ЖЭТФ, 1999, том 115, вып. 3, стр. 865–876 ©1999

КОЛЛЕКТИВНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В СПИН-ПОЛЯРИЗОВАННЫХ БОЛЬЦМАНОВСКИХ ГАЗАХ

*Т. Л. Андреева, П. Л. Рубин**

Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
117942, Москва, Россия

Поступила в редакцию 15 октября 1998 г.

В результате исследования реального интеграла столкновений парамагнитных атомов получен критерий распространения спиновых волн в поляризованном больцмановском газе. Показано, что основной причиной появления слабозатухающих спиновых волн является резкая анизотропия амплитуды рассеяния атомов с преобладанием рассеяния вперед. Этот критерий не совпадает с принятым в литературе. Из него следует, что круг парамагнитных газов, в которых могут распространяться слабозатухающие спиновые волны при комнатной температуре, значительно шире, чем это считалось ранее. Примером могут служить пары щелочных металлов (Na, Cs, Rb), в которых можно получить высокую степень поляризации электронного спина.

1. ВВЕДЕНИЕ

В газах, подчиняющихся больцмановской статистике, в отсутствие внешних электрических и магнитных полей единственной распространяющейся коллективной модой является звуковая волна. Впервые на возможность коллективных спиновых осцилляций в парамагнитном газе указал Силин [1]. В 1977 г. Аронов [2] рассмотрел спин-волновые колебания электронного газа в полупроводниках. Однако широкий интерес к вопросу о возможности распространения спиновых волн в газах возник в 80-х годах после работы Башкина [3]. В этой работе было предсказано существование слабозатухающих спиновых волн в спин-поляризованных больцмановских газах и определены условия их существования. Критерий существования новой коллективной моды в спин-поляризованном газе сводился к условию «квантовости» газа: средняя дебройлевская длина волны Λ значительно превышает радиус взаимодействия атомов r_0.

Несмотря на значительное количество работ, посвященных динамике и кинетике спин-поляризованных газов (см., например, [4] и имеющиеся там ссылки), критерий существования спиновых волн не изменился, хотя вывод его был основан на чисто качественных соображениях [5]. Необходимо отметить, что этот критерий налагает довольно жесткое ограничение на температуру газа, поскольку большинство газов конденсируется значительно раньше, чем начинает выполняться указанный критерий. По этой причине единственными кандидатами оказались спин-поляризованный водород $H\uparrow$ и $^3He\uparrow$. В этих двух газах существование спиновых волн было подтверждено экспериментально, хотя волны и не являются слабозатухающими [6, 7]. Подчеркнем, что в данном случае речь идет о ядерном спине.

---

*E-mail: rubin@sci.lebedev.ru

В настоящей работе критерий распространения спиновых волн в поляризованном больцмановском газе получен на основе детального исследования интеграла столкновений. Показано, что основной величиной, определяющей распространение спиновых волн в больцмановских парамагнитных газах, является вещественная часть амплитуды обменного рассеяния на нулевой угол, причем в обычных газах, где рассеяние атомов носит квазиклассический характер и резко анизотропно, ситуация оказывается более благоприятной, чем в «квантовых», где рассеяние практически изотропно (s-рассеяние) [8]. Полученный критерий не совпадает с принятым в литературе [3–6]. Из него следует значительное расширение круга парамагнитных газов, в которых могут распространяться слабозатухающие спиновые волны при температурах близких к комнатной. Примером могут служить пары щелочных металлов (Na, Cs, Rb), в которых можно получить высокую степень поляризации электронного спина [9].

