

О САМОСОХРАНЕНИИ КРУПНОМАСШТАБНЫХ СТРУКТУР В НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОЙ СРЕДЕ, ОПИСЫВАЕМОЙ УРАВНЕНИЕМ БЮРГЕРСА

С. Н. Гурбатов*, Г. В. Пасманик

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
603000, Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 22 мая 1998 г.

В данной работе на основе асимптотического решения одномерного уравнения Бюргерса исследуется самосохранение случайных крупномасштабных структур. Показано, что в процессе эволюции крупномасштабные структуры устойчивы по отношению к мелко-масштабным возмущениям для случая непрерывного начального спектра со степенным показателем меньше единицы. Аналитически и численно исследован коэффициент корреляции крупномасштабной структуры и этой же структуры с высокочастотным возмущением. Показано, что с течением времени он стремится к единице. С помощью асимптотических формул теории случайных выбросов стохастических процессов исследованы статистические свойства возмущенного поля и показано, что влияние высокочастотных возмущений эквивалентно введению эффективной вязкости.

1. ВВЕДЕНИЕ

В изучении эволюции нелинейных волн в средах без дисперсии большую роль играет нелинейное уравнение диффузии, впервые предложенное Бюргерсом [1, 2] как модель гидродинамической турбулентности. Действительно, оно описывает два основных эффекта, присущих турбулентности: нелинейную перекачку энергии по спектру и затухание в области мелкомасштабных компонент спектра. При случайных начальных условиях или случайных внешних силах это уравнение описывает турбулентность газа без давления [3], которую принято называть турбулентностью Бюргерса.

Уравнение Бюргерса замечательно тем, что имеет точное аналитическое решение [4, 5]. Это позволяет получить ряд строгих статистических результатов (см., например, [2, 6–19]), которые могут служить тестами для проверки приближенных методов исследования гидродинамической турбулентности. Позднее было показано, что уравнение Бюргерса описывает также широкий класс нелинейных эффектов, возникающих в теории распространения волн, физике плазмы, акустике [9, 20, 21]. Уравнение Бюргерса и его многомерное векторное обобщение возникают в задаче роста поверхностей [22–25]. В этом случае векторное поле, удовлетворяющее данному уравнению, описывает градиент некоторой растущей поверхности. Трехмерное уравнение Бюргерса является также основой так называемой модели слипания (adhesion model), используемой для описания формирования крупномасштабной структуры Вселенной [9, 26–29].

Характерной особенностью решения уравнения Бюргерса при бесконечных числах Рейнольдса является существование локальной и статистической автомодельности [9]. Термин «локальная автомодельность» означает, что благодаря совместному действию

* E-mail: gurb@rf.unn.runnet.ru

нелинейности и вязкости каждая реализация поля имеет универсальное поведение: на больших временах поле представляет собой последовательность треугольных импульсов с одинаковым наклоном $v'_x = 1/t$. При периодических начальных условиях относительные скорости разрывов равны нулю, поэтому периодичность поля сохраняется. При этом из-за совместного действия нелинейности и затухания на разрывах полностью теряется информация об амплитуде и форме начального возмущения. При шумовом начальном поле координаты и скорости разрывов случайны, что приводит к слиянию ударных фронтов. Из-за многократного слияния разрывов статистические характеристики турбулентности на достаточно больших временах также становятся автомодельными и определяются единственным масштабом $l(t)$ — интегральным масштабом турбулентности [6, 9]. В области больших волновых чисел энергетического спектра сигнала формируется универсальная степенная асимптотика $E(k, t) \propto k^{-2}$, связанная с образованием разрывов. Закон роста $l(t)$ из-за слияния разрывов, вид вероятностных распределений и спектров турбулентности при этом существенно зависят от поведения начального спектра $E_0(k) \propto k^n$ в области малых волновых чисел k . При $n > 2$ эффект параметрической генерации приводит к формированию универсальной низкочастотной асимптотики спектра, а закон роста $l(t)$ весьма чувствителен к статистике начального возмущения. В частности, при гауссовой статистике начального возмущения внешний масштаб растет пропорционально $l(t) \propto t^{1/2}$ с некоторой логарифмической коррекцией [6, 9]. При этом $l(t)$ определяется лишь интегральными характеристиками начального спектра. При $1 < n < 2$ низкочастотная часть спектра «заморожена», $E(k, t) = E_0(k) \propto k^n$, однако большая часть энергии сосредоточена в частотном диапазоне $k > k_s(t)$, и внешний масштаб $l(t) \propto t^{1/2}$, как и для случая $n > 2$ [15]. При $n < 1$ низкочастотная часть спектра сохраняется, и именно она определяет закон роста внешнего масштаба $l(t) \propto t^{2/(n+3)}$. При этом закон роста $l(t)$ и вид спектра не зависят от поведения высокочастотной части спектра.

Целью настоящей работы является исследование устойчивости эволюции нелинейных структур $v(x, t)$, порожденных начальным полем $v_0(x)$, по отношению к случайным возмущениям $v_h(x)$. Для периодического сигнала $v_0(x)$ случайные возмущения приводят к флуктуациям скоростей разрывов, их слиянию и, как следствие, полному разрушению периодической структуры [30]. При шумовом начальном поле $v_0(x)$ сильно нелинейные структуры непрерывно взаимодействуют: из-за слияния разрывов их характерный масштаб $l(t)$ непрерывно растет. Шумовое возмущение $v_h(x)$ приводит к дополнительным флуктуациям координат разрывов $\Delta x_k(t)$, которые также растут с течением времени.

Таким образом, конечный результат эволюции поля определяется конкуренцией двух факторов: ростом внешнего масштаба структур $l(t)$ и ростом флуктуаций координат разрывов $\Delta x_k(t)$, связанных с возмущением $v_h(x)$. Если при всех t выполнено условие $|\Delta x(t)| \ll l(t)$, то такие структуры являются устойчивыми по отношению к случайным возмущениям.

Далее мы будем рассматривать устойчивость крупномасштабных структур по отношению к мелкомасштабным возмущениям, имеющим такой же спектр $E_0(k) \propto k^n$, но расположенным в высокочастотной части спектра. Предварительные оценки, проведенные в работе [31], показали, что при $n < 1$ крупномасштабные структуры устойчивы по отношению к мелкомасштабным возмущениям. В настоящей работе аналитически и численно рассчитывался коэффициент корреляции $r(t)$ невозмущенного и возмущенного полей. Этот коэффициент количественно характеризует близость данных структур

друг к другу. Показано, что при $n < 1$, даже в случае, когда начальный коэффициент корреляции $r_0 \ll 1$ и возмущение $v_h(x)$ по амплитуде существенно превышает поле $v_0(x)$ ($|v_h| \gg |v_0|$), эволюция нелинейных структур приводит к росту коэффициента корреляции $r(t)$ и асимптотически $r(t) \rightarrow 1$. Известно, что взаимодействие низкочастотной компоненты с высокочастотной можно интерпретировать как проявление турбулентной вязкости [32]. В работе показано, что асимптотическая устойчивость крупномасштабных структур эквивалентна эффекту роста числа Рейнольдса в среде с конечной вязкостью [9].

2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ТУРБУЛЕНТНОСТИ БЮРГЕРСА

Нелинейное уравнение диффузии — уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad v(x, t = 0) = v_0(x) \quad (1)$$

заменой переменных Хопфа—Коула [4, 5] сводится к линейному уравнению диффузии и, следовательно, имеет точное решение.

Однако для статистического анализа использование точного решения вызывает затруднения, особенно в случае больших чисел Рейнольдса, что соответствует $\mu \rightarrow 0$. С другой стороны, в случае бесконечно малой вязкости решение уравнения Бюргерса имеет асимптотическое представление [2, 4, 9]:

$$v(x, t) = \frac{x - y(x, t)}{t}, \quad v(x, t) = -\frac{\partial S(x, t)}{\partial x}, \quad (2)$$

$$G(x, y, t) = S_0(y) - \frac{(x - y)^2}{2t}, \quad S_0(y) = -\int^y v_0(x) dx. \quad (3)$$

Здесь $y(x, t)$ — координата абсолютного максимума функции $G(x, y, t)$ по y , которая называется лагранжевой координатой, $S(x, t) = G(x, y(x, t), t)$ — эйлеровский потенциал поля скоростей [9]. Именно на основе этого решения было получено большинство статистических результатов по турбулентности Бюргерса.

