

ЖУРНАЛ  
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ  
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В МАРТЕ 1873 ГОДА  
ВЫХОДИТ 12 РАЗ В ГОД  
МОСКВА

ТОМ 115, ВЫПУСК 3  
МАРТ, 1999  
«НАУКА»

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЦИРКУЛЯРНО ПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЕТА В СРЕДАХ С  
КРУПНОМАСШТАБНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

© 1999

*Е. Е. Городничев\*, А. И. Кузовлев, Д. Б. Rogozkin*

*Московский инженерно-физический институт  
115409, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 28 июля 1998 г.

Рассмотрено малоугловое многократное рассеяние циркулярно поляризованных волн в неупорядоченной среде, состоящей из крупномасштабных (больше длины волны света) сферических частиц. Показано, что уравнение для четвертого параметра Стокса  $V$  — разности интенсивностей лево- и правополяризованного света — по виду аналогично скалярному уравнению переноса для интенсивности  $I$ , но в нем присутствует дополнительное «немалоугловое» слагаемое, ответственное за процесс деполаризации. При малоугловом рассеянии света деполаризующие столкновения происходят относительно редко, и в отличие от скалярного случая в задаче возникает еще один пространственный масштаб — глубина деполаризации. Степень поляризации и спиральность рассеянного света вычислены для чисто упругого рассеяния и при наличии в среде поглощения. Показано, что при сильном поглощении деполаризация происходит уже после перехода к асимптотическому режиму распространения излучения. Обсуждаются также закономерности, которые возникают при сильном — неборновском — рассеянии на отдельной неоднородности.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время проблема исследования поляризационных свойств света, многократно рассеянного в средах с крупномасштабными неоднородностями, вызывает большой интерес (см., например, [1–4]). Это, в частности, обусловлено различными приложениями в диффузионной спектроскопии рассеивающих сред (суспензий, коллоидных

\*E-mail: gorod@theor.mephi.msk.su

© Российская академия наук, Отделение общей физики и астрономии,  
Институт физических проблем им. П. Л. Капицы, 1999 г.

растворов и др.) [5, 6] и в диагностике биологических тканей [7, 8]. Экспериментально [1, 4] и методом численного моделирования [4] обнаружен ряд новых особенностей в распространении поляризованного света в неупорядоченных средах. Однако теоретическое рассмотрение многих аспектов этой проблемы до сих пор остается неполным. Как уже указывалось в [9], отсутствует теория деполяризации света при малоугловом многократном рассеянии.

В развитие работы [9], посвященной исследованию поляризационных эффектов при распространении первоначально неполяризованного света, ниже рассматривается многократное рассеяние циркулярно поляризованных волн. Предполагается, что среда состоит из крупномасштабных (больше длины волны света) сферических частиц. Параметры Стокса рассеянного излучения вычислены как для чисто упругого рассеяния, так и при наличии в среде поглощения. Показано, что разность интенсивностей лево- и правополяризованного света — четвертый параметр Стокса  $V$  — подчиняется уравнению, которое аналогично скалярному уравнению переноса для интенсивности  $I$ , но учитывает как обычные, так и «деполяризующие» столкновения. Обнаружено, что при рассеянии на малые углы длина деполяризации  $l_{dep}$  превышает транспортную длину упругого рассеяния  $l_{tr}$ . Поэтому при сильном поглощении ( $l_a < l_{tr}$ ,  $l_a$  — длина поглощения), когда распределение многократно рассеянного света на всех глубинах  $z$  остается сильно анизотропным [10, 11], разрушение поляризации происходит при очень больших  $z$ , уже после установления асимптотического [9–11] режима распространения света. В задаче, таким образом, в отличие от скалярного случая, возникает еще один характерный масштаб — глубина деполяризации. Обсуждаются также закономерности, которые возникают при сильном — неборновском — рассеянии на отдельной неоднородности.

Из полученных в работе результатов следует, что по сравнению с угловым распределением излучения, измерение степени поляризации позволяет определить новые характеризующие среду параметры и может быть использовано при исследовании неоднородных сред оптическими методами.

## 2. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Пусть на слой среды, состоящей из крупных (радиус  $a \gg \lambda$ ) сферических рассеивателей по нормали к поверхности падает широкий циркулярно поляризованный световой пучок. Предполагается, что показатель преломления  $n$  отдельного центра мало отличается от единицы ( $|n - 1| \ll 1$ ) и однократное рассеяние происходит преимущественно вперед [13]. Ввиду азимутальной симметрии задачи четыре уравнения для параметров Стокса рассеянного излучения расщепляются на две независимые друг от друга системы уравнений [12, 13]:

$$\begin{aligned} & \left\{ \mu \frac{\partial}{\partial z} + n_0 \sigma_{tot} \right\} \begin{pmatrix} I(z, \mu) \\ Q(z, \mu) \end{pmatrix} = \\ & = n_0 \int d\mathbf{n}' \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \cos \beta \\ b_1 \cos \beta' & a_1 \cos \beta \cos \beta' - a_2 \sin \beta \sin \beta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I(z, \mu') \\ Q(z, \mu') \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \mu \frac{\partial}{\partial z} + n_0 \sigma_{tot} \right\} \begin{pmatrix} U(z, \mu) \\ V(z, \mu) \end{pmatrix} = \\ & = n_0 \int d\mathbf{n}' \begin{pmatrix} a_2 \cos \beta \cos \beta' - a_1 \sin \beta \sin \beta' & -b_2 \cos \beta' \\ b_2 \cos \beta & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(z, \mu') \\ V(z, \mu') \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $n_0$  — число рассеивателей в единице объема;  $\sigma_{tot} = \sigma + \sigma_a$  — полное сечение ослабления;  $\sigma$ ,  $\sigma_a$  — сечения рассеяния и поглощения;

$$a_1 = \frac{1}{2}(|A_{\parallel}|^2 + |A_{\perp}|^2), \quad a_2 = \operatorname{Re} A_{\parallel} A_{\perp}^*, \quad b_1 = \frac{1}{2}(|A_{\parallel}|^2 - |A_{\perp}|^2), \quad b_2 = \operatorname{Im} A_{\parallel} A_{\perp}^*,$$

$A_{\parallel}$ ,  $A_{\perp}$  — амплитуды однократного рассеяния волн, поляризованных параллельно и перпендикулярно плоскости рассеяния;

$$\cos \beta = 1 - \frac{2(1 - \mu^2)(1 - \cos^2 \psi)}{1 - \cos^2 \xi},$$

$$\sin \beta = \frac{2\sqrt{1 - \mu^2} (\mu\sqrt{1 - \mu'^2} - \mu'\sqrt{1 - \mu^2} \cos \psi) \sin \psi}{1 - \cos^2 \xi},$$

$$\cos \xi = \mu\mu' + \sqrt{(1 - \mu^2)(1 - \mu'^2)} \cos \psi, \quad \mu = \cos \theta, \quad \mu' = \cos \theta', \quad \psi = \varphi - \varphi'.$$

Величины  $\cos \beta'$  и  $\sin \beta'$  получаются из  $\cos \beta$ ,  $\sin \beta$  заменой  $\mu$  и  $\varphi$  на  $\mu'$  и  $\varphi'$ . Единичные векторы  $\mathbf{n}' = \{\sin \theta' \cos \varphi', \sin \theta' \sin \varphi', \cos \theta'\}$  и  $\mathbf{n} = \{\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta\}$  определяют направление движения фотона до и после рассеяния.

Граничное условие к уравнениям (1), (2) при единичной плотности потока падающего света имеет вид

$$\begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} \Big|_{z=0, \mu>0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \delta(1 - \mathbf{nn}_0), \quad (3)$$

где  $\mathbf{n}_0$  — вектор внутренней нормали к поверхности среды.

Решение уравнений (1) в малоугловом приближении было подробно изучено в [9]. Ниже основное внимание мы уделим обсуждению решения второй пары уравнений (2). Как и в [9], представляет интерес отдельно проанализировать случаи борновского ( $a|n - 1| \ll \lambda$ ) и сильного — неборновского ( $a|n - 1| > \lambda$ ) — однократного рассеяния. Для обоих случаев функции  $a_i$ ,  $b_i$  ( $i = 1, 2$ ) известны и приведены в [13, 14].

### 3. БОРНОВСКИЕ РАССЕИВАТЕЛИ ( $a|n - 1| \ll \lambda$ )

В борновском приближении амплитуды рассеяния  $A_{\parallel}(\cos \gamma)$  и  $A_{\perp}(\cos \gamma)$  связаны между собой соотношением [13, 14]

$$A_{\parallel}(\cos \gamma) = A_{\perp}(\cos \gamma) \cos \gamma. \quad (4)$$

Поэтому для величин  $a_i$ ,  $b_i$  справедливы формулы

$$a_1 = |A_{\perp}|^2 \frac{1 + \cos^2 \gamma}{2}, \quad a_2 = |A_{\perp}|^2 \cos \gamma, \quad b_1 = |A_{\perp}|^2 \frac{\cos^2 \gamma - 1}{2}, \quad b_2 = 0. \quad (5)$$

Из последнего равенства и граничного условия (3) следует, что третий параметр Стокса  $U$  тождественно равен нулю,  $U \equiv 0$ , и поэтому система (2) сводится к одному уравнению:

$$\left\{ \mu \frac{\partial}{\partial z} + n_0 \sigma_{tot} \right\} V(z, \mu) = n_0 \int dn' |A_{\perp}(nn')|^2 (nn') V(z, \mu'). \quad (6)$$

Согласно (5), дифференциальные сечения рассеяния в уравнениях для интенсивности и четвертого параметра Стокса в области малых углов совпадают с точностью до слагаемых порядка  $\gamma^2$  включительно ( $a_1 \approx a_2$ ). Поэтому, если выполнить в уравнении (6) обычную процедуру малоуглового разложения (т. е. удержать только слагаемые порядка  $\theta^2, \theta'^2$  [9]), полученное уравнение будет совпадать со скалярным малоугловым уравнением переноса для  $I_{scal}$ .