2. ИНТЕГРАЛ СТОЛКНОВЕНИЙ В БОЛЬЦМАНОВСКОМ СПИН-ПОЛЯРИЗОВАННОМ ГАЗЕ

В настоящей работе используется интеграл столкновений, полученный ранее в [10, 11]. Рассматриваемая система спиновых подуровней в отсутствие магнитного поля имеет вырождение по энергии. В подобных случаях интеграл столкновений [11] совпадает с интегралом Вальдмана—Снайдера [10]. Тем не менее, поскольку в нашей предыдущей работе [11] содержатся опечатки, мы приведем вначале общее выражение для интеграла столкновений St для произвольных, не обязательно вырожденных систем:

$$\mathrm{St}_{\alpha\alpha'}(p) = -i\left[I_{\alpha\alpha'}(p) - I^*_{\alpha'\alpha}(p)\right];$$

$$\begin{aligned} I_{\alpha\alpha'}(p) = (2\pi)^3\hbar^2 \Bigg\{ &\int dp_1\, T_{\alpha\lambda\theta\sigma}\left(\frac{p-p_1}{2}, \frac{p-p_1}{2}\right) \exp\left(i\frac{\mathscr{E}_{\alpha'\lambda\theta\sigma}t}{\hbar}\right) f_{\sigma\lambda}(p_1) f_{\theta\alpha'}(p) + \\ &+ \int dp'dp'_1dp_1\, \delta(p+p_1-p'-p'_1)\exp\left(i\frac{\mathscr{E}_{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4}t}{\hbar}\right) \times \\ &\times \frac{T_{\alpha\lambda\tau_3\tau_4}\left((p-p_1)/2, (p'-p'_1)/2\right) T^*_{\alpha'\lambda\tau_1\tau_2}\left((p-p_1)/2, (p'-p'_1)/2\right)}{(p-p_1)^2/4m-(p'-p'_1)^2/4m+\mathscr{E}_{\tau_1\tau_2\alpha'\lambda}-i0} f_{\tau_3\tau_1}(p') f_{\tau_4\tau_2}(p'_1) \Bigg\}. \end{aligned}$$

Здесь p — импульс, m — масса, нижние индексы — квантовые числа внутреннего состояния частицы; $\hat{f}(p)$ — матрица Вигнера; $\widehat{T}$ — T-матрица рассеяния и, наконец,

$$\mathscr{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} = E_\alpha + E_\beta - E_\gamma - E_\delta$$

($E_\alpha, E_\beta, \ldots$ — энергии внутреннего состояния частиц).

В настоящей работе рассматривается случай полного вырождения по энергии внутреннего (спинового) состояния частиц: $\mathscr{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$. В этом случае интеграл столкновений принимает вид (ср. [10])

$$\begin{aligned} \mathrm{St}_{\alpha\alpha'}(p) = -i(2\pi)^3\hbar^2 \int dp_1\, \Bigg[&T_{\alpha\lambda\theta\sigma}\left(\frac{p-p_1}{2}, \frac{p-p_1}{2}\right) f_{\sigma\lambda}(p_1) f_{\theta\alpha'}(p) - \\ &- T^*_{\alpha'\lambda\theta\sigma}\left(\frac{p-p_1}{2}, \frac{p-p_1}{2}\right) f_{\lambda\sigma}(p_1) f_{\alpha\theta}(p) \Bigg] + \end{aligned}$$

$$+ (2\pi)^4\hbar^2 \int dp' dp'_1 dp_1\, \delta(p + p_1 - p' - p'_1)\delta\left(\frac{(p-p_1)^2}{4m} - \frac{(p'-p'_1)^2}{4m}\right) \times$$
$$\times\, T_{\alpha\lambda\tau_3\tau_4}\left(\frac{p-p_1}{2}, \frac{p'-p'_1}{2}\right) T^*_{\alpha'\lambda\tau_1\tau_2}\left(\frac{p-p_1}{2}, \frac{p'-p'_1}{2}\right) f_{\tau_3\tau_1}(p') f_{\tau_4\tau_2}(p'_1). \qquad (1)$$

Здесь учтена эрмитовость матрицы Вигнера.

Для исследования малых возмущений будем использовать линеаризованный интеграл столкновений, в котором матрица Вигнера имеет вид

$$f_{\alpha\alpha'}(p) = \frac{1}{2} f^{(0)}(p)\, [C_{\alpha\alpha'} + \varphi_{\alpha\alpha'}(p)]\,. \qquad (2)$$

Здесь $f^{(0)}(p)$ — равновесная максвелловская функция распределения по импульсам, $C_{\alpha\alpha'}$ — постоянный $(\alpha\alpha')$-тензор, $\varphi_{\alpha\alpha'}(p)$ — малое возмущение функции Вигнера. При отсутствии дополнительных законов сохранения равновесная функция диагональна по внутренним квантовым числам, т. е. должно быть $C_{\alpha\alpha'} = \delta_{\alpha\alpha'}$. Но это не так, если такие законы сохранения имеют место хотя бы в достаточно хорошем приближении (в рассматриваемом случае речь идет о полном спине системы).