Введем характерное время проявления нелинейных эффектов $t_n = l_0/\sigma_0$, где σ_0 и l_0 — соответственно характерные амплитуда и пространственный масштаб начального поля скоростей. На временах $t \gg t_n$ глобальный максимум функции $G(x, y, t)$ по y находится в малой окрестности локального максимума начального потенциала $S_0(y)$, т. е. нуля начального поля $v_0(x)$. Таким образом, в предельном случае $\mu \rightarrow 0$ лагранжева координата $y(x, t)$ является кусочно-постоянной функцией x и, следовательно, функция поля скоростей $v(x, t)$ имеет универсальное поведение

$$v(x, t) = \frac{x - y_k}{t}, \quad x_{k-1} < x < x_k \quad (4)$$

в каждой ячейке между разрывами. Позиции разрывов определяются из условия равенства двух абсолютных максимумов, $G(x_k, y_{k-1}, t) = G(x_k, y_k, t)$, в точке x_k :

$$x_k = \frac{y_{k+1} + y_k}{2} + V_k t, \quad V_k = \frac{S_0(y_k) - S_0(y_{k+1})}{y_{k+1} - y_k}. \quad (5)$$

Если начальные условия представлены в виде случайного поля, то скорости движения ударных фронтов, образующихся в процессе эволюции поля, также случайны. Поэтому происходит слияние разрывов между собой, вследствие чего увеличивается характерное расстояние между ними, а число их, соответственно, уменьшается. Это характерное расстояние $l(t)$ назовем внешним масштабом турбулентности, который можно оценить из уравнения (3). Пространственный интервал $|x-y|$, где может находиться глобальный максимум $G(x, y, t)$, приблизительно равен $l(t)$ и определяется из условия того, что приращения начального потенциала и параболы одного порядка:

$$|\Delta S_0| \simeq |S_0(y+l) - S_0(y)| \simeq \sqrt{d_s(l)} = l^2/t. \quad (6)$$

Здесь $d_s(z)$ — структурная функция начального потенциала $d_s(\rho) = \langle (S_0(x+\rho) - S_0(x))^2 \rangle$. Из уравнения (6) следует, что асимптотический закон возрастания внешнего масштаба турбулентности определяется поведением структурной функции на больших расстояниях $d_s(\rho \gg l_0)$. Мы полагаем, что энергетический спектр начального возмущения скорости имеет степенную асимптотику в области малых волновых чисел:

$$E_v(k) = \alpha_n^2 k^n b_0(k), \quad b_0(0) = 1, \quad b_0(k > k_0) = 0, \quad (7)$$

где $b_0(k)$ — высокочастотный обрезавший множитель.

В зависимости от показателя степени n структурная функция имеет следующие асимптотики [9]:

$$d_s(\rho) \simeq \begin{cases} \beta_n^2 \rho^{1-n}, & \rho \gg l_0, \quad n < 1 \\ 2\sigma_s^2, & \rho \gg l_0, \quad n > 1 \end{cases}, \quad (8)$$

$$\beta_n^2 = \frac{2\pi\alpha_n^2}{\Gamma(n-2) \sin(\pi(1-n)/2)}, \quad \sigma_s^2 = \langle S_0^2 \rangle.$$

Тогда из уравнения (6,8) имеем следующую оценку внешнего масштаба турбулентности

$$k_c^{-1} = l(t) \simeq \begin{cases} (\alpha_n t)^{2/(n+3)}, & n < 1 \\ (\sigma_s t)^{1/2}, & n > 1 \end{cases}. \quad (9)$$

Здесь $k_c(t)$ — некая характерная пространственная частота, около которой спектр $E_v(k, t) \propto k^n$ переходит на следующий участок $E_v(k, t) \propto k^{-2}$. При этом энергия турбулентности $\sigma^2(t) = \langle v^2(x, t) \rangle$ затухает по закону

$$\sigma^2(t) = \frac{l^2}{t^2} \propto \alpha_n^2 k_c(t) \simeq \begin{cases} \alpha_n^{4/(n+3)} t^{-(2n+2)/(n+3)}, & n > 1 \\ \sigma_s^2/t^{-1}, & n < 1 \end{cases}. \quad (10)$$

Таким образом, свойства решения уравнения Бюргера различны для разных значений n . Для случая $n > 1$ рост внешнего масштаба турбулентности определяется некоторыми интегральными характеристиками спектра начального потенциала $E_S(k)$. Как было показано в работах [7, 9], в данном случае статистические свойства турбулентности Бюргера являются автомодельными при $n > 2$ и $t \gg t_n$, а энергетический спектр имеет универсальное поведение в области малых ($E_v(k, t) \propto l/k^2 t^2$) и больших ($E_v(k, t) \propto l^4 k^2/t^2$) волновых чисел. В случае $n < 1$ также можно показать, что статистические свойства турбулентности становятся автомодельными независимо от величины

начального числа Рейнольдса [9, 33]. Возрастание внешнего масштаба обусловлено локальным поведением начального спектра в области больших k , спектр энергии внутри интервала $k < k_c(t)$ остается неизменным.

Можно предположить, что не только низкочастотная часть спектра энергии сохраняется, но также и крупномасштабные компоненты реализаций поля стабильны по отношению к высокочастотному возмущению. В работах [33, 34] была предложена простая модель турбулентности Бюргерса для случая $n < 1$. Начальное возмущение представлено бесконечной суммой гармоник $k_m = k_0 \varepsilon^{-m}$ (спектр Вейерштрасса) с сильно разреженными частотами ($\varepsilon \gg 1$). Основное предположение состояло в том, что энергия каждой компоненты затухает независимо от других, а полная энергия турбулентности примерно равна сумме энергий всех компонент. Было показано, что внешний масштаб турбулентности и энергия в данной дискретной модели описываются приблизительно тем же степенным законом, что и для спектра непрерывного шума, и не зависят от количества высокочастотных мод в начальном спектре.

Цель данной работы — показать, что и для непрерывного спектра справедливо предположение слабого влияния высокочастотных компонент спектра на низкочастотные.

3. СОХРАНЕНИЕ КРУПНОМАСШТАБНОЙ СТРУКТУРЫ СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ — ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Рассмотрим эволюцию двух случайных начальных возмущений $v_0(x)$ и $\tilde{v}_0(x)$:

$$\tilde{v}_0(x) = v_0(x) + v_h(x). \quad (11)$$

Мы полагаем, что энергетические спектры обоих процессов описываются уравнением (7), но для процесса $v_0(x)$ частота обрезания есть k_* , а для процесса $\tilde{v}_0(x)$ — $k_0 > k_*$. Это означает, что начальные скорости $v_0(x)$ и $\tilde{v}_0(x)$ имеют общую часть фурье-компонент в области $k \in [0, k_*]$, а процесс $\tilde{v}_0(x)$ имеет некоторое добавочное высокочастотное возмущение $v_h(x)$ со спектром в частотном интервале $k \in [k_*, k_0]$. В данной работе для численного решения одномерного уравнения Бюргерса мы использовали алгоритм, в основу которого положено быстрое преобразование Лежандра. Используя тот факт, что функция $y(x, t)$ является неубывающей и определение быстрого преобразования Лежандра

$$\varphi(x) = \max_a [\Phi(a, 0) + xa],$$

мы можем построить решение уравнения Бюргерса за $O(N \log_2 N)$ шагов, где N — число точек дискретной решетки, на которой заданы начальные условия [35]. На рис. 1 представлены реализации невозмущенного поля (а) и два случая (б, в) возмущенного поля при разных значениях обрезавшего волнового числа $k_0 \gg k_*$. Нетрудно заметить, что дисперсия невозмущенного поля много меньше дисперсии возмущенных полей в обоих случаях. Однако в момент времени $t \gg t_n$, когда поля находятся на стадии развитых разрывов, реализации исходного крупномасштабного поля и возмущенных полей мало отличаются друг от друга, что подтверждает гипотезу о стабильности крупномасштабных структур по отношению к мелкомасштабным возмущениям (рис. 2, 3).