Как показывает анализ, такое приближение оказывается недостаточным. Если положить  $V \approx I_{scal}$ , то степень поляризации

$$P = \sqrt{V^2 + Q^2} / I \quad (7)$$

может превысить единицу, что заведомо неверно.

Чтобы избежать подобной ошибки, нужно учесть отличие  $V$  от  $I_{scal}$ . Запишем уравнение (6) в следующем виде:

$$\left\{ \mu \frac{\partial}{\partial z} + n_0 \sigma_{tot} \right\} V(z, \mu) = n_0 \int dn' a_1(nn') V(z, \mu') - n_0 \int dn' \frac{d\sigma_{dep}(nn')}{dn'} V(z, \mu'). \quad (8)$$

Уравнение (8) совпадает со скалярным уравнением переноса для интенсивности в некоторой эффективной среде, в которой присутствуют два типа столкновений — обычные с дифференциальным сечением рассеяния

$$\frac{d\sigma}{dn} = a_1 = \frac{1}{2} |A_{\perp}(nn')|^2 [1 + (nn')^2]$$

и «деполяризующие» с сечением

$$\frac{d\sigma_{dep}}{dn} = \frac{1}{2} |A_{\perp}(nn')|^2 (1 - nn')^2. \quad (9)$$

Сечение (9) пропорционально сечению преобразования левополяризованного света в правополяризованный и наоборот. В этом легко убедиться, если воспользоваться определениями  $I = I_+ + I_-$  и  $V = I_+ - I_-$ , где  $I_{\pm}$  — интенсивности лево-, правополяризованного света, и, комбинируя уравнения для  $I$  и  $V$ , записать уравнения для  $I_{\pm}$ . В уравнениях для  $I_{\pm}$  дифференциальное сечение рассеяния оказывается равным  $d\sigma - (1/2)d\sigma_{dep}$ , а сечение преобразования левополяризованной волны в правополяризованную (или наоборот) —  $(1/2)d\sigma_{dep}$ .

Формфактор  $|A_{\perp}|^2$  для слаборассеивающих ( $a|n - 1| \ll \lambda$ ) сфер, усредненный по угловому масштабу  $\Delta\gamma > \lambda/a$ , в области малых углов убывает по степенному закону [13]

$$|A_{\perp}|^2 \propto 1/\gamma^4. \quad (10)$$

Поэтому для  $|A_{\perp}|^2$  можно использовать модельную функцию [15]:

$$|A_{\perp}(\cos \gamma)|^2 = \frac{\sigma \gamma_0^2}{\pi [\gamma_0^2 + 2(1 - \cos \gamma)]^2}, \quad (11)$$

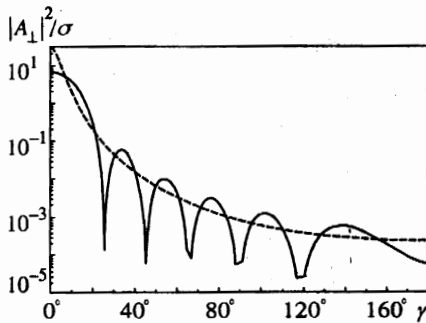


Рис. 1. Формфактор  $|A_{\perp}|^2$  для прозрачных рассеивателей. Сплошная кривая — расчет по формулам Ми ( $n - 1 = 0.01$ ,  $a = 10\lambda/2\pi$ ), штриховая — аппроксимация (11) ( $\gamma_0 = 0.1$ )

где  $\sigma = (2\pi)^3 a^4 |n - 1|^2 / \lambda^2$  [13] и  $\gamma_0 = \lambda/2\pi a$  — сечение и характерный угол однократного рассеяния<sup>1)</sup>. Как показывает прямое сравнение (см. рис. 1), функция (11) хорошо воспроизводит поведение точного — рассчитанного по формулам Ми [13] — формфактора во всей области углов.

Подставляя (11) в (9), для сечения деполяризации находим

$$\frac{d\sigma_{dep}}{dn} = \frac{\sigma\gamma_0^2(1 - \cos\gamma)^2}{2\pi[\gamma_0^2 + 2(1 - \cos\gamma)]^2}. \quad (12)$$

В наиболее интересном случае, когда рассеяние является многократным, углы отклонения  $\theta$  превышают значение характерного угла однократного рассеяния,  $\theta > \gamma_0$ . В этих условиях сечение деполяризации не зависит от угловых переменных:

$$\frac{d\sigma_{dep}}{dn} \approx \frac{\sigma\gamma_0^2}{8\pi} = \frac{\sigma_{tr}}{8\pi \ln(2/\gamma_0)}, \quad (13)$$

где  $\sigma_{tr} = \sigma\gamma_0^2 \ln(2/\gamma_0)$  — транспортное сечение упругого рассеяния [9]. В результате для длины  $l_{dep}$  свободного пробега относительно деполяризирующего столкновения имеем

$$l_{dep} = \left( n_0 \int d\sigma_{dep} \right)^{-1} = l_{tr} \ln \frac{4}{\gamma_0^2}, \quad (14)$$

где  $l_{tr} = (n_0\sigma_{tr})^{-1}$  — транспортная длина. Согласно (12)–(14), при малоугловом рассеянии длина деполяризации обратно пропорциональна среднему от четвертой степени угла однократного рассеяния,  $l_{dep} \sim l/\langle\gamma^4\rangle$  ( $l = (n_0\sigma)^{-1}$  — длина свободного пробега), и превышает транспортную длину,  $l_{dep} > l_{tr} \sim l/\langle\gamma^2\rangle$ . Это означает, что деполяризирующие столкновения происходят сравнительно редко и второе слагаемое в правой части уравнения (8) можно считать малым по сравнению с остальными членами этого уравнения. Указанное обстоятельство позволяет решать уравнение (8) методом итераций, рассматривая в качестве исходного приближения решение обычного скалярного уравнения переноса.

<sup>1)</sup> Аналогичная (11) формула широко используется для описания сечения упругого рассеяния быстрых электронов на атомах [16].

### 3.1. Слабопоглощающая среда

Проанализируем прохождение излучения через слой слабопоглощающей ( $l_{tr} < l_a = (n_0\sigma_a)^{-1}$ ) среды. В этом случае многократное рассеяние носит малоугловой характер, пока толщина  $L$  слоя ограничена неравенством  $L < l_{tr}$ .

Рассматривая последнее слагаемое в правой части уравнения (8) как неоднородность, запишем уравнение (8) в интегральной форме:

$$\tilde{V}(z, \mu) = \tilde{I}_{scal}(z, \mu) - n_0 \int_0^z dz' \int dn' \tilde{G}(z-z'|n, n') \int dn'' \frac{d\sigma_{dep}(n'n'')}{dn''} \tilde{V}(z', \mu''), \quad (15)$$

где  $\tilde{V}(z, \mu) = \exp(n_0\sigma_a z)V(z, \mu)$ ,  $\tilde{I}_{scal}(z, \mu) = \exp(n_0\sigma_a z)I_{scal}(z, \mu)$ ,  $\tilde{G}(z|n, n') = \exp(n_0\sigma_a z)G(z|n, n')$ ;  $I_{scal}$  — решение скалярного уравнения переноса (т. е. уравнения (8) при  $\sigma_{dep} = 0$ ) для падающего по нормали к поверхности потока света,  $G$  — функция Грина того же уравнения.

Как видно из (15), для вычисления четвертого параметра Стокса  $V$  в первую очередь необходимо знать интенсивность  $I_{scal}$  и функцию Грина  $G$  скалярного уравнения переноса. Однако решение задачи о нахождении указанных величин даже в малоугловом приближении в общем виде найти не удастся, и поэтому нам придется использовать результаты, справедливые только при выполнении определенных ограничений.

Для данной ситуации, когда речь идет о малоугловом рассеянии в относительно тонком слое слабопоглощающей среды ( $L < l_{tr} < l_a$ ), можно пренебречь эффектом флуктуаций путей фотонов при многократном рассеянии и воспользоваться стандартным вариантом малоуглового приближения [9, 14]. В этом приближении интенсивность  $\tilde{I}_{scal}$  и функция Грина  $\tilde{G}$  скалярного уравнения переноса хорошо известны (см., например, [14, 17]):

$$\tilde{I}_{scal}(z, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \omega d\omega J_0(\omega\theta) \exp[-n_0\sigma(1 - \chi(\omega))z], \quad (16)$$

$$\tilde{G}(z|n, n') \approx \tilde{G}(z|\theta - \theta') = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \omega d\omega J_0(\omega|\theta - \theta'|) \exp(-n_0\sigma(1 - \chi(\omega))z), \quad (17)$$

где  $\theta$  — параллельная поверхности составляющая вектора  $n$ ,  $J_0(x)$  — функция Бесселя нулевого порядка [18],

$$\chi(\omega) = \frac{2\pi}{\sigma} \int_0^\infty \theta d\theta J_0(\omega\theta) a_1(\theta) \approx 1 - \frac{1}{2}(\omega\gamma_0)^2 \ln \frac{1}{\omega\gamma_0}. \quad (18)$$

Интенсивность  $\tilde{I}_{scal}$  (16) в предельных случаях относительно малых и больших углов равна [9, 19]

$$\tilde{I}_{scal}(z, \theta) = \begin{cases} \frac{l_{tr} \ln(2/\gamma_0)}{\pi z \ln(z/l)}, & \theta < \theta_z, \\ \frac{z}{\pi \theta^4 l_{tr} \ln(2/\gamma_0)} \left( 1 + \frac{8z}{\theta^2 l_{tr} \ln(2/\gamma_0)} \ln \frac{\theta}{\gamma_0} \right), & \theta > \theta_z, \end{cases} \quad (19)$$

$\theta_z = \gamma_0 \sqrt{(z/l) \ln(z/l)}$  — характерный угол многократного рассеяния в слое толщиной  $z \gg l$ .

