интервал, внутри которого движение будет хаотическим, а вне — регулярным.

Причина возникновения перехода регулярность—хаос—регулярность состоит в следующем [10, 11]. Для высоколежащих резонансов (малые k) при фиксированном F ширины резонансов убывают с ростом номера медленнее, чем расстояния между резонансами. Это обеспечивает существование по мере роста возмущения хорошо известного (нормального) перехода регулярность—хаос. Однако такая ситуация имеет место лишь на ограниченном энергетическом интервале. Увеличение относительной скорости сокращения ширин по сравнению с расстояниями между резонансами приводит к тому, что условие перекрытия резонансов перестает выполняться, что приводит к новому (аномальному) переходу хаос—регулярность.

Структура фазового пространства достаточно плавно зависит от степени ангармоничности n . Поэтому приведем в качестве типичного примера численные результаты для $n = 8$. На рис. 1 представлена «фазовая диаграмма», позволяющая при фиксированном уровне внешнего возмущения определить энергетические интервалы регулярного и хаотического движений. Представленная на этом же рисунке синоптическая зависимость $E(x, t_n = 2\pi n)$ подтверждает существование аномального перехода хаос—регулярность. На рисунке хорошо просматриваются сохранившиеся при $k > 13$ изолированные резонансы, соответствующие регулярному движению.

3. СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИФФУЗИЯ

При достаточно большой амплитуде внешнего возмущения F происходит сильное перекрытие резонансов, и эволюция системы может быть описана с помощью функции распределения $f(I, t)$, удовлетворяющей уравнению Фоккера—Планка (квазилинейное приближение):

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial I} D_{ql}(I) \frac{\partial f}{\partial I}, \quad (14)$$

$D_{ql}(I)$ — квазилинейный коэффициент диффузии. Последовательный вывод уравнения (14) и коэффициента квазилинейной диффузии предполагает использование уравнения Лиувилля в качестве исходного для функции распределения в пространстве действие —

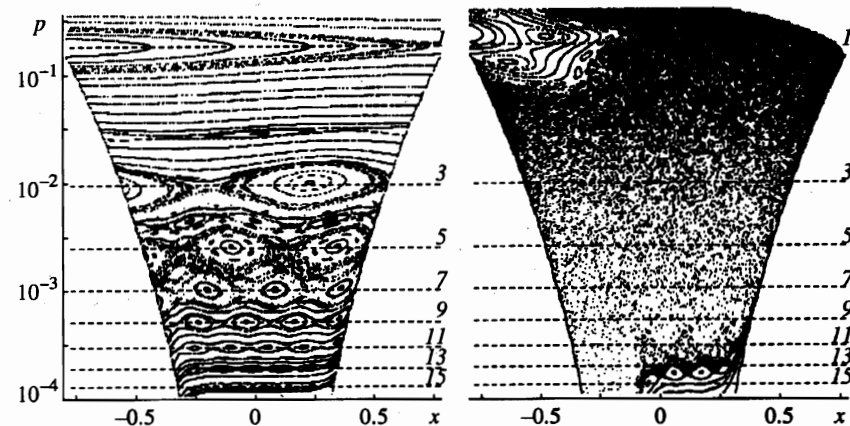


Рис. 1. Вверху: стробоскопическое изображение фазового пространства, $n = 8$; слева — для $F = 0.01$, справа — для $F = 0.2$. Внизу: фазовая диаграмма для $n = 8$. Штриховая линия разделяет регулярную (слева от линии) и хаотическую (справа) области. Квадраты показывают границу устойчивости для резонансов, номера которых отмечены рядом цифрами. A, B, C — три области на фазовой диаграмме, соответствующие различным режимам стохастической диффузии

угол с последующим ее усреднением по начальным фазам и анализом условий малости отброшенных (в уравнении для усредненной функции) слагаемых, см., например, [1]. В этой работе мы ограничимся выводом формулы для $D_{qI}(I)$, используя в качестве исходного выражение для коэффициента диффузии пробной частицы:

$$D_{qI}(I) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \overline{(\dot{I}(t_1)\dot{I}(t_2))}, \tag{15}$$

где $\dot{I} \equiv dI/dt$, черта сверху отражает усреднение по начальным фазам. Ниже в этом разделе мы будем различать размерные (без штрихов) и безразмерные (со штрихами) величины. Коррелятор в (15) вычисляется с помощью уравнений движения в пространстве действие — угол:

$$\frac{dI}{dt} = F \sum_{k=-\infty}^{\infty} kx_k(I) \sin(k\theta - \Omega t), \tag{16}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(t) + F \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{dx_k(I)}{dI} \cos(k\theta - \Omega t).$$

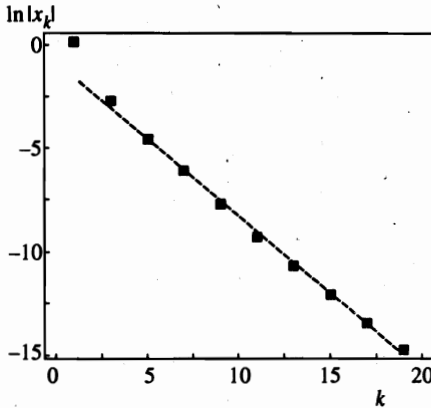


Рис. 2. Значения логарифма безразмерного коэффициента Фурье x_k для нечетных k (квадраты). Штриховая линия — зависимость (19)