Для доказательства этого предположения мы аналитически и численно исследовали коэффициент корреляции возмущенного и невозмущенного полей:

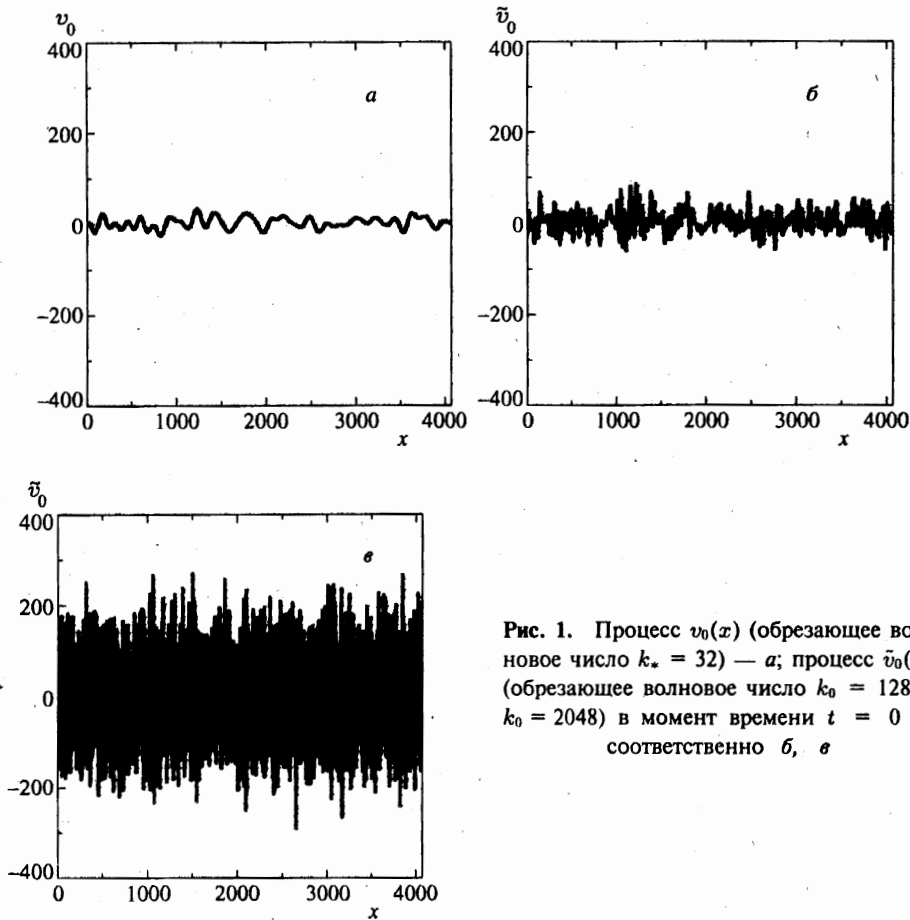


Рис. 1. Процесс $v_0(x)$ (обрезающее волновое число $k_* = 32$) — а; процесс $\tilde{v}_0(x)$ (обрезающее волновое число $k_0 = 128$ и $k_0 = 2048$) в момент времени $t = 0$ — соответственно б, в

$$r(t) = \frac{B(t)}{\sigma(t)\tilde{\sigma}(t)}, \tag{12}$$

$$B(t) = \langle v(x,t)\tilde{v}(x,t) \rangle, \quad \sigma^2(t) = \langle v^2(x,t) \rangle, \quad \tilde{\sigma}^2(t) = \langle \tilde{v}^2(x,t) \rangle,$$

который количественно характеризует близость этих процессов, имеющих на входе общую низкочастотную часть спектра. Для начальных возмущений с энергетическим спектром (7) начальный коэффициент корреляции равен:

$$r(t=0) = r_0 = (k_*/k_0)^{(n+1)/2}, \tag{13}$$

и, следовательно, для $k_0 \gg k_*$ корреляция мала.

Характерное время проявления нелинейных эффектов для сигнала с начальным спектром вида (7) и частотой обрезания k_* равно

$$t_n = \frac{1}{k_*\sigma_0} \simeq [\alpha_n k_*^{(n+3)/2}]^{-1}.$$

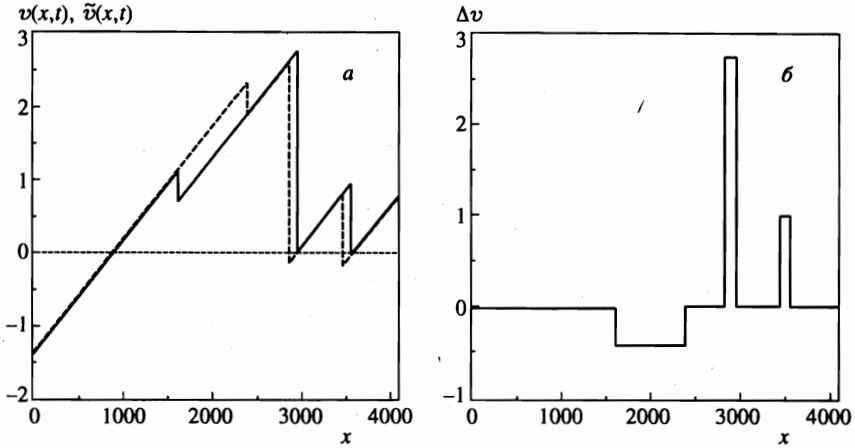


Рис. 2. Эволюция процесса $v(x, t)$ (обрезающее волновое число $k_* = 32$) — штриховая линия, и процесса $\tilde{v}(x, t)$ (обрезающее волновое число $k_0 = 128$) — сплошная линия (а) и их разность Δv (б) в момент времени $t = 0.125$ ($k_c = 4$)

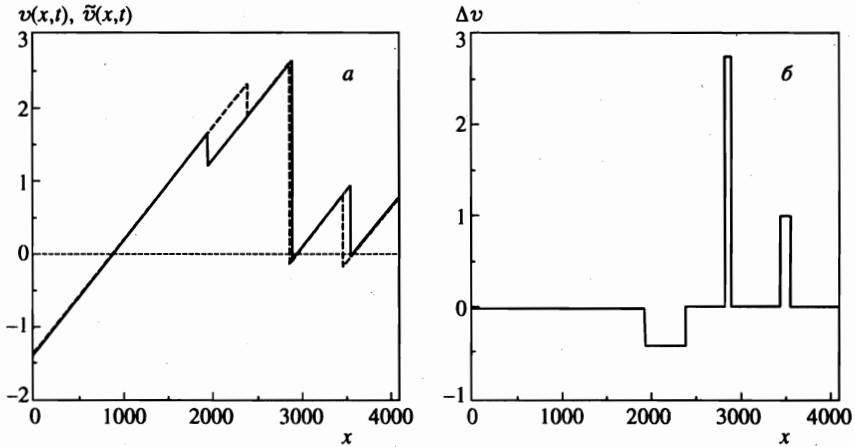


Рис. 3. То же, что и на рис. 2 со следующими параметрами: $k_* = 32$, $k_0 = 2048$ (а, б)

При $t < t_n$ нелинейные искажения волны малы и $v(x, t) \simeq v_0(x)$, а при $t \gg t_n$ волна превращается в последовательность треугольных импульсов с одинаковым наклоном. Спектр мощности $E_v(k, t)$ на этой стадии становится автомодельным [9],

$$E_v(k, t) = \frac{l^3}{t^2} \tilde{E}(kl),$$

и воспроизводит начальный спектр $E_v(k)$ в области пространственных частот $k < k_c(t) \simeq (\alpha_n t)^{-2/(n+3)}$, энергия при этом убывает согласно закону (10) $\sigma^2(t) \simeq \alpha^2 k_c^{(n+1)}(t)$. На рис. 4 представлены энергетические спектры процессов $v(x, t)$ и $\tilde{v}(x, t)$ при $t = 0$ и $t_1 \gg t_n$ для белого шума, имеющих частоты обрезания k_* и $k_0 = 8k_*$. Нетруд-

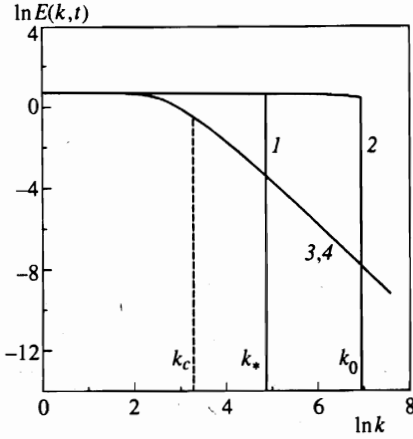


Рис. 4. Энергетические спектры процесса $v_0(x)$ (обрезающее волновое число $k_* = 128$) — 1, процесса $\tilde{v}_0(x)$ (обрезающее волновое число $k_0 = 1024$) — 2 при $t = 0$ и их эволюция в момент времени $t = 0.006 \approx 10 t_n$, ($k_c = 32$) — 3, 4 в логарифмическом масштабе при $n = 0$ (усреднение по 1000 реализаций)

но заметить, что при $t \gg t_n$ спектры обоих сигналов практически совпадают и имеют высокочастотную асимптотику $E_v(k, t) \propto k^{-2}$. Тот факт, что спектры возмущенного и невозмущенного сигналов практически не отличаются друг от друга на стадии развитых разрывов, является одним из подтверждений предположения о слабом влиянии высокочастотных компонент на низкочастотные.