Линеаризованный оператор столкновений (1) принимает вид

$$J(\varphi_{\alpha\alpha'}) = -i(2\pi)^3\hbar^2 \int dp_1 f^{(0)}(p) f^{(0)}(p_1) \times$$
$$\times \left\{ \left[C_{\theta\alpha'} T_{\alpha\lambda\theta\sigma}\left(\frac{p-p_1}{2}, \frac{p-p_1}{2}\right)\varphi_{\sigma\lambda}(p_1) - C_{\alpha\theta} T^*_{\alpha'\lambda\theta\sigma}\left(\frac{p-p_1}{2}, \frac{p-p_1}{2}\right)\varphi_{\lambda\sigma}(p_1)\right] + \right.$$
$$\left. + \left[C_{\sigma\lambda} T_{\alpha\lambda\theta\sigma}\left(\frac{p-p_1}{2}, \frac{p-p_1}{2}\right)\varphi_{\theta\alpha'}(p) - C_{\lambda\sigma} T^*_{\alpha'\lambda\theta\sigma}\left(\frac{p-p_1}{2}, \frac{p-p_1}{2}\right)\varphi_{\alpha\theta}(p)\right]\right\} +$$
$$+ (2\pi)^4\hbar^2 \int dp' dp'_1 dp_1\, \delta(p + p_1 - p' - p'_1)\delta\left(\frac{(p-p_1)^2}{4m} - \frac{(p'-p'_1)^2}{4m}\right) \times$$
$$\times\, f^{(0)}(p) f^{(0)}(p_1) T_{\alpha\lambda\tau_3\tau_4}\left(\frac{p-p_1}{2}, \frac{p'-p'_1}{2}\right) T^*_{\alpha'\lambda\tau_1\tau_2}\left(\frac{p-p_1}{2}, \frac{p'-p'_1}{2}\right) \times$$
$$\times \left[C_{\tau_4\tau_2}\varphi_{\tau_3\tau_1}(p') + C_{\tau_3\tau_1}\varphi_{\tau_4\tau_2}(p'_1)\right]. \qquad (3)$$

В (3) использовано соотношение [12] $f^{(0)}(p) f^{(0)}(p_1) = f^{(0)}(p') f^{(0)}(p'_1)$ для равновесных функций распределения; подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

В дальнейшем рассматривается поляризованный газ со спином 1/2. В настоящее время такие газы хорошо известны и активно исследуются как теоретически, так и экспериментально [6, 7, 13]. В случае тождественных частиц со спином 1/2 T-матрица имеет вид

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta\mu\nu}(P, P') &= \hat{A}[t(P, P')\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} + \theta(P, P')\sigma_{\alpha\mu}\sigma_{\beta\nu}] = \\ &= t(P, P')\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - t(-P, P')\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} + \\ &+ \theta(P, P')\sigma_{\alpha\mu}\sigma_{\beta\nu} - \theta(-P, P')\sigma_{\alpha\nu}\sigma_{\beta\mu}, \end{aligned} \qquad (4)$$

где P и P' — относительные импульсы сталкивающихся частиц (отнесенные к приведенной массе $m/2$), $\hat{A}$ означает антисимметризацию по перестановкам частиц (падающих и рассеянных), произведение матриц Паули — это скалярное произведение $\sigma^{(j)}_{\alpha\mu}\sigma^{(j)}_{\beta\nu}$.

Коэффициенты t и θ должны удовлетворять следующим свойствам симметрии, связанным с тождественностью частиц и инвариантностью взаимодействия по отношению к обращению времени:

$$
\begin{aligned}
t(P, P') &= t(-P, -P') = t(P', P), \\
\theta(P, P') &= \theta(-P, -P') = \theta(P', P).
\end{aligned} \tag{5}
$$

Такая форма записи означает, что рассматриваются столкновения, в которых полный спин частиц сохраняется. Это приближение является достаточно хорошим, особенно если речь идет о ядерном спине.