Важно отметить, что в квазилинейном приближении интегрирование второго из уравнений (16) осуществляется вдоль невозмущенной траектории,

$$\theta(t) \approx \theta_0 + \omega t. \tag{17}$$

Подставляя (17) в первое из уравнений (16), а затем в (15), усредняя по начальным фазам и переходя к новым переменным $t_1 - t_2, (t_1 + t_2)/2$, нетрудно в пределе $t \rightarrow \infty$ получить выражение для коэффициента квазилинейной диффузии:

$$D_{ql}(I) = \frac{\pi F^2}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 x_k^2 \delta(k\omega(I) - \Omega). \tag{18}$$

Из (18) можно получить оценки локального коэффициента диффузии при $I \approx I_k$. Для этого следует использовать явное выражение для коэффициентов Фурье, определяемых согласно (12), которое, однако, является слишком громоздким. Для получения простых оценок оказывается возможным аппроксимировать $x'_k = x_k(A/E)^{1/n}$ зависимостью

$$x'_k \approx 0.47 \exp(-3k/4) \tag{19}$$

для $n = 8$. Рисунок 2 иллюстрирует тот факт, что простое выражение (19) хорошо аппроксимирует зависимость x'_k от k для $k \geq 3$. Тогда с помощью (19) для локального коэффициента квазилинейной диффузии при $n = 8$ из (18) получаем оценку (с точностью до численного множителя порядка 1):

$$D_{ql}(I_k) \approx F^2 \left(\frac{E_k}{A} \right)^{1/4} \frac{\Omega^2}{\omega^3(I_k)} \exp \left\{ -\frac{3\Omega}{2\omega(I_k)} \right\}. \tag{20}$$

Результаты численного исследования стохастической диффузии в нашей модели ($n = 8$) представлены на рис. 3. Численный анализ позволил определить на бифуркационной диаграмме в безразмерных переменных (E, F) три области — A, B и C , характеризующиеся разными режимами диффузии, см. рис. 1. Дадим краткую качественную характеристику этих режимов.

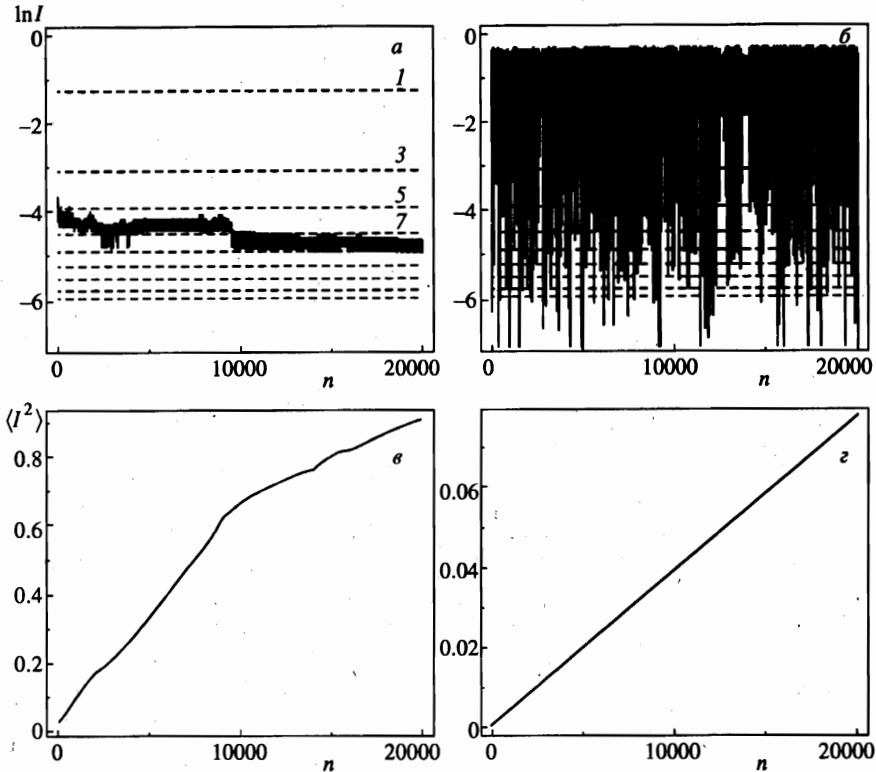


Рис. 3. Хаотическая траектория в переменных — верхний ряд. Зависимость $\langle I^2 \rangle$ от n — нижний ряд: а), в) — при $F = 0.01$ (область А); б), з) — при $F = 0.2$ (область В)

Область А, в которой амплитуда F внешней силы лишь незначительно превышает минимальное критическое значение $F_0(8)$. При этом первичные резонансы перекрываются слабо, и диффузия осуществляется по вторичным резонансам. На рис. 3а изображена хаотическая траектория в безразмерных переменных (t_n, I) , $t_n = 2\pi n$, которая вначале блуждает вокруг 5-го первичного резонанса, а затем перескакивает на 7-ой первичный резонанс. На рис. 3в изображена зависимость $\langle I^2 \rangle$ от t_n при $F = 0.01$, которая имеет линейный характер, скобки $\langle \dots \rangle$ означают вероятностное среднее. Обратим внимание на то, что коэффициент диффузии $D = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle I^2 \rangle / t$, определяемый по этому графику как тангенс угла наклона к оси времени, различен при блуждании частицы в окрестности 5-го и 7-го первичных резонансов.

Область В соответствует умеренным амплитудам внешней силы. В этой области первичные резонансы эффективно перекрываются и, тем самым, выполняются условия квазилинейного приближения. Хаотическая траектория $I(n)$ при $F = 0.2$ изображена на рис. 3б. Зависимость $\langle I^2 \rangle$ от n изображена на рис. 3з. Виден линейный характер этой зависимости.