В поведении коэффициента корреляции (12) можно выделить три стадии. При $t < \tilde{t}_n = [\alpha_n k_0^{(n+3)/2}]^{-1}$ нелинейные искажения обоих сигналов малы и $r(t) \approx r_0$. В интервале $\tilde{t}_n < t < t_n$ существенны только искажения поля $\tilde{v}(x, t)$. Если предположить, что низкочастотная часть сигнала $\tilde{v}(x, t)$ практически не изменилась, то

$$\langle v(x, t) \tilde{v}(x, t) \rangle \approx \langle v_0^2(x) \rangle = \sigma_0^2 \tag{14}$$

и можно оценить коэффициент корреляции (12) следующим образом:

$$r(t) \approx \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0 \bar{\sigma}(t)} \approx \left(\frac{k_*}{k_c(t)} \right)^{(n+1)/2} \approx (k_* l(t))^{(n+1)/2} \propto t^{(n+1)/(n+3)}. \tag{15}$$

Результаты численных экспериментов, подтверждающие это предположение, приведены на рис. 5. Здесь изображена зависимость коэффициента корреляции r от отношения пространственных частот k_0/k_* для двух значений времени t_1 и $t_2 < t_1$ ($k_c(t_2) = 4k_c(t_1)$). Предполагается, что для t_1 и t_2 выполнено условие $k_* \ll k_c(t) \ll k_0$, т.е. нелинейными искажениями исходного возмущения $v_0(x)$ можно пренебречь. На начальном участке графика ($k_0 \ll k_c(t)$), когда можно пренебречь нелинейными искажениями обоих начальных полей, коэффициент корреляции уменьшается с ростом k_0 и описывается выражением (13) $r(t) \approx r_0 \propto k_0^{-1/2}$, что хорошо видно на рис. 5б. При $k_* \ll k_c(t) \ll k_0$ происходят искажения только возмущенного поля и нелинейное затухание высокочастотных компонент приводит к уменьшению дисперсии возмущенного сигнала. На рис. 5 видно, что при данных условиях коэффициент корреляции выходит на постоянный уровень, не зависящий от k_0 (15), что подтверждает гипотезу о сохранении низкочастотной части поля (14). Из численного эксперимента следует, что в асимптотике $r(t_1)/r(t_2) = 1.97$, что хорошо согласуется с теоретическим предсказанием $r(t_1)/r(t_2) = (k_c(t_2)/k_c(t_1))^{1/2} = 2$.

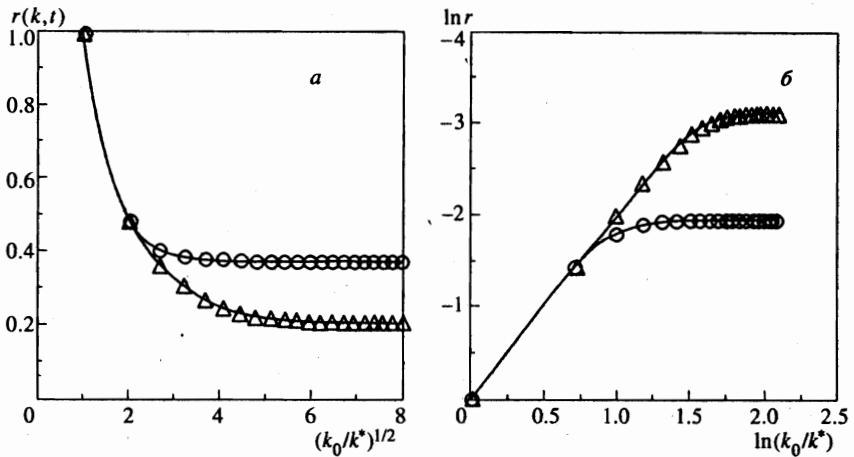


Рис. 5. Коэффициент корреляции возмущенного и невозмущенного полей скорости как функция отношения обрезывающих волновых чисел (k_0/k_*) в различные моменты времени (при двух различных значениях k_c) в линейном (а) и логарифмическом (б) масштабах при $k_* = 32$: \circ — $k_c(t_1) = 8k_*$, Δ — $k_c(t_2) = 32k_*$ (статистическое усреднение по 100 реализациям, отмечена каждая десятая точка)

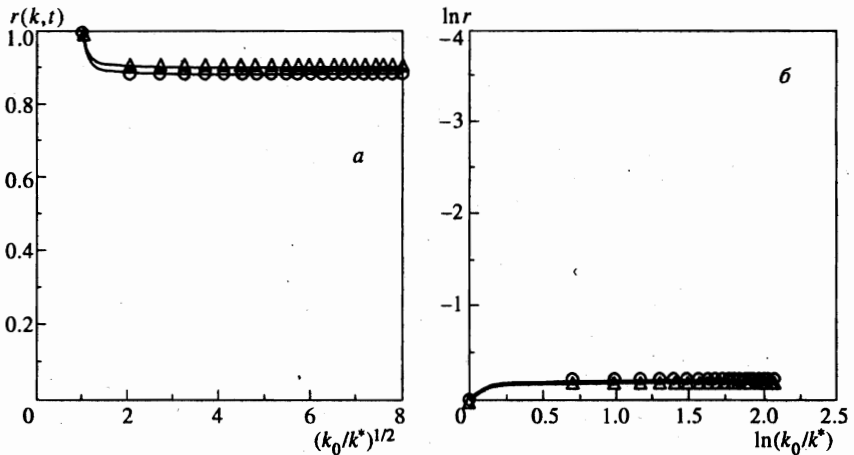


Рис. 6. То же, что и на рис. 5 при $k_* = 32$ со следующими параметрами: \circ — $k_c = k_*/4$, Δ — $k_c = k_*/8$

На последней стадии, когда $t \gg \bar{t}_n$, оба сигнала трансформируются в последовательность треугольных импульсов (4) и происходит нелинейное поглощение низкочастотной области начального спектра. Результаты численных экспериментов по расчету коэффициента корреляции на этой стадии представлены на рис. 6. В этом случае коэффициент корреляции с ростом k_0 также выходит на постоянный уровень, достаточно близкий к единице.

На рис. 7 показано поведение коэффициента корреляции в зависимости от времени

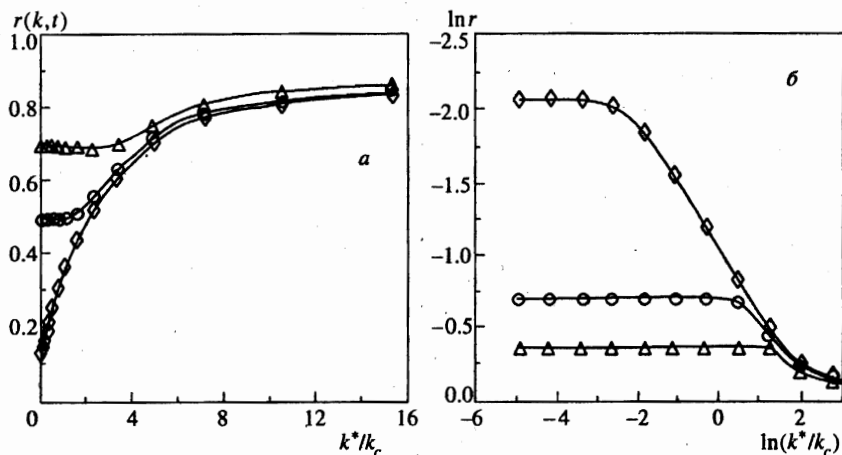


Рис. 7. Коэффициент корреляции возмущенного и невозмущенного полей скорости как функция отношения $(k^*/k_c) \sim t^{2/3}$ в линейном (а) и логарифмическом (б) масштабах при $k_* = 16$: \diamond — $k_0 = 64k_*$, \circ — $k_0 = 4k_*$, Δ — $k_0 = 2k_*$ (статистическое усреднение по 100 реализациям, отмечена каждая десятая точка)

при фиксированных значениях параметров k^* и k_0 . Легко заметить, что с течением времени коэффициент корреляции растет и стремится к значению, достаточно близкому к 1. Это связано с тем, что положения ударных фронтов возмущенного и невозмущенного полей хотя и близки, но не совпадают из-за наличия высокочастотного возмущения начального потенциала процесса $\tilde{v}_0(x)$. Ниже будут приведены аналитические результаты, качественно и количественно подтверждающие данные численного моделирования.