Подставляя в (15) выражения (13) и (16)–(18) и выполняя в уравнении (15) одну итерацию, для четвертого параметра Стокса  $\tilde{V}$  получаем

$$\tilde{V}(z, \theta) \approx \tilde{I}_{scal}(z, \theta) - \frac{z}{4\pi l_{dep}} + \dots \quad (20)$$

Область применимости соотношения (20) определяется условием малоуглового рассеяния ( $\theta < 1$ ).

Выражение (7) для степени поляризации удобно представить в виде

$$P = \sqrt{S^2 + P_{un}^2}, \quad (21)$$

где  $S = \tilde{V}/\tilde{I}$  — спиральность фотонов [20, 21],  $P_{un} = Q/I$  — степень поляризации первоначально неполяризованного пучка. Как показывает анализ, при вычислении  $P$  можно пренебречь поляризационными поправками к интенсивности и положить  $I \approx \approx I_{scal}$ . В этом приближении для величины  $P_{un}$  справедливо выражение [9]

$$P_{un} = \begin{cases} -\frac{\theta^2}{4 \ln(z/l)}, & \theta < \theta_z, \\ -\frac{\theta^2}{2} \left( 1 - \frac{8z}{\theta^2 l_{tr} \ln(2/\gamma_0)} \ln \frac{\theta}{\gamma_0} \right), & \theta > \theta_z. \end{cases} \quad (22)$$

Подставляя теперь (19), (20) и (22) в (21), находим, что в главном по малому параметру  $l_{tr}/l_{dep} \ll 1$  приближении степень поляризации под «куолом» ( $\theta < \theta_z$ ) углового распределения не зависит от угла  $\theta$  и определяется соотношением

$$P = 1 - \frac{\theta_z^4}{8 \ln(z/l)}, \quad (23)$$

а на «крыльях» ( $\theta \gg \theta_z$ ) распределения

$$P = 1 - \theta^2 \theta_z^2 \frac{\ln(\theta/\gamma_0)}{\ln(z/l)}. \quad (24)$$

Из (23), (24) следует, что при прохождении через относительно тонкие слои ( $z < l_{tr}$ ) деполаризация излучения мала и степень поляризации близка к единице ( $\delta P = 1 - P \ll \ll 1$ ). Наиболее сильная деполаризация происходит при относительно больших ( $\theta > \theta_z$ ) углах отклонения:  $\delta P(\theta < \theta_z)/\delta P(\theta > \theta_z) \propto \theta_z^2/\theta^2 \ll 1$ .

Качественную картину разрушения поляризации света можно представить себе так. На малых глубинах ( $z < l$ ), где доминирует однократное рассеяние, степень поляризации равна единице [13]. По мере увеличения  $z$  ( $z > l$ ) значение  $P$  начинает убывать. В области малых углов,  $\theta < \theta_z$ , уменьшение  $P$  целиком связано с превращением в процессе многократного рассеяния циркулярно поляризованной компоненты в неполяризованную. Относительный вклад линейно поляризованной компоненты, возникающей при рассеянии уже деполаризованного пучка [9],  $P_{un}$ , пренебрежимо мал. При  $\theta > \theta_z$  угловое распределение формируется волнами, испытывающими многократное рассеяние на малые ( $\theta \ll \theta_z$ ) углы и однократное отклонение на большой ( $\theta > \theta_z$ ) угол [9]. В

рассматриваемом интервале углов уменьшение спиральности в первом по малому отношению  $\theta_z/\theta \ll 1$  приближении,  $S \approx 1 - \theta^4/8$ , как и при однократном рассеянии, компенсируется линейно поляризованной компонентой, возникающей от деполаризованного излучения,  $P_{un} \approx -\theta^2/2$ . Отличие  $P$  от единицы при  $\theta > \theta_z$  определяется следующим по  $\theta_z/\theta$  приближением и имеет порядок  $\theta^2\theta_z^2$ .

### 3.2. Сильнопоглощающая среда

Рассмотрим теперь распространение циркулярно поляризованного света в сильнопоглощающей ( $l_a < l_{tr}$ ) среде, когда малоугловое приближение справедливо на всех глубинах [10, 11]. Эволюция формы углового распределения с увеличением  $z$  в такой среде происходит следующим образом [9, 19].

На относительно малых глубинах ( $l < z < l_a$ ) влияние поглощения на распределение излучения практически отсутствует и интенсивность описывается соотношением (19). С ростом  $z$  ( $z > l_a$ ) за счет более вероятного поглощения сильно отклонившихся фотонов «резерфордовский» закон убывания интенсивности  $\bar{I} \propto \theta^{-4}$  (19) в области углов  $\theta > \sqrt{l_a/z}$  сменяется более быстрым [9, 19]:

$$\bar{I}_{scal}(z, \theta) = \frac{2\sigma_{tr}\bar{E}(z)}{\pi\sigma_a \ln(2/\gamma_0)\theta^6} \left( 1 + 5\frac{\langle\theta^2\rangle_z}{\theta^2} + \dots \right), \tag{25}$$

где  $\bar{E}(z) = \exp(z/l_a)E(z)$  и  $\langle\theta^2\rangle_z$  — «редуцированный» поток и средний квадрат угла многократного рассеяния на глубине  $z$ .

До тех пор пока не наступил переход к асимптотическому режиму распространения ( $z < l_d$ ,  $l_d$  — длина затухания «редуцированного» потока), зависимость  $\bar{E}(z)$  от  $z$  можно пренебречь,  $\bar{E}(z) \approx 1$ . Величина  $\langle\theta^2\rangle_z$  в рассматриваемом диапазоне  $z$  равна

$$\langle\theta^2\rangle_z = \frac{2\pi}{\bar{E}(z)} \int_0^\infty \theta^3 d\theta \bar{I}_{scal}(z, \theta) \approx \frac{2z}{l_{tr}} \frac{\ln\left(\sqrt{l_a/z}/\theta_z\right)}{\ln(2/\gamma_0)}, \tag{26}$$

На глубинах  $z > l_d$  «резерфордовский» участок в угловом распределении исчезает и интенсивность определяется выражением [9]

$$\begin{aligned} \bar{I}_{scal}(z, \theta) &\approx \\ &\approx \exp\left(-\frac{z}{l_d}\right) \begin{cases} \frac{2}{\pi\langle\theta^2\rangle_\infty} \left(1 - \frac{\theta^2}{\langle\theta^2\rangle_\infty} + \dots\right), & \theta < \sqrt{\langle\theta^2\rangle_\infty}, \\ \frac{4\sigma_{tr}\gamma_0^2}{\pi\sigma_a\theta^6 \ln(2/\gamma_0)} \left(1 + 5\frac{\langle\theta^2\rangle_\infty}{\theta^2}\right), & \theta > \sqrt{\langle\theta^2\rangle_\infty}, \end{cases} \end{aligned} \tag{27}$$

где  $\langle\theta^2\rangle_\infty = 2l_a/l_d$  — средний квадрат угла многократного рассеяния в асимптотическом режиме. Длина  $l_d$ , согласно вычислениям [9], равна

$$l_d = \sqrt{2l_a l_{tr} \ln(2/\gamma_0) / \ln \sqrt{2l_a/l\gamma_0^2}}. \tag{28}$$

Из соотношения, связывающего  $\bar{V}$  с  $\bar{I}_{scal}$  (см. (15)), и из сказанного выше относительно  $\bar{I}_{scal}$  следует, что величина четвертого параметра Стокса в сильнопоглощающей среде на глубинах  $z < l_d$  в области относительно малых углов  $\theta < \sqrt{l_a/z}$  должна быть



такой же, как в среде со слабым ( $l_a < l_{tr}$ ) поглощением, и поэтому должна описываться законом (20). Соответственно, степень поляризации должна определяться выражениями (23), (24).

Влияние поглощения на величину  $\tilde{V}$  начинает сказываться при  $z > l_a$  в области углов  $\theta > \sqrt{l_a/z}$  (см. (25)). При дальнейшем увеличении  $z$  поглощение полностью изменяет угловую зависимость четвертого параметра Стокса  $\tilde{V}$ .

При больших углах отклонения ( $\theta > \sqrt{l_a/z}$  при  $z < l_d$  и  $\theta > \sqrt{(\theta^2)_\infty}$  при  $z > l_d$ ) добавка к величине  $\tilde{V}$ , которая возникает из-за последнего члена в правой части уравнения (8), убывает по закону  $\delta\tilde{V} \propto 1/\theta^2$  (ср. с (20)). Это следует непосредственно из уравнения (8).