Область С соответствует большим амплитудам внешней силы. Особенность режима диффузии в этой области иллюстрирует рис. 4. Видно, что зависимость коэффициента диффузии от квадрата амплитуды внешней силы F , будучи линейной в области В (что

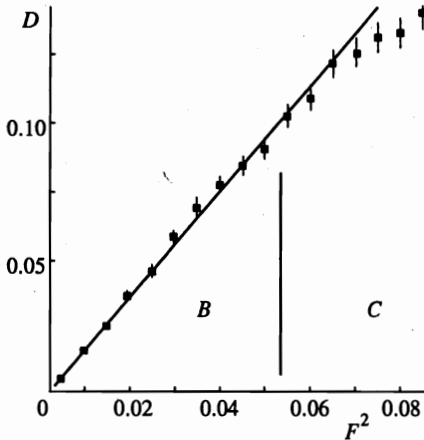


Рис. 4. Зависимость коэффициента диффузии $D = \langle I^2 \rangle / n$ от квадрата амплитуды внешней силы для областей B и C

соответствует квазилинейному приближению, см. (18)), в области C становится более полой. Этому эффекту можно дать следующее качественное объяснение. При выводе квазилинейного коэффициента диффузии используется интегрирование по углу вдоль невозмущенной траектории, см. (17). При увеличении амплитуды внешней силы следует учитывать ее влияние на траекторию. В теориях резонансного уширения [15] учет такого влияния сводится к замене δ -функции в квазилинейном коэффициенте диффузии на резонансную кривую конечной ширины, которая увеличивается с ростом амплитуды внешней силы. Учет качественно эту особенность, заменив δ -функцию в (18) экспонентой:

$$\delta(k\omega - \Omega) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}\gamma} \exp\left\{-\frac{(k\omega - \Omega)^2}{\gamma^2}\right\}, \quad (21)$$

где $\gamma(F)$ — ширина экспоненциальной кривой, которая увеличивается с ростом F . Тогда для коэффициента квазилинейной диффузии при $\gamma \ll \omega, \Omega$ получаем оценку

$$D_{ql}(I) \rightarrow \tilde{D}_{ql}(I) = D_{ql}(I)(1 - \Delta), \quad \Delta \propto \gamma^2/\omega\Omega. \quad (22)$$

Если $\gamma = 0$, то из (22) следует прежняя оценка (20) и, тем самым, линейная зависимость коэффициента диффузии D от F^2 . Как видно из (22), увеличение F влечет за собой увеличение γ и, как следствие, более пологую зависимость коэффициента диффузии от квадрата амплитуды внешнего возмущения.

4. АНГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗМУЩЕНИЕМ КАК МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ ШАХТЫ РЕАКТОРА

В качестве одного из возможных приложений полученных результатов исследуем возможность реализации хаотических режимов в маятниковых колебаниях шахты реактора типа ВВЭР. В процессе эксплуатации шахта реактора подвергается воздействию мощных потоков теплоносителя из холодных ниток циркуляционных петель. Вследствие этого она совершает колебательные движения относительно корпуса реактора, которые регистрируются и анализируются внешними нейтронными датчиками (ионизационными камерами), установленными вне шахты в корпусе [16]. Мониторинг движений

шахты и ее внутренних компонент в процессе эксплуатации — важная задача шумовой диагностики реакторов, интенсивно развивающейся в странах, обладающих атомными реакторами, см. материалы Симпозиума SMORN VII (Specialists Meeting on Reactor Noises) [17]. Особо следует отметить возможность возникновения (вследствие износа и поломок части креплений) (квази)маятниковых колебаний шахты как балки с закрепленным верхним концом, сопровождающихся контактированием с корпусом в нижней части шахты [18]. Идентификация, описание и контроль за изменением характеристик этих колебаний важны для ранней диагностики дефектов конструкции, приобретенных в процессе эксплуатации.

Мониторинг шахты реактора включает измерение, обработку сигналов шумовых датчиков и их анализ с помощью теоретических моделей. При интерпретации данных измерений колебаний шахты (как и других элементов конструкций реактора) используются модели линейных осцилляторов (или связанных линейных осцилляторов), в которых значения масс, коэффициентов жесткости и трения получаются комбинированным применением результатов теоретических расчетов, стендовых измерений, компьютерного моделирования и предпусковых испытаний [19]. В общем случае внешняя сила в таких моделях должна состоять из двух компонент — случайной, обусловленной локальными турбулентными пульсациями, и регулярной, имеющей в спектре несколько мощных пиков; пик с максимальной амплитудой — на частоте вращения главных циркуляционных насосов (более подробно о происхождении внешних сил, действующих на шахту реактора, см. в обзоре [19]). По изменениям от измерения к измерению, например, спектральных характеристик (автоспектров мощности, функций когерентности и фазы) шумовых сигналов, регистрирующих колебания шахты, можно делать выводы о состоянии внутрикорпусного оборудования и узлов крепления. Возможность этого следует из того факта, что различные типы вероятных дефектов приводят к изменениям в различных частях спектра [20]. Однако при интерпретации данных измерений следует иметь в виду, что (квази)маятниковые колебания шахты вследствие контактирования с корпусом являются существенно нелинейными [18] и, следовательно, под действием периодической внешней силы могут быть хаотическими. Свойства хаотических движений не могут быть учтены в рамках линейных моделей; поэтому эти модели должны быть дополнены анализом возможных нелинейных эффектов. Впервые нелинейные эффекты в (квази)маятниковых колебаниях шахты исследовались в работе [21], однако возможность хаотизации этих колебаний под действием внешней периодической силы не рассматривалась. Недавно были начаты теоретические и экспериментальные исследования нелинейных эффектов в колебаниях других элементов внутрикорпусного оборудования — контролируемых стержней и тепловыделяющих сборок [22].