4. УСТОЙЧИВОСТЬ КРУПНОМАСШТАБНЫХ СТРУКТУР ПО ОТНОШЕНИЮ К МАЛЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ

Рассмотрим поведение реализаций при $t \gg t_n$, используя асимптотическое решение уравнения Бюргерса (1)–(3). В соответствии с этим решением $y(x, t)$ в (2) — координата абсолютного максимума функции $G(x, y, t)$ (3). Кривизна параболы (3) равна $1/t$, а кривизна начального потенциала S_0 может быть оценена как

$$\sigma_{v_0'} = \langle (S_0'')^2 \rangle^{1/2} = \frac{\sqrt{2} \alpha_n k_*^{(n+3)/2}}{(n+3)^{1/2}}. \quad (16)$$

Таким образом, когда $t \gg t_n \simeq 1/\sigma_{v_0'}$ парабола в уравнении (3) является гладкой функцией в масштабе начального потенциала. Это означает, что глобальный максимум функции $G(x, y, t)$ находится в малой окрестности координаты локального максимума начального потенциала $S_0(y)$, а решение (2) имеет универсальное поведение на интервалах между разрывами (4), где y_k — координаты локальных максимумов $S_0(y)$.

Появление высокочастотного возмущения $v_h(x)$ приводит к флуктуациям «нулей» пилообразной волны. С новой компонентой $v_h(x)$ в начальной скорости (11) мы добавляем возмущение к начальному потенциалу

$$\tilde{S}_0(y) = S_0(y) + S_h(y). \quad (17)$$

Из (5) следует, что возмущение $S_h(y)$ приводит к флуктуациям скорости разрывов, вследствие чего флуктуации позиций разрывов $\Delta x_k(t)$ линейно растут со временем. Для периодического невозмущенного сигнала разрывы неподвижны ($S_0(y_{k+1}) = S_0(y_k)$, $V_k = 0$) (5). Поэтому сколь угодно малое возмущение приводит к движению разрывов, их слиянию и, как следствие, полному разрушению регулярной периодической пилообразной структуры [30]. Для шумового исходного возмущения разрывы крупномасштабной структуры имеют случайные скорости сами по себе, что приводит к их слиянию и росту внешнего масштаба турбулентности $l(t)$. Если скорость слияния разрывов крупномасштабной структуры достаточно велика и для всех времен $|\Delta x| \ll l(t)$, то можно говорить о самосохранении эволюции крупномасштабной структуры.

Высокочастотное возмущение v_h можно характеризовать следующими параметрами:

$$\sigma_{v_h}^2 = \langle v_h^2(x) \rangle = \frac{2\alpha_n^2 k_0^{n+1}}{n+1} \left[1 - \left(\frac{k_*}{k_0} \right)^{n+1} \right], \quad (18)$$

$$\sigma_{S_h}^2 = \langle S_h^2(x) \rangle = \frac{2\alpha_n^2}{(1-n)k_*^{1-n}} \left[1 - \left(\frac{k_*}{k_0} \right)^{1-n} \right], \quad (19)$$

$$l_h^2 = \frac{\sigma_{S_h}^2}{\sigma_{v_h}^2} = \left(\frac{1+n}{1-n} \right) \frac{1}{k_*^{1-n} k_0^{n+1}} \left[1 - \left(\frac{k_*}{k_0} \right)^{1-n} \right] \left[1 - \left(\frac{k_*}{k_0} \right)^{n+1} \right]^{-1}, \quad (20)$$

где l_h — пространственный масштаб высокочастотного возмущения $S_h(y)$.

Таким образом, с ростом обрезочной частоты k_0 дисперсия скорости $\sigma_{v_h}^2$ монотонно возрастает, дисперсия потенциала $\sigma_{S_h}^2$ растет до уровня, определяемого пространственной частотой k_* , а затем становится постоянной, пространственный масштаб сигнала уменьшается с ростом k_0 и при $k_0 \gg k_*$:

$$l_h \simeq \sqrt{\frac{1+n}{1-n}} (k_* k_0)^{-1/2} \left(\frac{k_*}{k_0} \right)^{n/2}.$$

Для начала рассмотрим малые возмущения, $\sigma_{v_h}^2 \ll \sigma_0^2$. Они приводят к флуктуациям положений «нулей» (4) и флуктуациям позиций разрывов x_k (5):

$$\tilde{y}_k = y_k + \Delta y_k, \quad \tilde{x}_k = x_k + \Delta x_k. \quad (21)$$

В узкой окрестности локального максимума $S_0(y)$ флуктуации нулей определяются уравнением

$$\tilde{S}'_0(y_k + \Delta y_k) = \tilde{v}_0(y_k + \Delta y_k) = 0, \quad (22)$$

$$v_0(y_k + \Delta y_k) + v_h(y_k + \Delta y_k) \simeq v'_0(y_k) \Delta y_k + v_h(y_k) = 0, \quad \Delta y_k = \frac{v_h(y_k)}{v'_0(y_k)}.$$

Используя данное уравнение, можно оценить их следующим образом:

$$\overline{\Delta y_k^2} = \langle \Delta y_k^2 \rangle \simeq \frac{\sigma_{v_h}^2}{\sigma_{v'_0}^2} = \left(\frac{n+3}{n+1} \right) \frac{1}{k_*^2} \left[\left(\frac{k_0}{k_*} \right)^{n+1} - 1 \right]. \quad (23)$$

Нетрудно заметить, что эти флуктуации растут с увеличением обрезавшей частоты k_0 и не зависят от времени t .

В соответствии с уравнением (5) флуктуации позиций ударных фронтов обусловлены двумя факторами: флуктуациями «нулей» y_k и флуктуациями скорости движения разрывов V_k

$$\Delta x_k = \Delta y_k + \Delta V_k t. \quad (24)$$

Основной вклад во флуктуации скорости разрыва дает возмущение начального потенциала

$$\Delta V_k = \frac{S_h(y_k) - S_h(y_{k+1})}{\eta_k}, \quad \eta_k = y_{k+1} - y_k, \quad (25)$$

и величина Δx_k может быть оценена как

$$\overline{\Delta x_k} = \langle \Delta x_k^2 \rangle^{1/2} = \Delta y_k + \Delta V_k t, \quad \Delta V_k \simeq \sigma_{S_h} / l. \quad (26)$$

Здесь $\sigma_{S_h}^2$ — дисперсия потенциала высокочастотного возмущения (19), $l(t) \simeq \langle \eta_k \rangle$ — внешний масштаб турбулентности. Таким образом, флуктуации положений разрывов растут с течением времени, но достигают насыщения с увеличением обрезавшей пространственной частоты k_0 .

Для того чтобы сосчитать коэффициент корреляции $r(t)$ (12), рассмотрим разность между двумя процессами $v(x, t)$ и $\tilde{v}(x, t)$:

$$\Delta v = \tilde{v}(x, t) - v(x, t), \quad (27)$$

$$\langle \Delta v^2 \rangle = \bar{\sigma}^2(t) + \sigma^2(t) - 2r(t)\bar{\sigma}(t)\sigma(t). \quad (28)$$

В случае $k_c(t) \ll k_*$, k_0 дисперсия $\sigma(t) \simeq \bar{\sigma}(t)$ и коэффициент корреляции может быть представлен как:

$$r(t) = 1 - \frac{\varepsilon(t)}{2}, \quad \varepsilon(t) = \frac{\langle \Delta v^2 \rangle}{\sigma^2(t)}, \quad (29)$$

где $\varepsilon(t)$ — относительная девиация двух процессов. Разность Δv представляет собой сумму прямоугольных импульсов двух видов (рис. 2б, 3б). Если процессы $v(x, t)$ и $\tilde{v}(x, t)$ в точке x принадлежат одной ячейке с «нулем» y_k , тогда $\Delta v = \Delta y_k / t$ и ширина импульса примерно равна $(x_{k+1} - x_k) \simeq l(t)$, где $l(t)$ — внешний масштаб турбулентности. Если в точке x эти процессы находятся внутри разных ячеек, тогда $\Delta v = (y_{k+1} - y_k) / t$ и амплитуда импульса пропорциональна $l(t) / t$, а длительность равна сдвигу позиции разрыва Δx_k .

Используя выражение для энергии турбулентности (10), можно оценить относительную девиацию ε следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{\overline{\Delta y_k^2}}{l^2} + \frac{\overline{\Delta x_k}}{l} = \frac{\overline{\Delta y_k^2}}{l^2} + \left(\frac{\overline{\Delta y_k}}{l} + \frac{\overline{\Delta V_k t}}{l} \right). \quad (30)$$

Подобные оценки можно сделать и в случае периодического начального сигнала с высокочастотным возмущением. Для периодического сигнала $l = l_0 = \text{const}$, а ε возрастает с течением времени. Это означает, что присутствие высокочастотного шума разрушает периодическую структуру [30].