Если перенести слагаемое  $n_0\sigma\tilde{V}$  из левой части в правую и оценить при относительно больших углах  $\theta$  в отдельности вклад интеграла упругих столкновений [9] и члена, ответственного за деполяризацию, то для  $\delta\tilde{V}(z, \mu)$  получим

$$\begin{aligned} \delta\tilde{V}(z, \mu) &\approx -\frac{n_0\sigma_{dep}}{4\pi\mu} \int_0^z dz' \exp\left(-\frac{n_0\sigma_a(z-z')(1-\mu)}{\mu}\right) \tilde{E}^{(V)}(z') \approx \\ &\approx -\frac{\sigma_{dep}}{2\pi\sigma_a\theta^2} \tilde{E}^{(V)}(z), \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\tilde{E}^{(V)}(z) = \int dn\tilde{V}(z, \mu). \quad (30)$$

Согласно (29), (30), как и интенсивность в [9, 19], величина  $\delta\tilde{V}$  при больших  $\theta$  выражается через интеграл от  $\tilde{V}$  по направлениям — пространственную «плотность»  $\tilde{E}^{(V)}$ .

Добавка  $\delta\tilde{V}$  является наиболее медленно убывающей с ростом  $\theta$  составляющей величины  $\tilde{V}$ .

Выделяя вклад (29) из величины  $\tilde{V}(z, \mu)$ , можно развить итерационную процедуру вычисления  $\tilde{V}(z, \mu)$  при относительно больших углах  $\theta$ . Для этого запишем  $\tilde{V}$  в виде ( $\mu > 0$ )

$$\tilde{V}(z, \mu) = -\frac{n_0\sigma_{dep}}{4\pi\mu} \int_0^z dz' \exp\left(-\frac{n_0\sigma_a(z-z')(1-\mu)}{\mu}\right) \tilde{E}^{(V)}(z') + \tilde{v}(z, \mu) \quad (31)$$

и подставим (31) в (8). В результате для функции  $\tilde{v}(z, \mu)$  получим уравнение, которое в отличие от исходного уравнения (8) допускает применение малоуглового приближения (в (8) этому препятствует последний — не зависящий от углов — член в правой части). Используя в уравнении для  $\tilde{v}(z, \mu)$  обычную процедуру малоуглового разложения, т. е. полагая  $1 - \mu \approx \theta^2/2$  и оставляя первые не исчезающие члены (см., например, [9, 11]), находим

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} + n_0\sigma_a \frac{\theta^2}{2} \right\} \tilde{v}(z, \theta) &= n_0 \int d\theta' a_1(|\theta - \theta'|) (\tilde{v}(z, \theta') - \tilde{v}(z, \theta)) - \\ &- n_0 \int d\theta' a_1(|\theta - \theta'|) \frac{n_0\sigma_{dep}}{4\pi} \int_0^z dz' \tilde{E}^{(V)}(z') \left[ \exp\left(-\frac{n_0\sigma_a(z-z')\theta'^2}{2}\right) - \right. \\ &\left. - \exp\left(-\frac{n_0\sigma_a(z-z')\theta^2}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Граничное условие к уравнению (32) имеет вид

$$\tilde{v}(z = 0, \theta) = \delta(\theta)/2\pi\theta.$$

Теперь, воспользовавшись методом разложения по обратным степеням  $\theta$ , развитым ранее для интенсивности  $\tilde{I}_{scal}$  [9, 19], можно найти асимптотическое разложение  $\tilde{v}(z, \theta)$  (см. Приложение А).

В главном по малому параметру  $\sigma_{dep}/\sigma_a \ll 1$  приближении четвертый параметр Стокса на «крыльях» углового распределения определяется выражением

$$\begin{aligned} \tilde{V}(z, \theta) &\approx \tilde{E}^{(V)}(z) \left[ -\frac{\sigma_{dep}}{2\pi\sigma_a\theta^2} \left( 1 + \frac{\langle\theta^2\rangle_z}{\theta^2} + \dots \right) + \frac{\tilde{I}_{scal}(z, \theta)}{\tilde{E}(z)} \right] = \\ &= \tilde{E}^{(V)}(z) \left[ -\frac{\sigma_{dep}}{2\pi\sigma_a\theta^2} \left( 1 + \frac{\langle\theta^2\rangle_z}{\theta^2} + \dots \right) + \frac{4\sigma_{dep}}{\pi\sigma_a\theta^6} \left( 1 + 5\frac{\langle\theta^2\rangle_z}{\theta^2} + \dots \right) \right], \end{aligned} \quad (33)$$

где  $\tilde{I}_{scal}(z, \theta)$  — интенсивность (25). Если теперь воспользоваться результатом работ [9, 19],

$$P_{un} \approx -\frac{\theta^2}{2} \left( 1 - 4\frac{\langle\theta^2\rangle_z}{\theta^2} \right), \quad (34)$$

то из (25) и (33) можно найти степень поляризации циркулярно поляризованного света в области относительно больших углов отклонения:

$$P \approx \sqrt{\left( 1 - \frac{\theta^4}{4} + \theta^2\langle\theta^2\rangle_z \right) \left( \frac{\tilde{E}^{(V)}(z)}{\tilde{E}(z)} \right)^2 + \frac{\theta^4}{4} \left( 1 - 8\frac{\langle\theta^2\rangle_z}{\theta^2} \right)}. \quad (35)$$

Первое слагаемое под знаком радикала в (35) описывает уменьшение спиральности циркулярно поляризованного излучения, второе связано с возникновением линейной поляризации при рассеянии уже деполаризованного света. На относительно малых глубинах, когда  $\tilde{E}^{(V)}(z) \approx \tilde{E}(z) \approx 1$ , из (35) для  $P$  получаем

$$P \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2\langle\theta^2\rangle_z. \quad (36)$$

Как следует из сравнения (36) и (24), поглощение приводит к замедлению убывания степени поляризации. Это обусловлено уменьшением числа наиболее «деполяризованных» из-за отклонения на относительно большие углы фотонов.

Проанализируем теперь степень поляризации в асимптотическом ( $z > l_d$ ) режиме, когда влияние поглощения на распространение света существенно во всей области углов рассеяния. В этом случае решение уравнения (8) должно иметь вид [22]

$$\tilde{V}(z, \mu) = \tilde{V}(\mu) \exp(-\varepsilon_0^{(V)}z), \quad (37)$$

где

$$\tilde{V}(\mu) = \psi_0^{(V)}(\mu = 1)\psi_0^{(V)}(\mu),$$

а величины  $\psi_0^{(V)}(\mu)$ ,  $\varepsilon_0^{(V)}$  — первая собственная функция и первое собственное значение соответствующей уравнению (8) спектральной задачи.

Угловую функцию  $\tilde{V}(\mu)$  и коэффициент затухания  $\varepsilon_0^{(V)}$  нетрудно вычислить по теории возмущений, основываясь на полученных ранее (см., например, [9]) результатах для величины интенсивности в глубинном режиме (см. Приложение Б). В первом по малому параметру  $\sigma_{dep}/\sigma_a \ll 1$  приближении для  $\varepsilon_0^{(V)}$  находим (см. (Б.3))

$$\varepsilon_0^{(V)} = \frac{1}{l_d} \left( 1 + \frac{\sigma_{dep}}{\sigma_a} \right). \quad (38)$$

С той же точностью, с какой справедливо равенство (38), функция  $\tilde{V}(\theta)$  под «куполom» ( $\theta < \sqrt{(\theta^2)_\infty}$ ) углового распределения определяется следующим соотношением (см. (27) и (Б.5)):

$$\tilde{V}(\theta) = \tilde{I}_{scal}(\theta) + \delta\tilde{V}(\theta) \approx \frac{2}{\pi(\theta)_\infty} + \frac{\sigma_{dep}}{\pi\sigma_a(\theta)_\infty} \ln 2. \quad (39)$$

Согласно (39), при  $\theta < \sqrt{(\theta^2)_\infty}$  вкладом  $\delta\tilde{V}(\theta)$  в значения спиральности  $S$  и «плотности»  $\tilde{E}^{(V)}(z)$  в первом приближении при  $z/l_d > 1$  можно пренебречь. В результате степень поляризации в указанной области углов определяется выражением

$$P \approx \sqrt{\exp \left[ -\frac{2}{l_d} \left( \frac{l_a}{l_{dep}} \right) z \right] + \left( \frac{\ln 2}{2} \frac{l_a \gamma_0^2 \theta^2}{l(\theta^2)_\infty} \right)^2}. \quad (40)$$

При выводе (40) учтено равенство [9, 19]

$$P_{un} = -\frac{\ln 2}{2} \frac{l_a \gamma_0^2 \theta^2}{l(\theta^2)_\infty}, \quad \theta < \sqrt{(\theta^2)_\infty}. \quad (41)$$

Аналогичную соотношению (40) формулу можно получить и на «крыльях» углового распределения. Для этого следует воспользоваться формулой [9, 19]

$$P_{un} = -\frac{\theta^2}{2} \left[ 1 - \frac{4(\theta^2)_\infty}{\theta^2} \right], \quad \theta > \sqrt{(\theta^2)_\infty} \quad (42)$$

и выражением для  $\tilde{E}^{(V)}(z)$  на больших глубинах,

$$\tilde{E}^{(V)}(z) \approx \tilde{E}(z) \exp \left[ -\frac{1}{l_d} \left( \frac{l_a}{l_{dep}} \right) z \right]. \quad (43)$$

Этот результат имеет ту же точность, что и формула (40).

Подставляя (42) и (43) в (35), для степени поляризации циркулярно поляризованного света на «крыльях» углового распределения в асимптотическом режиме ( $z > l_d$ ) окончательно получим

$$P \approx \sqrt{\left( 1 - \frac{\theta^4}{4} + \theta^2(\theta^2)_\infty \right) \exp \left[ -\frac{2}{l_d} \left( \frac{l_a}{l_{dep}} \right) z \right] + \frac{\theta^4}{4} - 2\theta^2(\theta^2)_\infty}. \quad (44)$$

Из выражений (40), (44) следует, что длина разрушения поляризации

$$l_{circ} = l_d l_{dep} / l_a \quad (45)$$

намного превышает глубину  $l_d$ , на которой происходит переход к асимптотическому режиму распространения.