Ответить на вопрос, реализуются ли хаотические режимы при значениях параметров, соответствующих эксплуатируемым реакторам, могут только оценки, выполненные в рамках адекватных моделей. В качестве одной из простейших моделей, описывающих однонаправленные квазимаятниковые колебания шахты реактора, можно использовать рассмотренную выше модель ангармонического осциллятора с периодическим возмущением. Потенциальная энергия осциллятора моделирует упругое взаимодействие, возникающее при контакте шахты с корпусом реактора, а периодическая внешняя сила — силу на частоте вращения главных циркуляционных насосов.

Для того чтобы определить, какой тип движения (хаотический или регулярный) реализуется в квазимаятниковых колебаниях, требуется связать параметры модели с параметрами реактора. Пусть Δ — амплитуда колебаний шахты реактора при фикси-

рованной энергии,

$$E = A\Delta^n. \quad (23)$$

Тогда для коэффициента жесткости A в терминах амплитуды Δ получим

$$A = (2/\pi)m\omega^2\Gamma_n^2\Delta^{2-n}, \quad \Gamma_n \equiv \Gamma(1+1/n)/\Gamma(1/2+1/n). \quad (24)$$

В этих же терминах единица длины l_0 равна

$$l_0 = \left[(2/\pi)^{1/2}\Gamma_n\omega \right]^{2/(2-n)} \Delta \quad (25)$$

и, следовательно, безразмерная энергия

$$E' = E/(m\Omega^2 l_0^2) = \left[(2/\pi)\Gamma_n\omega/\Omega \right]^{2n/(2-n)}. \quad (26)$$

Исходя из закона изменения импульса потока теплоносителя, действующего на шахту, получаем силу со стороны теплоносителя из холодной нитки одной циркуляционной петли

$$F = \rho\nu^2\pi r^2, \quad (27)$$

где ρ — плотность теплоносителя, ν — средняя скорость теплоносителя в холодной нитке, r — радиус трубопровода. Безразмерная результирующая сила со стороны двух противоположных циркуляционных петель есть

$$F' = F/m\omega^2 l_0 = (\alpha/\Delta)(\rho\nu^2\pi r^2/m\omega^2) \left[(2/\pi)^{1/2}\Gamma_n\omega/\Delta \right]^{2/(n-2)}, \quad (28)$$

где коэффициент α характеризует степень дисбаланса противоположных насосов [23].

Выражения (26) и (28) позволяют определить, где на полученной выше фазовой диаграмме (см. рис. 1) расположена область, соответствующая характерным значениям параметров для квазимаятниковых колебаний шахты реактора типа ВВЭР-1000. Номинальные значения параметров таковы: 1) $m = 2.20 \cdot 10^5$ кг; 2) $W = 2\pi 16.6$ Гц; 3) $r = 0.425$ м; 4) $\Delta = 0.06$ мм.

На рис. 5 заштрихованы части фазовых диаграмм для различных значений n , соответствующие интервалу параметров $\omega = 2\pi(2-6)$ Гц и $\alpha = 0.02-0.15$ [24] (как и на предыдущих рисунках, штрихи у безразмерных величин опущены). Как видно, для «типичного» набора параметров возможна реализация хаотических режимов. Хаотизация колебаний шахты реактора происходит в окрестности тех резонансов, которые перекрываются при рассматриваемом уровне периодического возмущения. При этом параметр n определяет «относительный вес» областей с регулярным и хаотическим движением в допустимой области значений параметров.

5. КОНТРОЛЬ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ АНГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Одной из важных особенностей динамики нелинейной системы, взаимодействующей с периодическим внешним полем, является возможность нерезонансного (диффузионного) поглощения энергии. Применительно к рассмотренной выше задаче этот