Но если мы имеем шумовой начальный сигнал $v_0(x)$, то конечный результат зависит от скорости роста внешнего масштаба $l(t)$. Используя соотношения (9), (18), (22), (25), получаем следующие оценки относительной девиации ε :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) + \varepsilon_3(t), \quad (31)$$

$$\varepsilon_1(t) = \left(\frac{n+3}{n+1}\right) \left[\left(\frac{k_0}{k_*}\right)^{n+1} - 1 \right] \left[\frac{k_c(t)}{k_*} \right]^2, \quad \varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon_1}, \quad (32)$$

$$\varepsilon_3 = \sqrt{2}(1-n)^{-1/2} \left[1 - \left(\frac{k_*}{k_0}\right)^{1-n} \right]^{1/2} \left[\frac{k_c(t)}{k_*} \right]^{(1-n)/2}$$

Таким образом, когда k_* фиксировано, относительная девиация стремится к нулю с ростом времени, $\varepsilon \rightarrow 0$ при $n < 1$, уменьшаясь пропорционально $\varepsilon \propto t^{(n-1)/(n+3)}$. Это значит, что решение $v(x, t)$ стабильно по отношению к малым возмущениям. Но если $t = \text{const}$, а дисперсия высокочастотного возмущения $v_h(x)$ увеличивается с ростом k_0 , тогда из (32) формально следует, что относительная девиация $\varepsilon_1(t)$ бесконечно растет. Однако строгий анализ показывает, что даже в случае сильных флуктуаций $v_h(x)$ крупномасштабная структура остается стабильной при наличии высокочастотного возмущения $v_h(x)$ (рис. 2, 3).

5. САМОСОХРАНЕНИЕ КРУПНОМАСШТАБНЫХ СТРУКТУР ПРИ СИЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Теперь рассмотрим случай $k_0 \gg k_*$, когда начальная энергия возмущения много больше начальной энергии невозмущенного сигнала, $\sigma_{v_h}^2 \gg \sigma_0^2$, и начальный коэффициент корреляции $r_0 \ll 1$. Но так как асимптотическое поведение реализации поля скорости определяется свойствами начального потенциала (3), можно сделать предположение, что в случае $n < 1$ относительная девиация $\varepsilon(t)$ будет стремиться к нулю с увеличением времени t из-за конечности дисперсии потенциала возмущения (19):

$$\sigma_{S_h}^2 = \frac{\alpha_n^2}{(1-n)k_*^{1-n}}, \quad k_0 \gg k_*. \quad (33)$$

При $t \gg t_n$ глобальный максимум $G(x, y, t)$ находится в окрестности локального максимума $S_0(y)$, поэтому необходимо учитывать влияние случайного процесса $S_h(y)$ на положение \tilde{y}_k и величину максимума \tilde{H}_k процесса $\tilde{S}(y)$ в малой окрестности локального максимума $S_0(y)$:

$$\tilde{S}_0(y) = S_0(y) + S_h(y) = \frac{1}{2} S_0''(y_k)(y - y_k)^2 + S_0(y_k) + S_h(y). \quad (34)$$

Возмущение действия $S_h(y)$ в уравнениях (17), (34) есть статистически однородный процесс с конечной дисперсией $\sigma_{S_h}^2$ (19) и пространственным масштабом l_h (20), уменьшающимся с ростом k_0 .

Прежде чем перейти к обсуждению результатов, полученных в асимптотической теории, сделаем предварительные оценки.

Представим вторую производную невозмущенного начального потенциала в следующем виде:

$$S_0''(y_k) = -\gamma_k \sigma_{S''}, \quad \sigma_{S''}^2 = \frac{2\alpha_n^2 k_*^{n+3}}{n+3}, \quad (35)$$

где γ_k — безразмерный параметр, характеризующий величину второй производной в окрестности данного локального максимума $S_0(y)$, а $\sigma_{S''}$ — дисперсия второй производной потенциала. В качестве грубой оценки можно считать, что величина \tilde{H}_k и дисперсия $S_h(y)$ оказываются одного порядка, и тогда девиацию координаты абсолютного максимума $\Delta y_k = y - y_k$ в уравнении (34) можно получить из условия $\Delta y_k^2 \simeq S_h/|S_0''|$. Это приводит к следующим оценкам \tilde{H}_k и Δy_k :

$$\tilde{H}_k \simeq \sigma_{S_h} = \sqrt{\frac{2\alpha_n^2}{(1-n)k_*^{1-n}}}, \quad \langle \Delta y_k^2 \rangle \simeq \frac{\sigma_{S_h}}{\gamma_k \sigma_{S''}} = \sqrt{\frac{n+3}{1-n}} \frac{1}{k_*^2 \gamma_k}. \quad (36)$$

Таким образом, для $n < 1$, когда дисперсия возмущенного потенциала конечна, даже в случае сильного возмущения поля скорости v_h относительные флуктуации координат «нулей» пилообразной волны

$$\varepsilon_1 = \langle \Delta y_k^2 \rangle / l^2 \simeq \sigma_{S_h} t^{-4/(n+3)} \quad (37)$$

и относительные флуктуации позиций ударных фронтов

$$\varepsilon_3 = \Delta V_k t / l \simeq \tilde{H}_k t / l^2 \simeq \sigma_{S_h} t^{-(1-n)/(n+3)} \quad (38)$$

остаются ограниченными при росте дисперсии возмущения σ_{v_h} , т.е. при росте k_0 , и уменьшаются со временем.

Исследуем теперь более детально статистические свойства координаты \tilde{y}_k и величины \tilde{H}_k абсолютного максимума процесса $\tilde{S}_0(y)$ в окрестности локального максимума $S_0(y)$ (34). Легко заметить, что эта задача эквивалентна поиску статистических характеристик абсолютного максимума $G(x, y, t)$ (3) в асимптотическом решении уравнения Бюргерса (2), если заменить время t на $(-S_0''(y_k))^{-1}$ — радиус кривизны невозмущенного потенциала. Последняя задача была подробно исследована в работах [7, 9], где показано, что на достаточно больших временах координата абсолютного максимума имеет гауссово распределение, а его величина — двойное экспоненциальное распределение. Построение асимптотической теории возможно на временах, когда парабола в (3) — достаточно плавная функция в масштабе начального действия $S_0(y)$, и за право быть абсолютным максимумом $G(x, y, t)$ конкурирует большое число локальных максимумов начального действия.

Применительно к нашей задаче (34) нужно оценить характерное число локальных максимумов N возмущения $S_h(y)$ в области Δy_k (36), где локальные максимумы могут

претендовать на право быть абсолютными. Из (20), (36) следует, что при $k_0 \gg k_*$ это число

$$N \simeq \frac{\Delta y_k}{l_h} \sim \left(\frac{k_0}{k_*} \right)^{(1+n)/2} \gg 1$$

и увеличивается с увеличением k_0 . Таким образом, при $k_0 \gg k_*$ можно использовать результаты асимптотической теории работ [7, 9] для нахождения статистических характеристик \tilde{y}_k и \tilde{H}_k в (36). Для этого мы должны формально заменить время t в соответствующих формулах [7, 9] на кривизну невозмущенного действия $S_0(y)$: $t \mapsto 1/\gamma_k \sigma_{S''}$.