Согласно (40), (44), в области «купола» углового распределения света до глубин  $z \approx l_{circ}$  преобладает процесс преобразования циркулярно поляризованной компоненты в неполяризованную. Величина степени поляризации оказывается равной

$$P \approx 1 - z/l_{circ}. \tag{46}$$

На «крыльях» распределения деполяризация циркулярно поляризованной компоненты частично компенсируется возникновением линейно поляризованного света и степень поляризации определяется следующим выражением:

$$P \approx 1 - \frac{z}{l_{circ}} - \frac{1}{2} \theta^2 \langle \theta^2 \rangle_{\infty}. \tag{47}$$

С ростом  $z$  ( $z > l_{circ}$ ) циркулярно поляризованная компонента исчезает и степень поляризации совпадает с аналогичной величиной для первоначально неполяризованного пучка,  $P \approx P_{un}$ .

#### 4. СИЛЬНЫЕ РАССЕЙВАТЕЛИ ( $a|n - 1| > \lambda$ )

Рассмотрим многократное рассеяние циркулярно поляризованного света в среде, состоящей из прозрачных ( $a \operatorname{Im} n \ll \lambda$ ) сфер большого радиуса ( $a(n - 1) > \lambda$ ). Такая ситуация достаточно просто реализуется в эксперименте [3, 4, 23–25].

В области углов, превышающих угол дифракции ( $\gamma \gg \lambda/a$ ), дифференциальные сечения  $a_i(\cos \gamma)$ ,  $b_i(\cos \gamma)$  могут быть представлены в виде разложения по числу столкновений лучей с поверхностью рассеивателя [13]:

$$a_1(\cos \gamma) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left[ |A_{\parallel}^{(j)}(\cos \gamma)|^2 + |A_{\perp}^{(j)}(\cos \gamma)|^2 \right], \tag{48}$$

$$b_1(\cos \gamma) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left[ |A_{\parallel}^{(j)}(\cos \gamma)|^2 - |A_{\perp}^{(j)}(\cos \gamma)|^2 \right],$$

$$\begin{aligned} a_2(\cos \gamma) &= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 A_{\parallel}^{(j)}(\cos \gamma) A_{\perp}^{(j)*}(\cos \gamma) = \\ &= a_1(\cos \gamma) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left| A_{\parallel}^{(j)}(\cos \gamma) - A_{\perp}^{(j)}(\cos \gamma) \right|^2, \end{aligned} \tag{49}$$

$$b_2(\cos \gamma) = \operatorname{Im} \sum_{j=1}^3 A_{\parallel}^{(j)}(\cos \gamma) A_{\perp}^{(j)*}(\cos \gamma). \tag{50}$$

Разложения (48)–(50) получены в пренебрежении интерференцией между лучами, испытывавшими разное число отражений.

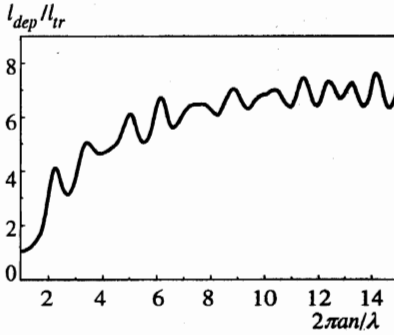


Рис. 2. Зависимость  $l_{dep}/l_{tr}$  от радиуса рассеивателей (частицы латекса в воде,  $n - 1 = 0.2$ ,  $\lambda$  — длина волны света в вакууме)

Амплитуды  $A_{\parallel, \perp}^{(j)}$  обусловлены соответственно лучами, отклонившимися в результате зеркального отражения ( $j = 1$ ), прошедшими сквозь рассеиватель ( $j = 2$ ) и испытавшими одно дополнительное внутреннее отражение ( $j = 3$ ). При углах рассеяния  $\gamma \ll \sqrt{n-1}$  в величинах  $a_1$ ,  $a_2$  и  $b_1$  доминируют слагаемые с  $j = 2$ , а при  $\gamma \geq 2\sqrt{2(n-1)}$  эти члены тождественно обращаются в нуль. Слагаемые с  $j = 1, 3$  важны при  $\gamma > \gamma_{cr} = 2\sqrt{2(n-1)}$ . Выражения для  $a_1$  и  $b_1$  в соответствующих угловых интервалах приведены, например, в [9]. Сечение деполяризации (ср. с (9)) определяется в общем случае формулой

$$\frac{d\sigma_{dep}}{dn} = \frac{1}{2} |A_{\parallel} - A_{\perp}|^2 \quad (51)$$

и с учетом (48)–(50) может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{d\sigma_{dep}}{dn} = \frac{\sigma(n-1)^2}{16\pi} \begin{cases} 1, & \gamma < \sqrt{n-1}, \\ 2, & \gamma > \sqrt{n-1}. \end{cases} \quad (52)$$

Нижнее равенство в (52) справедливо вплоть до  $\gamma \leq \pi$ . Используя (52), для полного сечения деполяризации  $\sigma_{dep}$  находим

$$\sigma_{dep} = \frac{\sigma_{tr}}{3 \ln [1/(n-1)]}, \quad (53)$$

где

$$\sigma_{tr} = \frac{3}{2} \sigma(n-1)^2 \ln \frac{1}{n-1} \quad (54)$$

— транспортное сечение в неборновском случае [9]. Длина свободного пробега относительно деполяризующего столкновения, как и для борновских рассеивателей (см. (14)), оказывается больше транспортной длины,  $l_{dep}/l_{tr} \sim \ln[1/(n-1)^3] \gg 1$ .

В качестве иллюстрации на рис. 2 приведена рассчитанная на основе точных формул Ми [13] зависимость отношения  $l_{dep}/l_{tr}$  от размеров рассеивающих частиц. Вычисления проведены для частиц латекса в воде. Это наиболее часто используемая в экспериментах по многократному рассеянию света неупорядоченная среда [4, 26].

Относительно величины сечения  $b_2$  (50) можно сказать следующее. Известно [27], что для  $j = 2, 3$  в отсутствие поглощения справедливо равенство

$$\text{Im } A_{\parallel}^{(2,3)} A_{\perp}^{(2,3)*} = 0. \quad (55)$$

Что касается вклада  $\text{Im } A_{\parallel}^{(1)} A_{\perp}^{(1)*}$ , соответствующего зеркально отраженным лучам [13, 27], то его можно записать в виде

$$\text{Im } A_{\parallel}^{(1)} A_{\perp}^{(1)*} = \frac{a^2}{4} \sin(\delta_{\parallel} - \delta_{\perp}), \quad (56)$$

где  $\delta_{\parallel, \perp}$  — сдвиги фаз поляризованных параллельно и перпендикулярно плоскости падения световых волн при френелевском отражении от поверхности частицы. В отсутствие поглощения разность фаз  $\delta_{\perp} - \delta_{\parallel}$  равна нулю, если речь идет об отражении от оптически более плотных ( $n > 1$ ), чем окружающая среда, рассеивателей. Поэтому сечение  $b_2$  в этом случае также обращается в нуль,  $b_2 = 0$ .

Рассмотрим распространение света через неупорядоченную систему прозрачных рассеивателей, помещенных в сильно ( $l_a < l_{tr}$ ) поглощающую среду. Предполагаем, что  $n > 1$ . В этих условиях третий параметр Стокса, как и для борновских рассеивателей, тождественно равен нулю,  $U \equiv 0$ . Параметр  $V$  подчиняется уравнению (8) с сечением деполяризации (52). Схема решения уравнения (8) остается прежней (см. предыдущий раздел). Однако детальная картина многократного рассеяния усложняется.

В области углов, где поглощение не влияет на форму углового распределения ( $\theta < \sqrt{l_a/z}$ ) [9] первая итерация в уравнении (15) дает

$$\tilde{V}(z, \mu) \approx \tilde{I}_{scal}(z, \mu) - n_0 \int_0^z dz' \int d\mathbf{n}' \tilde{G}(z - z' | \mathbf{n}, \mathbf{n}') \int d\mathbf{n}'' \frac{d\sigma_{dep}(\mathbf{n}' \mathbf{n}'')}{d\mathbf{n}''} \tilde{I}_{scal}(z', \mu''). \quad (57)$$

При  $z < l/(n-1) \ln[1/(n-1)]$  характерный угол многократного рассеяния

$$\theta_z = \sqrt{(z/l)(n-1)^2 \ln(z/l)} \quad (58)$$

не превышает угла полного внутреннего отражения  $\gamma_{cr}$ :  $\theta_z < \gamma_{cr} = 2\sqrt{2(n-1)}$  [27]. Учитывая, что характерный масштаб интегрирования по  $\mathbf{n}'$ ,  $\mathbf{n}''$  по порядку величины равен  $\theta_z$ , и используя равенство (52), получим для  $\tilde{V}$  следующую формулу:

$$\tilde{V}(z, \theta) = \begin{cases} \tilde{I}_{scal}(z, \theta) - z(n-1)^2/16\pi l, & \theta < \gamma_{cr}, \\ \tilde{I}_{scal}(z, \theta) - z(n-1)^2/8\pi l, & \gamma_{cr} < \theta < \sqrt{l_a/z}. \end{cases} \quad (59)$$