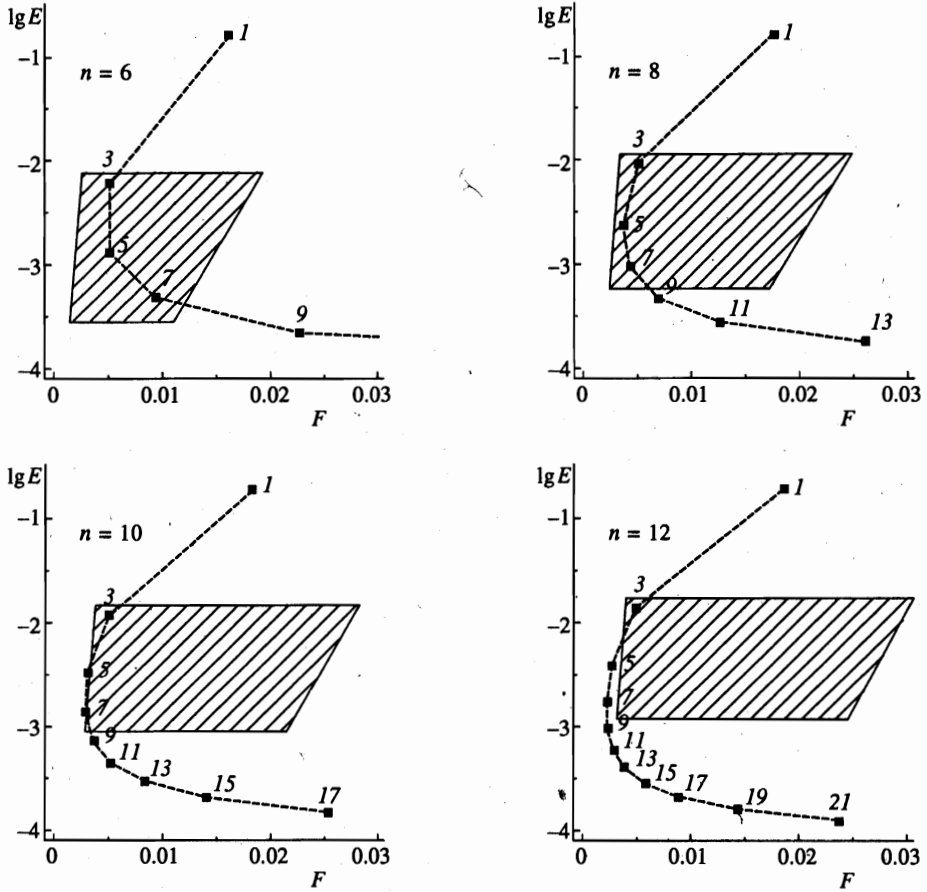


Рис. 5. Фазовые диаграммы для различных значений n . Заштрихованные области соответствуют параметрам реактора типа ВВЭР-1000

процесс может привести к опасному увеличению амплитуды колебаний шахты реактора за счет поглощения энергии теплоносителя. Хаос полезен, когда он, усиливая перемешивание, образует мощный механизм тепло- и массопередачи. Однако во многих случаях (в частности для колебаний шахты реактора) хаос нежелателен, так как приводит к дополнительной механической усталости элементов креплений, вредно сказывается на работе приборов, затрудняет анализ спектров. Поэтому в последнее время были предприняты существенные усилия для контроля хаоса, т.е. трансформации его в периодический процесс. Для достижения этой цели используется малое программированное изменение одного (или нескольких) параметров системы [25] или же специальным образом сконструированное внешнее возмущение [26].

Как известно, экстремальная чувствительность к малым возмущениям — ключевая особенность хаотических систем. В 1990 году OGY (E. Ott, C. Grebogi, J. A. Yorke) [25] предложили использовать эту особенность для контроля диссипативных динамических систем, у которых в фазовом пространстве существует странный аттрактор. Для стабилизации любой неустойчивой периодической орбиты, лежащей на аттракторе, OGY

предложили следующую процедуру. На предварительном этапе с помощью уравнений движения или временных рядов измеренных характеристик системы [27] строится сечение Пуанкаре $Z_{n+1} = F(Z_n, p_0)$ для некоторого фиксированного значения параметра $p = p_0$ системы, доступного регулировке. Когда точка Z_n хаотической траектории системы в сечении Пуанкаре окажется достаточно близко к точке $Z^*(p_0)$ целевой неустойчивой орбиты периода k ($Z^*(p_0) = F^k(Z^*(p_0), p_0)$), мы немного изменим величину контрольного параметра p ($p_n = p_0 + \delta p_n$) так, чтобы на следующей итерации точка $Z_{n+1} = F(Z_n, p_n)$ попала на стабильное многообразие седловой точки $Z^*(p_0)$. Это условие приводит к основной формуле OGY-метода контроля:

$$\delta p_n = \frac{\lambda_u f_u \delta Z_n}{(\lambda_u - 1) f_u w}, \quad (29)$$

где

$$\delta Z_n = Z_n - Z^*(p_0), \quad w = \left. \frac{\partial F(Z, p)}{\partial p} \right|_{Z^*, p_0},$$

λ_u — неустойчивое собственное значение матрицы Якоби, описывающей в линейном приближении динамику в окрестности $Z^*(p_0)$, а f_u — контрвариантный неустойчивый собственный вектор матрицы Якоби. Формула (29) может быть представлена в виде

$$\delta p_n = C f_u \delta Z_n, \quad (30)$$

т. е. отклонение параметра от номинального значения, требуемого для контроля, пропорционально проекции вектора δZ_n на нестабильное направление f_u , а константа C вычисляется по проекции на это же направление реакции системы w на возмущение параметра p . Эффективность OGY-метода контроля и его многочисленных обобщений была продемонстрирована практически во всех разделах естественных наук (физика, химия, медицина), см. [28].

Подавляющее большинство реализованных примеров контроля хаоса относится к движению на странном аттракторе. Сложность контроля хаоса в гамильтоновых системах связана с двумя обстоятельствами [29].

1. В силу сохранения фазового объема матрица Якоби для некоторых точек периодической траектории может иметь комплексные собственные значения, лежащие на единичной окружности. Поэтому формула OGY (29) в этом случае непосредственно неприменима. Конечно, мы можем, используя матрицу Якоби для орбиты периода k , получать действительные собственные значения с помощью формулы (29). Но в этом случае, используя метод контроля только на каждом k -ом шаге, мы можем либо не добиться контроля, либо быстро потерять его даже при небольшом шуме.

2. Вторая причина связана с длиной τ переходного периода, предшествующего захвату под контроль. В диссипативных хаотических системах для случайно выбранных начальных условий τ имеет экспоненциальное вероятностное распределение [30]:

$$P(\tau) \propto \exp(-\tau/\langle \tau \rangle), \quad (31)$$

для больших τ , где $\langle \tau \rangle$ — среднее время захвата под контроль, которое степенным образом зависит от допустимой области возмущения параметра

$$\langle \tau \rangle \propto (\delta p)_{max}^{-D}, \quad (32)$$

где D — информационная размерность аттрактора. Следовательно, в этом случае $\langle \tau \rangle$ всегда конечно. В гамильтоновых системах [31]

$$P(\tau) \propto \tau^{-\alpha}, \quad (33)$$

где $1 < \alpha < 2$. В этом случае среднее время захвата $\langle \tau \rangle$ бесконечно.