В асимптотической теории [7, 9] возникает большой безразмерный параметр τ , равный отношению времени t к характерному времени проявления нелинейных эффектов. В нашем случае он равен:

$$\tau = \frac{\sigma_{v_h}}{2\pi l_h S_0''} = \frac{\sigma_{v_h}}{2\pi l_h \gamma_k \sigma_{S''}} = \frac{M}{\gamma_k}, \quad (39)$$

$$M = \frac{1}{2\pi} \frac{[(n+3)(1-n)]^{1/2}}{(1+n)} \left(\frac{k_0}{k_*} \right)^{n+1} = A \left(\frac{k_0}{k_*} \right)^{n+1}. \quad (40)$$

Заметим, что $M \sim N^2$, где N — число локальных максимумов, претендующих на право быть абсолютным максимумом $\tilde{S}_0(y)$. Из результатов [7, 9] следует, что при $M \gg 1$ величина абсолютного максимума \tilde{H}_k в (36) может быть представлена в виде

$$\tilde{H}_k = \sigma_{S_h} \xi_k \left(1 + \frac{\eta}{\xi_k^2} \right) = \sigma_{S_h} \xi_k + \sigma_{S_h} \frac{\eta}{\xi_k}, \quad (41)$$

где η — случайная безразмерная величина, подчиняющаяся двойному экспоненциальному распределению

$$F_\infty(\eta) = e^{-e^{-\eta}} \quad (42)$$

с $\langle \eta \rangle \sim \langle \eta^2 \rangle \sim 1$. Здесь ξ_k — решение трансцендентного уравнения:

$$\sqrt{\frac{M}{\xi_k \gamma_k}} \exp\left(-\frac{\xi_k^2}{2}\right) = 1, \quad \xi_k \simeq \sqrt{\ln M - \ln \gamma_k}. \quad (43)$$

Из этого отношения следует, что для $k_0/k_* \gg 1$ величина абсолютного максимума слабо зависит от локальной кривизны начального потенциала $S_0''(y_k) = \gamma \sigma_{S''}$ и является практически детерминированной функцией со средним

$$\langle \tilde{H} \rangle = \sigma_{S_h} \xi_k \simeq \sigma_{S_h} \sqrt{\ln M} \quad (44)$$

и малой дисперсией

$$\langle \Delta \tilde{H}^2 \rangle = \sigma_{S_h}^2 / \xi_k^2 \simeq \sigma_{S_h}^2 / \ln M. \quad (45)$$

Координата локального максимума \tilde{y}_k имеет гауссово распределение со средним $\langle \tilde{y}_k \rangle = y_k$ и дисперсией Δy_k :

$$\langle \Delta y_k^2 \rangle = \frac{\sigma_{S_k}}{\xi_k \sigma_{S''} \gamma_k} \simeq \sqrt{\frac{n+3}{1-n}} \frac{1}{k_*^2 \gamma_k} \frac{1}{\sqrt{\ln M}}, \quad (46)$$

уменьшающейся с ростом отношения пространственных частот k_0/k_* .

Таким образом, в случае $k_0 \gg k_*$ и $n < 1$ все глобальные максимумы $\tilde{G}(x, y, t)$ расположены приблизительно в малой окрестности соответствующих абсолютных максимумов $G(x, y, t)$, а потенциал $\tilde{S}(x, t)$ удовлетворяет следующему выражению:

$$\tilde{S}(x, t) \simeq S(x, t) + \langle \tilde{H} \rangle. \quad (47)$$

Из (2) следует, что поведение $\tilde{v}(x, t)$ асимптотически воспроизводит поведение невозмущенного поля $v(x, t)$. В случае сильного возмущения относительная девиация процессов \tilde{v} и v по-прежнему описывается уравнением (30), где

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \left(\frac{n+3}{1-n} \right)^{1/2} \left(\frac{k_c(t)}{k_*} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{\ln M}}, & \varepsilon_2 &= \sqrt{\varepsilon_1}, \\ \varepsilon_3 &= (1-n)^{-1/2} \left(\frac{k_c(t)}{k_*} \right)^{(1-n)/2} \frac{1}{\ln M}. \end{aligned} \quad (48)$$

Таким образом, в случае $k_c(t) \gg k_*$ девиация также обусловлена флуктуациями положений разрывов в поле скоростей и стремится к нулю с ростом времени.

Приведенный анализ дает хорошее качественное и количественное объяснение результатов численного моделирования зависимости коэффициента корреляции от пространственной частоты k_0 высокочастотного возмущения и от времени t . В частности, формулы хорошо описывают выход коэффициента корреляции r на постоянный уровень, слабо зависящий от ширины полосы спектра возмущения k_0 . Так, на рис. 6 теоретическое значение r при $k_c = k_*/4$, полученное на основе формулы $r = 1 - \varepsilon/2 \simeq 1 - \varepsilon_3/2$ (48) равно $r = 0.8925$, в то время как из результатов эксперимента следует, что $r = 0.89$. Из результатов теоретического рассмотрения следует, что с ростом t коэффициент корреляции r возмущенного и невозмущенного полей должен стремиться к единице. В численных экспериментах рассматривалась эволюция полей в области конечного размера. Асимптотически в такой области остается один единственный треугольный импульс, флуктуации нуля которого малы, но конечны. Это и приводит к тому, что r стремится к некоторому значению, близкому к единице.

6. МЕЛКОМАСШТАБНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ И ТУРБУЛЕНТНАЯ ВЯЗКОСТЬ

Хорошо известно, что эффект влияния мелкомасштабных возмущений на крупномасштабные течения может быть описан введением эффективного турбулентного коэффициента диффузии. Применительно к уравнению Бюргера эта проблема рассматривалась в работах [32, 36]. Мы кратко обсудим здесь особенности влияния вязкости и мелкомасштабных возмущений на эволюцию шумовых сигналов. При бесконечных числах Рейнольдса начальное поле преобразуется в последовательность треугольных импульсов с одинаковым наклоном $v_x' = 1/t$, полностью характеризующихся положением «нулей» y_k и координат разрывов x_k . При малом, но конечном коэффициенте диссипации μ вязкость существенна только в окрестностях разрывов и приводит к уширению ударного фронта. В окрестности разрыва

$$v(x, t) \simeq \Delta v_k \operatorname{th} \left[\frac{(x - x_k)}{\delta} \right], \quad (49)$$

где Δv_k — амплитуда разрыва, а $\delta = 2\mu/\Delta v_k$ — его ширина. На разрывной стадии

$$\Delta v_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{t} \sim \frac{l}{t},$$

где l — внешний масштаб турбулентности, и $\delta \sim \mu t/l$. Степень нелинейности волн можно характеризовать безразмерным параметром — числом Рейнольдса

$$\operatorname{Re}(t) \simeq \frac{\Delta v(t)l(t)}{\mu} = \frac{l(t)}{\delta(t)} \simeq \frac{l^2(t)}{\mu t}, \quad (50)$$

которое равно отношению внешнего масштаба турбулентности $l(t)$ к внутреннему масштабу $\delta(t)$.

Для периодического сигнала $l = \text{const}$. Из-за роста ширины ударного фронта число Рейнольдса уменьшается, и при $\operatorname{Re}(t) \sim 1$ волна выходит на линейный режим. Для шумового возмущения имеет место конкуренция двух факторов: во-первых, рост внешнего масштаба $l(t)$ из-за слияния разрывов и, во-вторых, рост внутреннего масштаба из-за диссипации. Для случайных сигналов со спектром (7) при $n < 1$ мы имеем из (9), (50)

$$\operatorname{Re}(t) \sim t^{(1-n)/(n+3)},$$

т. е. число Рейнольдса растет с течением времени и форма волны становится все более и более нелинейной.

К таким же выводам мы приходим, рассматривая эволюцию среднего поля $\langle \tilde{v}(x, t) \rangle$, считая, что усреднение происходит по ансамблю реализаций высокочастотного возмущения $v_h(x)$. Действительно, возмущенные координаты нулей имеют среднее $\langle \tilde{y}_k \rangle = y_k$, и поэтому вдали от разрывов из (4) следует, что среднее от возмущенного поля равно невозмущенному, $\langle \tilde{v}(x, t) \rangle = v(x, t)$, что хорошо видно на рис. 8. В окрестности разрыва необходимо учитывать влияние возмущений на положение координат разрывов (5).

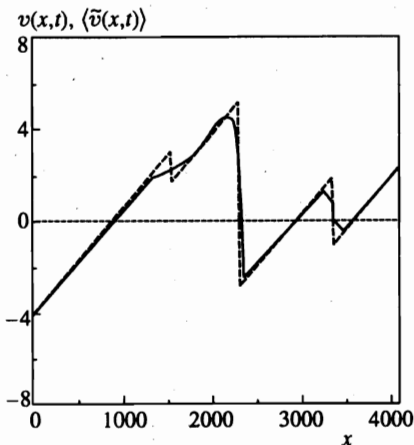


Рис. 8. Эволюция невозмущенного поля $v(x, t)$, обрезанное волновое число $k_* = 32$ (штриховая линия), и среднего поля $\langle \tilde{v}(x, t) \rangle$ с добавочной высокочастотной частью в энергетическом спектре (обрезанное волновое число $k_0 = 1024$) в момент времени $t = 0.125$ ($k_c = 4$) (усреднение по 1000 реализаций высокочастотного возмущения)

Принимая во внимание тот факт, что при $k_0 \gg k_*$ возмущенное действие имеет двойное экспоненциальное распределение, можно показать, что среднее поле по-прежнему описывается выражением (49), где эффективная вязкость равна

$$\mu_{eff} = \left(\frac{2\pi}{\alpha_n} \right)^{2/3} \frac{2\sigma_{S_h}}{\xi}, \quad \xi \simeq \sqrt{\ln M}.$$

При этом ширина ударного фронта будет определяться флуктуациями положений ударных фронтов, а их относительная величина (38), обратно пропорциональная числу Рейнольдса, уменьшаться с увеличением времени.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обсудим влияние высокочастотных (мелкомасштабных) возмущений на эволюцию крупномасштабных компонент поля для различных показателей n спектра начального возмущения (7). Мы предполагаем, что энергетический спектр начального поля $v_0(x)$ и возмущения $v_n(x)$ имеет степенной характер $E_0(k) \propto \alpha_n^2 k^n$. Для $v_0(x)$ частота обрезания есть k_* , а спектр возмущения расположен в интервале $k \in [k_*, k_0]$, причем $k_0 \gg k_*$.