Тензор C для случая поляризованного газа имеет вид

$$
C = 1 + M\sigma \text{ или } C_{\alpha\alpha'} = \delta_{\alpha\alpha'} + M\sigma_{\alpha\alpha'}, \tag{6}
$$

M характеризует постоянную (наведенную) спиновую поляризацию газа. Малое возмущение матрицы Вигнера теперь удобно разложить на скалярную φ и векторную μ части:

$$
\phi_{\alpha\alpha'}(p) = \frac{1}{2} f^{(0)}(p) \left[\varphi(p)\delta_{\alpha\alpha'} + \mu(p)\sigma_{\alpha\alpha'}\right]. \tag{7}
$$

Подставляя формулы (7) и (12) в (3), получим следующее выражение для линеаризованного оператора столкновений, описывающего поляризованный газ:

$$
\begin{aligned}
J(\varphi\delta_{\alpha\alpha'} + \mu^l\sigma^l_{\alpha\alpha'}) = 32\pi^4\hbar^2 \int dp' dp_1 dp_1' W(p, p_1|p', p_1') \times \\
\times \Big\{ \delta_{\alpha\alpha'} A_0 \left[\varphi(p') + \varphi(p_1') - \varphi(p) - \varphi(p_1)\right] + \\
+\sigma_{\alpha\alpha'} \left[A_1\, \mu(p_1') + A_2\, \mu(p') - A_3\, \mu(p_1) - A_0\, \mu(p)\right] + \\
+\delta_{\alpha\alpha'} A_3 M \left[\mu(p') + \mu(p_1') - \mu(p) - \mu(p_1)\right] + \\
+\sigma^3_{\alpha\alpha'} |M| \left[A_1\, \varphi(p') + A_2\, \varphi(p_1') - A_0\, \varphi(p_1) - A_3\, \varphi(p)\right] - \\
-A_4 \Big[[\mu(p_1'), M, \sigma_{\alpha\alpha'}] - [\mu(p'), M, \sigma_{\alpha\alpha'}] \Big] \Big\} + \\
+16\pi^3\hbar^2 \int dp_1 f^{(0)}(p) f^{(0)}(p_1) \operatorname{Re}\left[t_1\left(\frac{p-p_1}{2}, \frac{p-p_1}{2}\right) - t_2\left(\frac{p-p_1}{2}, \frac{p-p_1}{2}\right)\right] \times \\
\times \Big[[\mu(p_1), M, \sigma_{\alpha\alpha'}] - [\mu(p), M, \sigma_{\alpha\alpha'}] \Big].
\end{aligned} \tag{8}
$$

Здесь

$$
W(p, p_1|p', p_1') = f^{(0)}(p_1)\delta(p + p_1 - p' - p_1')\delta\left((p - p_1)^2/4m - (p' - p_1')^2/4m\right);
$$

коэффициенты A_n суть

$$
\begin{aligned}
A_0 &= (|t_1|^2 + |t_2|^2 + |t_1 - t_2|^2)/2 = |t_1|^2 + |t_2|^2 - \operatorname{Re}(t_1 t_2^*), \\
A_1 &= |t_1|^2 - \operatorname{Re}(t_1 t_2^*), \qquad A_2 = \operatorname{Re}(t_1 t_2^*), \\
A_3 &= (|t_1|^2 - |t_2|^2 - |t_1 - t_2|^2)/2 = \operatorname{Re}(t_1 t_2^*) - |t_2|^2, \\
A_4 &= \operatorname{Im}(t_1 t_2^*),
\end{aligned} \tag{9}
$$

где величины t_1 и t_2 следующим образом связаны с элементами T-матрицы (см. (4)):

$$t_1(P,P') = t(P,P') - t(-P,P') + \theta(P,P') - \theta(-P,P'),$$

$$t_2(P,P') = t(P,P') - \theta(P,P') - 2\theta(-P,P'),$$

$P = (p - p_1)/2$; $P' = (p' - p_1')/2$. Выражения в квадратных скобках (вида $[a,b,c]$) означают смешанное векторно-скалярное произведение трех векторов.