В силу перечисленных трудностей применим для стабилизации хаотических колебаний ангармонического осциллятора альтернативное приближение, которое будем называть простым пропорциональным контролем. Для формулировки его процедуры заметим, что процесс контроля можно разбить на несколько этапов.

1. Приближение системы к целевой периодической орбите путем эргодических блужданий. Для ускорения этого этапа иногда используются специальные методы.

2. Захват под контроль; здесь используется максимальное воздействие на систему.

3. Экспоненциальное приближение к цели (γ — показатель экспоненты). Численное значение γ можно рассматривать как меру эффективности контроля и использовать в качестве целевой функции при оптимизации контроля.

4. Этап стабилизации с малой хаотической составляющей, величина которой определяется либо шумами, либо флуктуациями, связанными с конечной точностью представления чисел в компьютере.

5. Восстановление хаоса после освобождения из-под контроля. Характеризуется экспоненциально быстрым удалением от целевой орбиты и нарастанием хаоса.

Следует подчеркнуть, что эта классификация универсальна как для дискретных отображений, так и для потоков обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему, динамика которой описывается двумерным отображением (для непрерывных систем будем предполагать, что это отображение порождается соответствующим сечением Пуанкаре)

$$\mathbf{Z}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{Z}_n). \quad (34)$$

Тогда полностью контролируемым назовем отображение

$$\mathbf{Z}_{n+1}^c = \mathbf{F}(\mathbf{Z}_n) + \Delta \mathbf{F}(\mathbf{Z}_{n+1}), \quad (35)$$

где

$$\Delta \mathbf{F}(\mathbf{Z}_{n+1}) = \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{Z}_{n+1} - \mathbf{Z}_{n+1}^*),$$

$$\hat{\mathbf{C}} \equiv \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

— матрица коэффициентов контроля, а \mathbf{Z}_{n+1}^* — неустойчивая неподвижная точка или одна из точек неустойчивой периодической орбиты отображения. Отметим, что в том случае, когда аддитивный контрольный параметр входит только в одну из строк отображения (например верхнюю), отображение (35) сводится к контролируемому OGY-отображению: коэффициенты C_{11} и C_{12} определяются по формулам OGY, а $C_{21} = C_{22} = 0$.

Для нахождения коэффициентов C_{ij} можно применить один из обычных методов оптимизации (например, метод градиентов, метод сопряженных направлений или метод случайного поиска), используя в качестве целевой функции показатель γ .

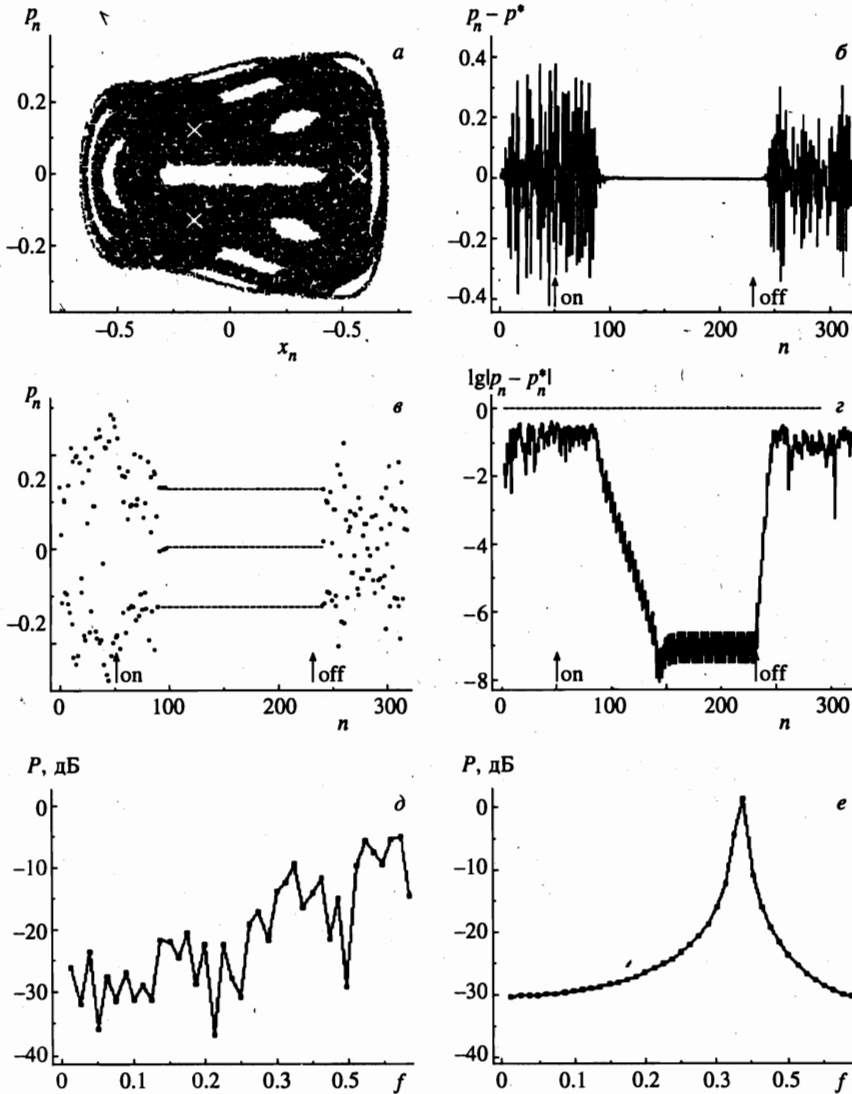


Рис. 6. Стабилизация хаотических колебаний ангармонического осциллятора с помощью простого пропорционального контроля. Целевой выбрана неустойчивая орбита с периодом 3