В работах [6–10, 14, 15] было показано, что при гауссовой статистике начального поля энергия турбулентности затухает при $n > 1$ как

$$\sigma^2(t) \simeq \sigma_S t^{-1} \ln^{-1/2} (t\sigma_v^2/\sigma_S), \quad (51)$$

где $\sigma_S^2 = \langle S_0^2 \rangle$ — дисперсия начального потенциала (3), а $\sigma_v^2 = \langle v_0^2 \rangle$ — дисперсия начальной скорости. Для невозмущенного поля $v(x, t)$ из (7) имеем $\sigma_S^2 \simeq k_*^{n-1}$, в то время как для возмущенного поля $\tilde{v}(x, t)$ имеем $\sigma_S^2 \simeq k_0^{n-1}$. Таким образом, при $k_0 \gg k_*$ дисперсия возмущенного поля много больше дисперсии невозмущенного поля при $n > 1$, что означает неустойчивость крупномасштабных структур по отношению к мелкомасштабным в данном случае. Физически это связано с тем, что при $n > 1$ возникновение крупномасштабных структур происходит из-за параметрической генерации низкочастотных компонент, обусловленной нелинейным взаимодействием спектральных составляющих всего спектра. Причем, даже в нетривиальном случае $1 < n < 2$, когда низкочастотная часть спектра сохраняется ($E(k, t) = E_0(k) \sim \alpha_n^2 k^n$, $k \rightarrow 0$), основная часть энергии поля определяется процессами параметрической генерации низкочастотных компонент, и затухание энергии описывается выражением (51) [15]. Заметим, что при $n > 1$ эволюция низкочастотных компонент чувствительна не только к мелкомасштабным возмущениям, но и к виду вероятностного распределения начального потенциала [12, 17, 19].

Случай $-1 < n < 1$ и $k_0, k_* \rightarrow \infty$ соответствует ситуации, когда начальный потенциал представляет собой фрактальный броуновский процесс. В этом случае поле $v(x, t)$ строго статистически автомодельно и для него удастся найти закон распределения скорости, амплитуды разрывов и т.д. [2, 16, 18]. В этом случае низкочастотная часть спектра сохраняется и именно она определяет асимптотическое поведение поля. В работе [33] на физическом уровне строгости было показано, что и при конечной частоте обрезания k_* законы эволюции энергетического спектра такие же, как и для чисто фрактального броуновского движения ($k_* \rightarrow \infty$). В работе [13] было получено, что и вид вероятностного распределения скорости и ее производных при больших отклонениях также не зависит от частоты обрезания начального спектра k_* .

В настоящей работе показано, что при $-1 < n < 1$ не только статистические характеристики, но и сами реализации случайного поля устойчивы по отношению к начальным мелкомасштабным возмущениям как малой, так и большой амплитуды.

Для случая $-3 < n < -1$, когда сама скорость представляет собой фрактальное броуновское движение [11, 29], очевидно, что эволюция крупномасштабных структур также будет устойчива к мелкомасштабным возмущениям. В этом случае интересно, насколько чувствительным является вероятностное распределение амплитуд разрывов, состояний между ними по отношению к частоте обрезания k_x .

В заключение отметим, что асимптотическая устойчивость крупномасштабных структур при $n < 1$ эквивалентна эффекту роста числа Рейнольдса в среде с конечной вязкостью [9, 10, 36].

Авторы благодарны Э. Ауреллю и А. И. Саичеву за обсуждения в ходе работы. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-02-19303) и РФФИ-INTAS (грант № 95-IN-RU-723).

Литература

1. J. M. Burgers, Proc. Roy. Neth. Acad. Sci. **17**, 1 (1939).
2. J. M. Burgers, *The Nonlinear Diffusion Equation*, D. Reidel Publ. Co. (1974).
3. A. M. Polyakov, Phys. Rev. E **52**, 6183 (1995).
4. E. Hopf, Comm. Pure Appl. Mech. **3**, 201 (1950).
5. J. D. Cole, Quart. Appl. Math. **9**, 225 (1951).
6. S. Kida, J. Fluid Mech. **93**, 337 (1979).
7. С. Н. Гурбатов, А. И. Саичев, ЖЭТФ **80**, 689 (1981).
8. J. D. Fournier and U. Frisch, J. Mech. Theor. Appl. (Paris) **2**, 699 (1983).
9. С. Н. Гурбатов, А. Н. Малахов, А. И. Саичев, *Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии*, Наука, Москва (1990), с. 215.
10. S. N. Gurbatov, A. N. Malakhov, and A. I. Saichev, *Nonlinear random waves and turbulence in nondispersive media: waves, rays, particles*, Manchester Univ. Press (1991), p. 1.
11. Ya. Sinai, Commun. Math. Phys. **148**, 601 (1992).
12. S. Alberio, S. A. Molchanov, and D. Surgalis, Probab. Theory Relat. Fields **100**, 457 (1994).
13. A. Avellaneda, R. Ryan, and E. Weinan, Phys. Fluids **7**, 3067 (1995).
14. S. A. Molchanov, D. Surgalis, and W. A. Woyczynski, Comm. Math. Phys. **168**, 209 (1995).
15. S. N. Gurbatov, S. I. Simdyankin, E. Aurell et al., J. Fluid Mech. **344**, 339 (1997).
16. G. M. Molchan, J. Stat. Phys. **88**, 1139 (1997).
17. T. J. Newman, Phys. Rev. E **55**, 6989 (1997).
18. R. Ryan, Comm. Pure Appl. Math. **LI**, 47 (1998).
19. S. Gurbatov and U. Frisch, in *Advances in Turbulence VII*, ed. by U. Frisch, Kluwer Acad. Publ. Netherlands (1998), p. 437.
20. О. В. Руденко, С. И. Солуян, *Теоретические основы нелинейной акустики*, Наука, Москва (1975).
21. G. B. Whitham, *Linear and nonlinear waves*, Wiley, New-York (1974).
22. M. Kardar, G. Parisi, and Y. C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **56**, 889 (1986).
23. A.-L. Barabasi and H. E. Stanley, *Fractal Concepts in surface growth*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).
24. J.-P. Bouchaud, M. Mezard, and G. Parisi, Phys. Rev. E **52**, 3656 (1995).
25. V. Gurarie and A. Migdal, Phys. Rev. E **54**, 4908 (1996).

26. S. N. Gurbatov, A. I. Saichev, and S. F. Shandarin, *Mon. Not. Roy. Astro. Soc.* **236**, 385 (1989).
27. S. F. Shandarin and Ya. B. Zel'dovich, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 185 (1989).
28. D. Weinberg and J. Gunn, *Mon. Not. Roy. Astro. Soc.* **247**, 260 (1990).
29. M. Vergassola, B. Dubrulle, U. Frisch et al., *Astron. & Astrophys.* **289**, 325 (1994).
30. С. Н. Гурбатов, *Изв. вузов, Радиофизика* **26**, 3, 283 (1983).
31. E. Aurell, S. Gurbatov, and I. Wertgeim, *Phys. Lett. A* **182**, 1, 109 (1993).
32. И. Г. Якушкин, *ЖЭТФ* **81**, 3(9) (1981).
33. С. Н. Гурбатов, И. Ю. Демин, А. И. Саичев, *ЖЭТФ* **87**, 3, 479 (1984).
34. D. G. Crighton and S. N. Gurbatov, *CHAOS* **5**, 3, 524 (1995).
35. A. Noullez and M. Vergassola, *J. Sci. Comp.* **9**, 259 (1994).
36. С. Н. Гурбатов, И. Ю. Демин, Н. В. Прончатов-Рубцов, *ЖЭТФ* **91**, 11, 1352 (1986).