Входящая в (59) величина  $\tilde{I}_{scal}(z, \theta)$  равна [9]

$$\tilde{I}_{scal}(z, \theta) = \begin{cases} \frac{l}{2\pi z(n-1)^2 \ln(z/l)}, & \theta < \theta_z, \\ \frac{2z(n-1)^2}{\pi\theta^4 l} \left[ 1 + \frac{8z(n-1)^2}{\theta^2 l} \ln \frac{\theta^2}{(n-1)^2} \right], & \theta_z < \theta < \gamma_{cr}, \\ \frac{z(n-1)^2}{\pi\theta^4 l} \left[ 1 + \frac{4z(n-1)^2}{\theta^2 l} \ln \frac{\theta^2}{(n-1)^3} \right], & \gamma_{cr} < \theta < \sqrt{\frac{l_a}{z}}. \end{cases} \quad (60)$$

При  $z > l/(n-1) \ln(1/(n-1))$  для величины  $\theta_z$  имеем [9]

$$\theta_z = \sqrt{\frac{z}{l} (n-1)^2 \ln \left( \frac{z}{l} \frac{1}{n-1} \right)}. \quad (61)$$

В данном случае характерные размеры области углов  $\Delta\theta \sim \theta_z$ , которая дает основной вклад в интегралы по  $\mathbf{n}'$ ,  $\mathbf{n}''$  в (57), превышают критический угол  $\gamma_{cr}$ . Поэтому для сечения  $d\sigma_{dep}/dn$  можно использовать его асимптотику при больших ( $\gamma > \gamma_{cr}$ ) углах (см. (52)). В результате находим

$$\tilde{V}(z, \theta) = \tilde{I}_{scat}(z, \theta) - \frac{z(n-1)^2}{8\pi l}, \quad (62)$$

где

$$\tilde{I}_{scat}(z, \theta) = \begin{cases} \frac{l}{\pi z(n-1)^2 \ln[(z/l)/(n-1)]}, & \theta < \theta_z, \\ \frac{z(n-1)^2}{\pi \theta^4 l} \left[ 1 + \frac{4z(n-1)^2}{\theta^2 l} \ln \frac{\theta^2}{(n-1)^3} \right], & \theta_z < \theta < \sqrt{\frac{l_a}{z}}. \end{cases} \quad (63)$$

Для вычисления степени поляризации (21) воспользуемся полученными в [9] результатами для значения степени поляризации неполяризованного пучка  $P_{un}$ . На относительно малых глубинах  $z < l/[(n-1)\ln[1/(n-1)]]$

$$P_{un} = \begin{cases} \frac{\theta^2}{8 \ln(z/l)}, & \theta < \theta_z, \\ \frac{\theta^2}{4} \left[ 1 - \frac{8z(n-1)^2}{\theta^2 l} \ln \frac{\theta^2}{(n-1)^2} \right], & \theta_z < \theta < \gamma_{cr}, \\ -\frac{\theta^2}{2} \left[ 1 - \frac{4z(n-1)^2}{\theta^2 l} \ln \frac{\theta^2}{(n-1)^3} \right], & \gamma_{cr} < \theta < \sqrt{\frac{l_a}{z}}. \end{cases} \quad (64)$$

С ростом  $z$  ( $z > l/[(n-1)\ln[1/(n-1)]]$ ) значение  $P_{un}$  под «куполом» углового распределения ( $\theta < \theta_z$ ) становится равным [9]

$$P_{un} = \frac{\theta^2}{4 \ln[(z/l)/(n-1)]}. \quad (65)$$

На «крыльях» ( $\theta > \theta_z$ ) значение  $P_{un}$  будет определяться последним равенством в формуле (64).

Воспользовавшись полученными результатами, находим, что в области предельно малых углов ( $\theta < \theta_z$ ) изменение поляризации света, как и в случае борновских рассеивателей, обусловлено деполяризацией циркулярно поляризованной компоненты (т.е. затуханием спиральности). При  $\theta < \theta_z$  имеем

$$P = \begin{cases} 1 - \frac{\theta_z^4}{2 \ln(z/l)}, & z < \frac{l}{(n-1) \ln[1/(n-1)]}, \\ 1 - \frac{\theta_z^4}{2 \ln[(z/l)/(n-1)]}, & z > \frac{l}{(n-1) \ln[1/(n-1)]}. \end{cases} \quad (66)$$

Угловая зависимость параметров Стокса на «крыльях» ( $\theta > \theta_z$ ) углового распределения рассеянного света в главном по малому параметру  $\theta_z/\theta$  приближении совпадает с законом однократного рассеяния [13]. Удерживая следующие члены разложения параметров Стокса по обратным степеням угла рассеяния, находим, что степень поляризации в области углов  $\theta > \theta_z$  убывает по закону

$$P \approx \begin{cases} 1 - \frac{z(n-1)}{2l} \theta^2 \ln \frac{\theta}{n-1}, & \theta < \gamma_{cr}, \\ 1 - \frac{z(n-1)^2}{2l} \theta^2 \ln \frac{\theta^2}{(n-1)^3}, & \gamma_{cr} < \theta < \sqrt{\frac{l_a}{z}}. \end{cases} \quad (67)$$

Влияние поглощения на значение  $\tilde{V}$  при относительно больших углах рассеяния,  $\theta > \sqrt{l_a/z}$ , удобно проанализировать тем же способом, что и в случае борновских рассеивателей. Представим  $\tilde{V}$  в виде, аналогичном (31):

$$\begin{aligned} \tilde{V}(z, \mu) = & -\frac{n_0}{\mu} \int_0^z dz' \exp\left(-\frac{n_0 \sigma_a (z-z')(1-\mu)}{\mu}\right) \times \\ & \times \int d\mathbf{n}' \frac{d\sigma_{dep}(\mathbf{nn}')}{d\mathbf{n}'} \tilde{V}(z', \mu') + \tilde{v}(z, \mu). \end{aligned} \quad (68)$$

Подставляя теперь (68) в (8) и учитывая тот факт, что в интересующей нас области «крыльев» ( $\theta > \sqrt{l_a/z} > \gamma_{cr}$ ) справедливо соотношение (см. (52))

$$\int d\mathbf{n}' \frac{d\sigma_{dep}(\mathbf{nn}')}{d\mathbf{n}'} \tilde{V}(z, \mu') \approx \frac{\sigma(n-1)^2}{8\pi} \tilde{E}^{(V)}(z), \quad (69)$$

перейдем в получающемся уравнении для  $\tilde{v}(z, \mu)$  к малоугловому приближению<sup>1)</sup>. В итоге для функции  $\tilde{v}(z, \theta)$  придем к уравнению, совпадающему с уравнением (32), в коэффициентах которого надо только положить  $\gamma_0 = n-1$ . Поэтому для величин  $\tilde{V}(z, \theta)$  и  $P(z, \theta)$  в главном по малому параметру  $\sigma(n-1)^2/\sigma_a \ll 1$  приближении остаются справедливыми выражениями (33), (35).

На небольших глубинах  $z < l_d$ , где в случае сильных рассеивателей  $l_d$  равно

$$l_d = \left( \sqrt{\frac{(n-1)^2}{2l_a l} \ln \sqrt{\frac{l_a}{l(n-1)^4}}} \right)^{-1}, \quad (70)$$

$\tilde{E}^{(V)}(z) \approx \tilde{E}(z) \approx 1$  и степень поляризации с ростом  $z$  убывает по закону (36), в котором значение среднего квадрата угла многократного рассеяния  $\langle \theta^2 \rangle_z$  следует положить равным

$$\langle \theta^2 \rangle_z = 2 \frac{z}{l} (n-1)^2 \begin{cases} \ln \frac{\gamma_{cr} \sqrt{l_a/z}}{\theta_z^2}, & z < \frac{l}{(n-1) \ln[1/(n-1)]}, \\ \ln \frac{\sqrt{l_a/z}}{\theta_z}, & z > \frac{l}{(n-1) \ln[1/(n-1)]}. \end{cases} \quad (71)$$

В (71) характерный угол  $\theta_z$  определяется формулами (58) и (61).

На больших глубинах ( $z > l_d$ ) при выполнении условия  $l < l_a < l_{tr}$  ширина углового распределения излучения всегда превышает  $\gamma_{cr}$ . Поэтому качественная картина

<sup>1)</sup> Использование приближенного равенства (69) вносит ошибку порядка  $\gamma_{cr}/\theta \ll 1$ .



эволюции поляризационных характеристик многократно рассеяного света на этих глубинах оказывается нечувствительной к особенностям в сечениях одноцентрового рассеяния при  $\gamma = \gamma_{cr}$  и такой же, как и в случае борновских рассеивателей. В частности, степень поляризации по-прежнему описывается соотношениями (40), (42). Все изменения касаются только величин  $l_d$  (70) и  $\langle \theta^2 \rangle_\infty = 2l_a/l_d$ , в значения которых дают дополнительный вклад лучи, дважды пересекающие границу отдельных рассеивателей.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем итог полученным в работе результатам.

Как показано выше, решение задачи о распространении циркулярно поляризованного света в неупорядоченной среде сводится к анализу уравнения для параметра Стокса  $V$ , которое по виду совпадает со скалярным уравнением переноса для интенсивности. Отличие заключается только в наличии в уравнении дополнительного — ответственного за процесс деполяризации — слагаемого.

Присутствие деполяризующего члена в уравнении для  $V$ , с одной стороны, увеличивает по сравнению с интенсивностью затухание параметра  $V$  с глубиной, а с другой, влияет на его зависимость от угла рассеяния. В связи с тем что параметр Стокса  $V$  с ростом  $z$  затухает быстрее интенсивности, циркулярно поляризованный свет деполяризуется. При малоугловом рассеянии света в случайных средах с крупными (размером больше длины волны) частицами дополнительное слагаемое оказывается малым и поэтому деполяризация света должна происходить очень медленно. В условиях сильного поглощения, когда многократное рассеяние при любых  $z$  носит малоугловой характер, деполяризация происходит на аномально больших глубинах ( $z \sim l_{circ} \gg l_a, l_{tr}$ ) уже после перехода к асимптотическому режиму распространения излучения.