На рис. 6 представлены результаты стабилизации с помощью метода контроля неустойчивой орбиты с периодом 3 ангармонического осциллятора (5) с матрицей \tilde{C} , найденной путем случайного поиска. Максимально допустимое возмущение системы в процессе контроля не превышает 0.03. На рис. 6а изображено синоптическое сечение Пуанкаре классического фазового пространства $\{p(t_n), x(t_n)\}$ в моменты времени $t_n = 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Все точки в хаотической области получены с помощью единственной траектории; крестиками обозначена целевая неустойчивая орбита с периодом 3. На рис. 6б изображена разность $p(t_n) - p_F(i)$ ($i = 1, 2, 3$) между текущей синоптической

ской компонентой $p(t_n)$ и p -координатой неустойчивой периодической орбиты. Метод контроля начинал применяться на 50 итерации и переставал применяться на 230 (эти моменты изображены на рисунке стрелками). Как видно, этап эргодических блужданий, предшествующий захвату под контроль, составлял 30–40 итераций. На рис. 6в процесс контроля иллюстрируется временной серией $p(t_n)$. Изображенный на рис. 6з процесс контроля в логарифмическом масштабе позволяет проследить все указанные выше этапы контроля. Наконец, на рис. 6д, е изображены спектры мощности $P(f)$ системы без применения (д) и с применением (е) ($n = 150$ –230) метода контроля. При использовании метода контроля хорошо виден пик, соответствующий частоте целевой периодической орбиты ($f = 1/3$).

Рисунок 7 иллюстрирует устойчивость используемого алгоритма контроля хаоса к аддитивному гауссовскому шуму. На этом рисунке изображены те же характеристики системы, что и на рис. 6, но при этом в правые части уравнений движения были добавлены члены $\varepsilon\delta_{xn}$ и $\varepsilon\delta_{pn}$. Независимые случайные величины δ_{xn} и δ_{pn} имеют гауссовское распределение вероятностей, нулевое среднее значение и единичную дисперсию. Амплитуда шума ε была выбрана равной 0.03. При повышении уровня возмущения всего до 0.06 удается сохранить приемлемое качество контроля (рис. 7б, в, г) и достаточно хорошую спектральную чистоту (рис. 7е).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследованы особенности динамики ангармонического осциллятора с периодическим монохроматическим возмущением, связанные со стохастизацией колебаний при изменении параметров системы.

Численный анализ уравнений движения позволил выделить в плоскости (E, F) три области с различными режимами диффузии. Область малых амплитуд, в которой диффузия в основном осуществляется по вторичным резонансам с редкими переходами между соседними первичными резонансами. Область умеренных амплитуд, в которой выполняются условия квазилинейного приближения. Зависимость $\langle I^2 \rangle$ от t_n носит в этой области четко выраженный линейный характер. И, наконец, область больших амплитуд, в которой наблюдаются отклонения от квазилинейного приближения. Учет влияния амплитуды внешней силы на невозмущенную траекторию, используемую при выводе квазилинейного коэффициента диффузии, позволил качественно объяснить наблюдаемое отклонение.

В качестве одного из возможных приложений полученных результатов рассмотрена возможность реализации хаотических режимов в квазимаятниковых колебаниях шахты реактора типа ВВЭР. Мы показали, что для параметров эксплуатируемых реакторов этого типа колебания шахты могут быть как регулярными, так и хаотическими в зависимости от зазора между шахтой и корпусом реактора и результирующей силы, действующей на шахту реактора со стороны потока теплоносителя. Учет возможности стохастизации колебаний шахты реактора может помочь правильной интерпретации спектров шумовых сигналов, а значит, увеличить достоверность выводов о состоянии внутрикорпусного оборудования.

В работе предложен алгоритм простого пропорционального контроля, позволяющий трансформировать хаотические колебания ангармонического осциллятора в периодические, предотвращая тем самым опасное (в случае хаотических колебаний шахты