При выводе формулы (8) использовалась оптическая теорема [14]. Отметим, что последний интеграл в правой части (8) линеен по амплитуде рассеяния на нулевой угол, в то время как все остальные члены квадратичны по амплитуде рассеяния.

3. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПОПЕРЕЧНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ МАГНИТНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ В СПИН-ПОЛЯРИЗОВАННОМ ГАЗЕ

Рассмотрим сначала поперечную (по отношению к оси z) составляющую магнитной поляризации газа. Удобно использовать следующие комбинации величин μ_x и μ_y:

$$\mu_\pm = \mu_x \pm i\mu_y.$$

Кинетическое уравнение для величин $\mu_\pm$ получается из полного уравнения (8):

$$-i\omega\mu_\pm(p) + ikv\mu_\pm(p) = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\left\{(\sigma^x \pm i\sigma^y)J(p)\right\} = J_\pm(\mu_\pm), \tag{10}$$

где $v = p/m$, $J_\pm$ — соответствующие проекции интеграла столкновений. Здесь сразу выполнен переход к пространственно-временным компонентам Фурье матрицы Вигнера: $\mu = \mu(\omega,k)$; ω и k — частота и волновой вектор соответственно.

Интеграл столкновений $J_\pm(\mu_\pm)$ теперь имеет вид

$$\begin{aligned} J_\pm(\mu_\pm) = 32\pi^4\hbar^2 \int dp'dp_1dp_1' W(p,p_1|p',p_1') \times \\ \times\Big\{[A_1\mu_\pm(p_1') + A_2\mu_\pm(p') - A_3\mu_\pm(p_1) - A_0\mu_\pm(p)] \pm \\ \pm 2i|M|A_4[\mu_\pm(p_1') - \mu_\pm(p')]\Big\} \mp 16i|M|\pi^3\hbar^2 \int dp_1 f^{(0)}(p_1) \times \\ \times \mathrm{Re}\left[t_1\left(\frac{p-p_1}{2},\frac{p-p_1}{2}\right) - t_2\left(\frac{p-p_1}{2},\frac{p-p_1}{2}\right)\right]\left[\mu_\pm(p) - \mu_\pm(p_1)\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Операторы $J_\pm$ можно представить в виде суммы

$$J_\pm = Q_R \pm i|M|Q_I \mp i|M|L_I. \tag{12}$$

Здесь Q_R и Q_I — квадратичные по T-матрице (амплитуде рассеяния) интегральные операторы, структура которых имеет тот же характер, что и в обычном уравнении Больцмана. Следует ожидать, что собственные значения операторов Q_R и Q_I в случае электронного спина — величины одного порядка: $\nu_s \simeq n\bar{v}\sigma$, где σ — газокинетическое сечение столкновений, $\bar{v}$ — средняя тепловая скорость атомов. Так, для атома цезия обменное сечение совпадает по порядку величины с газокинетическим [15], и, значит, все коэффициенты A имеют один порядок величины.

Структура оператора L_I существенно иная:

$$L_I(\mu_\pm) = 16\pi^3\hbar^2 \int dp_1 f^{(0)}(p_1)\,\mathrm{Re}\left\{T_{ex}\left(\frac{p-p_1}{2}, \frac{p-p_1}{2}\right)[\mu_\pm(p) - \mu_\pm(p_1)]\right\}. \tag{13}$$

Здесь T_{ex} — T-матрица спин-обменного рассеяния ($\uparrow\downarrow\rightarrow\downarrow\uparrow$):

$$T_{ex}(P,P') = t_1(P,P') - t_2(P,P') = 2\theta(P,P') + \theta(-P,P') - t(-P,P'),$$

P и P' — относительные импульсы сталкивающихся частиц, отнесенные к приведенной массе атомов $m/2$.