Сказанное находится в согласии с обнаруженным недавно эффектом «сохранения» циркулярной поляризации при диффузии света в средах с крупными неоднородностями [4, 28]. Как показано в [4, 28], циркулярная поляризация может сохраняться даже после изотропизации потока излучения. Скорость деполяризации зависит только от того, насколько плавными являются траектории распространения волн, и при рассеянии на крупномасштабных неоднородностях оказывается пропорциональной среднему от четвертой степени угла однократного рассеяния (в отличие от пропорциональной второй степени угла скорости изотропизации  $1/l_{tr}$ ). Поэтому измерения деполяризации поляризованного по кругу света могут дать новую информацию о среде, отличающуюся от той, что содержится в обычном распределении излучения по углам.

В соответствии с полученными выше результатами, значение степени поляризации многократно рассеянного света определяется, с одной стороны, процессом деполяризации циркулярно поляризованного излучения, а с другой — возникновением линейно поляризованной составляющей при рассеянии уже деполяризованных волн. При однократном рассеянии эти процессы в точности компенсируют друг друга и поэтому степень поляризации остается равной единице ( $P = 1$ ). Уменьшение  $P$  возникает только при многократном рассеянии.

Пока циркулярно поляризованная компонента не затухла ( $z < l_{circ}$ ), в области небольших углов ( $\theta < \theta_z$ ) вклад линейной компоненты остается малым и величина  $P$  определяется только уменьшением спиральности излучения (см. (23), (46), (66)). На «крыльях» углового распределения ( $\theta > \theta_z$ ) вклад линейно поляризованного све-

та становится, напротив, очень важным. В этой области углов отличие  $P$  от единицы обусловлено отличием степени поляризации первоначально неполяризованного пучка  $P_{un}$  от ее значения в приближении однократного рассеяния,  $P_{un}^{(s)} = -\theta^2/2$  (см. (24), (36), (47), (67)).

С ростом  $z$  ( $z > l_{circ}$ ) циркулярно поляризованная компонента затухает и значение степени поляризации  $P$  во всей области углов совпадает с  $P_{un}$ .

При распространении света в системе достаточно крупных частиц ( $n-1 > \lambda/a$ ) возникают эффекты, обусловленные «неборновским» одноцентровым рассеянием. Наиболее заметными эти эффекты оказываются на сравнительно небольших глубинах, на которых ширина углового распределения еще не превышает значения критического угла рассеяния на одном центре ( $\gamma_{cr} = 2\sqrt{2(n-1)}$ ). Угловой масштаб  $\gamma_{cr}$  в этом случае проявляется в угловых зависимостях как интенсивности, так и степени поляризации излучения.

Рассмотренные в работе явления могут представлять интерес для оптических исследований структурных неоднородностей многократно рассеивающих сред.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-02-17518).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Для величины

$$\tilde{v}(p, \omega) = 2\pi \int_0^\infty dz \exp(-pz) \int_0^\infty \theta d\theta J_0(\omega\theta) \tilde{v}(z, \theta)$$

из (32) нетрудно получить уравнение

$$\begin{aligned} & \left[ p + n_0\sigma(1 - \chi(\omega)) - \frac{1}{2}n_0\sigma_a\Delta_\omega \right] \tilde{v}(p, \omega) = \\ & = 1 + \left( \frac{\sigma_{dep}}{\sigma_a} \right) n_0\sigma(1 - \chi(\omega))K_0 \left( \omega\sqrt{\frac{2p}{n_0\sigma_a}} \right) \tilde{E}^{(V)}(p), \end{aligned} \tag{A.1}$$

где  $J_0(x)$  и  $K_0(x)$  — функции Бесселя и Макдональда нулевого порядка [18], величина  $\chi(\omega)$  определяется соотношением (18),

$$\begin{aligned} \Delta_\omega &= \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \frac{\partial}{\partial \omega}, \\ \tilde{E}^{(V)}(p) &= \int_0^\infty \exp(-pz) \tilde{E}^{(V)}(z). \end{aligned}$$

Нас будут интересовать значения функции  $\tilde{v}(z, \theta)$  при относительно больших углах. Согласно [9, 19], «крылья» угловой зависимости  $\tilde{v}(z, \theta)$  определяются поведением функции  $\tilde{v}(p, \omega)$  при малых  $\omega$ . В этой области для величины  $\chi(\omega)$  справедливо второе равенство (18), а для  $K_0(\omega\sqrt{2p/\sigma_a})$  можно воспользоваться приближенной формулой [18]

$$K_0 \left( \omega\sqrt{\frac{2p}{n_0\sigma_a}} \right) \approx -\ln \left( \omega\sqrt{\frac{2p}{n_0\sigma_a}} \right). \tag{A.2}$$

Как показывает анализ, при вычислении функции  $\tilde{v}(p, \omega)$  в области малых  $\omega$  удобно логарифмы в формулах (18) и (A.2) представить в виде пределов степенных выражений:

$$\chi(\omega) \approx 1 - \frac{(\omega\gamma_0)^2}{2(\alpha - 4)} [1 - (\omega\gamma_0)^{\alpha-4}],$$

$$K_0 \left( \omega \sqrt{\frac{2p}{n_0\sigma_a}} \right) \approx \frac{1}{\beta - 2} \left[ 1 - \left( \omega \sqrt{\frac{2p}{n_0\sigma_a}} \right)^{\beta-2} \right] \quad (\text{A.3})$$

соответственно при  $\alpha \rightarrow 4$  и  $\beta \rightarrow 2$ . Тогда значение функции  $\tilde{v}(p, \omega)$  при малых  $\omega$  можно искать в виде следующего разложения по степеням  $\omega$  (см., например, [19]):

$$\tilde{v}(p, \omega) = \tilde{v}(p, \omega = 0) (1 + c_2\omega^2 + c_\alpha\omega^\alpha + c_4\omega^4 + c_{\beta+2}\omega^{\beta+2} + c_{\alpha+\beta-2}\omega^{\alpha+\beta-2} + \dots). \quad (\text{A.4})$$

Если теперь подставить (A.3) и (A.4) в уравнение (A.1) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $\omega$ , то можно найти интересующие нас величины  $c_i$ . В частности, значения коэффициентов  $c_\alpha$ ,  $c_{\beta+2}$ ,  $c_{\alpha+\beta-2}$  при неаналитических степенях  $\omega$ , которые дают вклад в разложение  $\tilde{v}$  по обратным степеням угла рассеяния, определяются выражениями

$$c_\alpha = \frac{2(\gamma_0/2)^{\alpha-4}}{\sigma_a \alpha^2 (\alpha - 4)} \left[ \frac{\sigma_{tr}}{2 \ln(2/\gamma_0)} - \frac{\sigma_{tr}\sigma_{dep}}{\sigma_a \ln(2/\gamma_0)} \frac{\tilde{E}^{(V)}(p)}{\tilde{v}(p, \omega = 0)(\beta - 2)} \right],$$

$$c_{\beta+2} = - \frac{\sigma_{tr}\sigma_{dep}}{\sigma_a^2 \ln(2/\gamma_0)} \frac{\tilde{E}^{(V)}(p)}{\tilde{v}(p, \omega = 0)(\beta - 2)(4 - \alpha)(\beta + 2)^2}, \quad (\text{A.5})$$

$$c_{\alpha+\beta-2} = \frac{\sigma_{tr}\sigma_{dep}}{\sigma_a^2 \ln(2/\gamma_0)} \frac{\tilde{E}^{(V)}(p)}{\tilde{v}(p, \omega = 0)(\beta - 2)(4 - \alpha)(\alpha + \beta - 2)^2} \left( \frac{\gamma_0}{2} \right)^{\alpha-4} \left( \frac{2p}{n_0\sigma_a} \right)^{\beta/2-1}$$

Используя результаты (A.5) и выполняя в (A.4) обратное преобразование Бесселя, а затем предельный переход  $\alpha \rightarrow 4$ ,  $\beta \rightarrow 2$ , получим для  $\tilde{v}(p, \theta)$  следующее выражение:

$$\tilde{v}(p, \theta) \approx \frac{2\sigma_{tr}}{\pi\sigma_a \ln(2/\gamma_0)} \left[ \tilde{v}(p, \omega = 0) \left( \frac{1}{\theta^6} + \dots \right) \right] -$$

$$- \frac{\sigma_{dep}}{\sigma_a} \tilde{E}^{(V)}(p) \left[ \frac{1}{\theta^6} \ln \left( \frac{\theta^2}{\gamma_0} \sqrt{\frac{n_0\sigma_a}{2p}} \right) + \dots \right]. \quad (\text{A.6})$$

Полученный результат представляет собой разложение, с одной стороны, по степеням  $1/\theta$ , а с другой — по степеням  $\sigma_{dep}/\sigma_a$ .

В главном приближении можно пренебречь в (A.6) слагаемыми, имеющими дополнительную малость порядка  $\sigma_{dep}/\sigma_a$ . С той же точностью справедливо равенство  $\tilde{E}^{(V)}(p) = \tilde{v}(p, \omega = 0)$  (вклад в интеграл по направлениям от первого слагаемого в правой части (31) имеет порядок  $\sigma_{dep}/\sigma_a$ ). В итоге для  $\tilde{v}(z, \theta)$  получаем выражение

$$\tilde{v}(z, \theta) \approx \frac{\tilde{E}^{(V)}(z)}{\tilde{E}(z)} \tilde{I}_{scal}(z, \theta), \quad (\text{A.7})$$

где  $\tilde{I}_{scal}(z, \theta)$  определяется разложением (25).