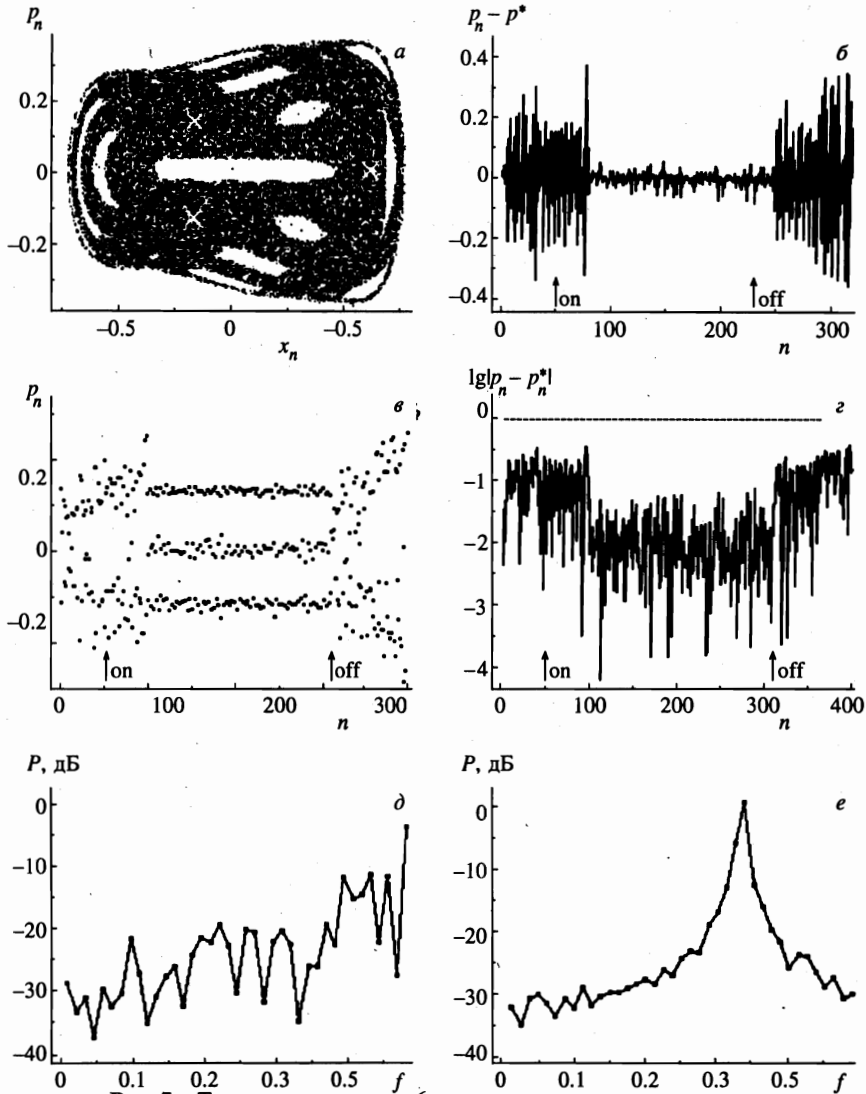


Рис. 7. То же, что и на рис. 6, но в условиях внешнего шума

реактора) увеличение амплитуды колебаний за счет нерезонансного поглощения энергии.

Авторы выражают глубокую признательность В. В. Булавину (РНЦ «Курчатовский институт», Россия) и И. Пажиту (I. Pazsit) (Chalmers University of Technology, Sweden) за обсуждение вопросов, связанных с применением модели нелинейного осциллятора к описанию колебаний шахты реактора типа ВВЭР. Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Министерства науки Украины (проект 2.4/342) и при информационной поддержке по проекту INTAS (LA-96-09).

Литература

1. Г. М. Заславский, *Стохастичность динамических систем*, Наука, Москва (1984).
2. А. Лихтенберг, М. Либерман, *Регулярная и стохастическая динамика*, Мир, Москва (1984).
3. М. Tabor, *Chaos and Integrability in Non-linear Dynamics*, Wiley, New-York (1989).
4. L. E. Reichl, *The Transition to Chaos*, Springer, Berlin (1992).
5. Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, Д. Л. Шепелянский, УФН **140**, 355 (1983).
6. G. Casati et al., Phys. Rep. **154**, 77 (1987).
7. R. V. Jensen, Phys. Rev. A **30**, 386 (1984).
8. M. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer, Berlin (1991).
9. П. В. Елютин, УФН **155**, 397 (1988).
10. Ю. Л. Болотин, В. Ю. Гончар, М. Я. Грановский, Письма в ЖЭТФ **59**, 620 (1994).
11. Yu. L. Bolotin, V. Yu. Gonchar, and M. Ya. Granovsky, Physica D **86**, 500 (1995).
12. H. Breuer and M. Hothaus, Ann. Phys. **211**, 249 (1991).
13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, Наука, Москва (1965).
14. Б. В. Чириков, Атомная энергия **6**, 630 (1959).
15. T. H. Dupree, Phys. Fluids **9**, 1773 (1966).
16. I. F. Akerhielm, R. Espesfält, and J. Lorenzen, Progress in Nuclear Energy **9**, 453 (1982).
17. *Proc. Symposium on Nuclear Reactor Surveillance and Diagnostics (SMORN VII)*, 19–23 June (1995), Avignon, France (1995).
18. В. В. Булавин, В. И. Павелко, Д. Ф. Гуцев, Атомная энергия **79**, 343 (1995).
19. E. Altstadt, M. Scheffler, and F.-P. Weiss, Progress in Nuclear Energy **29**, 129 (1995).
20. J. A. Thie, Nuclear Technology **45**, 5 (1979).
21. J. Vavrin, in: *Proc. VI Symp. Nuclear Reactor Surveillance and Diagnostics (SMORN VI)*, Gatlinburg, Tennessee, USA (1991).
22. O. Thomson, N. S. Garis, and I. Pazsit, submitted to Nuclear Technology (1998).
23. J. Runkel, D. Stegemann, J. Fiedler et al., in: *Proc. VII Symp. Nuclear Reactor Surveillance and Diagnostics (SMORN VII)*, Avignon, France (1995).
24. G. Por, P. A. Kantor, and L. A. Sokolov, in: *Proc. VII Symp. Nuclear Reactor Surveillance and Diagnostics (SMORN VII)*, Avignon, France (1995).
25. E. Ott, C. Grebogi, and J. A. Yorke, Phys. Rev. Lett. **64**, 1196 (1990).
26. K. Pyragas, Phys. Lett. A **170**, 421 (1992).
27. J.-P. Eckmann and D. Ruelle, Rev. Mod. Phys. **57**, 617 (1985).
28. T. Shinbrot, Adv. Phys. **44**, 71 (1995).
29. Y.-C. Lai, M. Ding, and C. Grebogi, Phys. Rev. E **47**, 86 (1993).
30. C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, Phys. Rev. Lett. **57**, 1284 (1986).
31. C. F. F. Karney, Physica D **8**, 360 (1983).