Теперь для нахождения  $\tilde{V}(z, \theta)$  заметим, что первое слагаемое в правой части выражения (31) в малоугловом приближении при  $\theta > \sqrt{l_a/z}$  можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} & -\frac{n_0\sigma_{dep}}{4\pi} \int_0^z dz' \exp\left(-\frac{n_0\sigma_a(z-z')\theta^2}{2}\right) \tilde{E}^{(V)}(z') \approx \\ & \approx -\frac{n_0\sigma_{dep}\tilde{E}^{(V)}(z)}{2\pi\theta^2} \left[1 - \frac{1}{\theta^2} \frac{2}{n_0\sigma_a\tilde{E}^{(V)}(z)} \frac{d\tilde{E}^{(V)}(z)}{dz}\right] + \dots \end{aligned} \quad (A.8)$$

Второе слагаемое в (A8) перепишем, используя равенство [19]

$$\langle \theta^2 \rangle_z = -\frac{2}{n_0\sigma_a\tilde{E}^{(V)}(z)} \frac{d\tilde{E}^{(V)}(z)}{dz}. \quad (A.9)$$

Подставляя далее соотношения (A.7), (A.8) в выражение (31), получим формулу (33).

### ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Значение четвертого параметра Стокса в асимптотическом ( $z > l_d$ ) режиме можно вычислить следующим образом.

В пренебрежении рассеянием назад (это оправдано в условиях сильного поглощения,  $l_a < l_{tr} < l_{dep}$ ) решение уравнения (6) (или (8)), удовлетворяющее граничному условию (3), можно разложить по собственным функциям  $\psi_n^{(V)}$  отвечающей уравнению (6) спектральной задачи:

$$\tilde{V}(z, \mu) = \sum_n^{\infty} \psi_n^{(V)}(\mu = 1) \psi_n^{(V)}(\mu) \exp(-\varepsilon_n^{(V)} z), \quad (B.1)$$

где  $\varepsilon_n^{(V)}$  — соответствующие собственные значения. При больших  $z$  в сумме остается только одно слагаемое с наименьшим затуханием:

$$\tilde{V}(z, \mu) = \psi_0^{(V)}(\mu = 1) \psi_0^{(V)}(\mu) \exp(-\varepsilon_0^{(V)} z). \quad (B.2)$$

В условиях редких деполаризующих столкновений, когда длина  $l_{dep}$  является максимальной из характерных длин, значения  $\varepsilon_0^{(V)}$  и  $\psi_0^{(V)}(\mu)$  можно найти по теории возмущений, считая известным решение спектральной задачи для интенсивности и рассматривая последний член в уравнении (8) как возмущение.

Согласно [29], формулы для  $\varepsilon_0^{(V)}$  и  $\psi_0^{(V)}(\mu)$  в первом порядке теории возмущений должны выглядеть так:

$$\varepsilon_0^{(V)} \approx \varepsilon_0 + \int dn \int dn' \frac{d\sigma_{dep}(n, n')}{dn} \psi_0(\mu) \psi_0(\mu'), \quad (B.3)$$

$$\psi_0^{(V)}(\mu) \approx \psi_0(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(\mu)}{\varepsilon_0 - \varepsilon_n} \int dn' \int dn'' \frac{d\sigma_{dep}(n', n'')}{dn'} \psi_0(\mu') \psi_n(\mu''), \quad (B.4)$$

где  $\varepsilon_n$  и  $\psi_n(\mu)$  — собственные значения и собственные функции скалярного уравнения переноса для интенсивности (т. е. уравнения (8) без последнего слагаемого). Наименьшее собственное значение определяет величину  $l_d$  ( $\varepsilon_0 = l_d^{-1}$ ).

Соотношение (Б.4) можно записать в более компактном виде, если воспользоваться функцией Грина скалярного уравнения переноса:

$$\begin{aligned} \psi_0^{(V)}(\mu) \approx & \psi_0(\mu) + \int_0^\infty dz \int d\mathbf{n}' \int d\mathbf{n}'' \exp(\varepsilon_0 z) [\tilde{G}(z|\mathbf{n}, \mathbf{n}') - \\ & - \psi_0(\mu)\psi_0(\mu') \exp(-\varepsilon_0 z)] \frac{d\sigma_{dep}(\mathbf{n}'\mathbf{n}'')}{d\mathbf{n}'} \psi_0(\mu''). \end{aligned} \quad (\text{Б.5})$$

Вычисления по формулам (Б.3), (Б.5) можно выполнить, основываясь на результатах [9] для  $\varepsilon_0$ ,  $\psi_0$  и  $\tilde{G}$ , полученных в самосогласованном малоугловом диффузионном приближении, и на предположении об изотропной угловой зависимости сечения  $d\sigma_{dep}/d\mathbf{n}$ . В приближении [9]

$$\psi_0(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi \langle \theta^2 \rangle_\infty}} \exp\left(-\frac{\theta^2}{\langle \theta^2 \rangle_\infty}\right), \quad (\text{Б.6})$$

$$\int d\theta' G(z|\theta, \theta') \approx \frac{1}{\text{ch}(\varepsilon_0 z)} \exp\left(-\frac{\theta^2}{\langle \theta^2 \rangle_\infty} \text{th}(\varepsilon_0 z)\right), \quad (\text{Б.7})$$

а  $\varepsilon_0$  определяется формулами (28), (70). В частности, в интервале  $l_a < z < l_d$  из (Б.7) следует

$$\int d\theta' G(z|\theta, \theta') \approx \exp\left(-\frac{\theta^2 \sigma_a z}{2}\right), \quad l_a < z < l_d. \quad (\text{Б.8})$$

Соотношение (Б.8) наглядно иллюстрирует эффект сужения распределения по углам в поглощающей среде. При  $z > l_a$  интенсивность от изотропного источника (Б.8) дают вклад только фотоны, распространяющиеся под малыми углами к оси  $z$ , и угловое распределение оказывается сосредоточенным в области  $\theta < \sqrt{l_a/z}$ .

Подставляя (Б.6) и (Б.7) в (Б.5), приходим к соотношениям (38) и (39).

Угловую зависимость  $\tilde{V}(z, \mu)$  в асимптотическом режиме при относительно больших углах отклонения ( $\theta > \sqrt{\langle \theta^2 \rangle_\infty}$ ) проще всего найти, не прибегая к формуле (Б.5) (или (Б.4)), а воспользовавшись непосредственно разложением (33) по обратным степеням  $\theta$ .

## Литература

1. F. C. MacKintosh, J. X. Zhu, D. J. Pine, and D. A. Weitz, *Phys. Rev. B* **40**, 9342 (1989).
2. R. Jullien and R. Botet, *J. de Phys.* **38**, 208 (1989).
3. C. E. Mandt and L. Tsang, *J. Opt. Soc. Amer. A* **9**, 2246 (1992).
4. D. Bicoût, C. Brosseau, A. S. Martinez, and J. M. Schmitt, *Phys. Rev. E* **49**, 1767 (1994).
5. *Diffusing Photons in Turbid Media (special issue)*, *Appl. Opt.* **36**, 9 (1997).
6. В. Л. Кузьмин, В. П. Романов, *УФН* **166**, 247 (1996).
7. S. G. Demos and R. R. Alfano, *Opt. Lett.* **21**, 161 (1996).
8. В. В. Тучин, *УФН* **167**, 517 (1997).
9. Е. Е. Городничев, Д. Б. Рогозкин, *ЖЭТФ* **107**, 209 (1995).
10. Л. С. Долин, *ДАН СССР* **260**, 1344 (1980).
11. В. С. Ремизович, Д. Б. Рогозкин, М. И. Рязанов, *Изв. вузов. Радиофизика* **24**, 891 (1982).
12. Н. С. van der Hulst, *Multiple Light Scattering*, Academic Press, New York (1980).
13. Р. Ньютон, *Теория рассеяния волн и частиц*, Мир, Москва (1969).

14. А. Исимару, *Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах*, Т. 1, 2, Мир, Москва (1981).
15. В. С. Ремизович, ЖЭТФ **87**, 506 (1984).
16. Н. А. Bethe, Phys. Rev. **89**, 1256 (1953).
17. С. В. Малеев, Б. П. Топерверг, ЖЭТФ **78**, 315 (1980).
18. *Справочник по специальным функциям*, под ред. М. Абрамовица и И. Стиган, Наука, Москва (1979).
19. Е. Е. Gorodnichev, A. I. Kuzovlev, and D. B. Rogozkin, Laser Phys. **6**, 1188 (1996).
20. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1989).
21. Ю. М. Гнедин, А. З. Долгинов, Н. А. Силантьев, ЖЭТФ **57**, 988 (1969).
22. К. Кейз, П. Цвайфель, *Линейная теория переноса*, Мир, Москва (1972).
23. D. Elyahu, M. Rosenbluch, and I. Freund, J. Opt. Soc. Amer. A **10**, 477 (1993).
24. Y. Kuga and A. Ishimaru, Appl. Opt. **28**, 2165 (1989).
25. K. M. Yoo, L. Feng, and R. R. Alfano, Phys. Rev. Lett. **64**, 2647 (1990).
26. M. P. van Albada, M. V. van der Mark, and A. Lagendjik, Phys. Rev. Lett. **58**, 361 (1987).
27. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
28. Е. Е. Городничев, А. И. Кузовлев, Д. Б. Рогозкин, Письма в ЖЭТФ **68**, 21 (1998).
29. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1988).