Из свойств симметрии T-матрицы (5) следует, что все три оператора — Q_R, Q_I и L_I — эрмитовы в гильбертовом пространстве функций импульса p с обычным для кинетической теории газов скалярным произведением [16]:

$$\langle\mu_1|\mu_2\rangle = \frac{1}{n}\int f^{(0)}(p)\mu_1^*(p)\mu_2(p)\,dp,$$

где $n = \int f^{(0)}(p)\,dp$ — пространственная плотность числа частиц. Таким образом, операторы J_+ и J_- оказываются взаимно эрмитово-сопряженными.

Нетрудно убедиться, что функция $\mu \equiv 1$ обращает интеграл столкновений (11) в нуль и, тем самым, является его собственной функцией с нулевым собственным значением. Физически это объясняется сохранением полного спина частиц, что вытекает из принятого вида T-матрицы (4). Аналогичным образом и по той же причине функция $\mu_z \equiv 1$ обращает в нуль скалярную часть общего интеграла столкновений (8), о чем подробнее речь пойдет дальше. Ввиду взаимной сопряженности операторов J_+ и J_- функция $\mu \equiv 1$ является одновременно правой и левой собственной функцией обоих операторов. Таким образом, собственный проектор, отвечающий нулевому собственному значению, одинаков для обоих операторов, ортогонален и имеет вид (в дираковских обозначениях)

$$P = |1\rangle\langle 1|. \tag{14}$$

Здесь $|1\rangle$ — функция, тождественно равная единице.

Функция $|1\rangle$ должна быть единственной собственной функцией с нулевым собственным значением операторов J_+ и J_-, что означает отсутствие других законов сохранения в μ-подпространстве. Последнее предположение отнюдь не противоречит наличию других законов сохранения. Далее будет показано, что функции p (p_x, p_y, p_z) и $p^2/4m$ наряду с константой являются собственными функциями с нулевым собственным значением диагональных элементов интеграла столкновений (8), что является следствием законов сохранения импульса, энергии и числа частиц.

4. ДИНАМИКА ПОПЕРЕЧНОЙ СПИНОВОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ

Уравнение (10) математически представляет собой задачу о собственных значениях операторов $J_\pm - ik\hat{v}$ ($\hat{v}$ — умножение на величину скорости, рассматриваемое как оператор). При малых k ($|kv| \ll \nu$, где ν — параметр порядка газокинетической частоты столкновений) задача о собственных значениях (11) может быть решена с помощью теории возмущений по отношению к оператору $ik\hat{v}$, т. е. в гидродинамическом приближении [16]. В рассматриваемом случае, как уже упоминалось, предполагается наличие только одной собственной функции $\mu = 1$ оператора J с нулевым собственным значением. Из формул (10) и (11) следует, что поправка первого порядка для оператора $ik\hat{v}$ равна нулю.

Поправка второго порядка в данном случае может быть записана так:

$$-i\omega_{\pm} = k^2 \langle 1|\hat{v}J_{\pm}^{-1}\hat{v}|1\rangle. \tag{15}$$

Здесь под $J_{\pm}^{-1}$ подразумевается обратный $J_{\pm}$ оператор на подпространстве $(1-P)L$ (в исходном пространстве L оператор $J_{\pm}$ необратим, поскольку обладает нулевым собственным значением).

Рассмотрим сначала неполяризованный газ, $M = 0$. В этом случае $J_+ = J_- = Q_R$. Собственные значения Q_R и Q_R^{-1} вещественны, и частота оказывается чисто мнимой. Таким образом, мы имеем дело просто со спиновой диффузией. Как обычно [16], в этой ситуации оказывается возможным дать лишь оценку соответствующего коэффициента диффузии:

$$D_s = \langle 1|\hat{v}Q_R^{-1}\hat{v}|1\rangle. \tag{16}$$

По порядку величины $D_s \sim \bar{v}^2/3\nu_s$. Здесь $\bar{v}$ — средняя тепловая скорость атомов, а $1/\nu_s$ — характерное собственное значение оператора Q_R^{-1}. При этом, как нетрудно убедиться (см. (8) и (13)), коэффициент диффузии в общем случае D_s не совпадает с обычным коэффициентом диффузии, поскольку соответствующие эффективные частоты столкновений различны.

В поляризованном газе ситуация существенным образом иная. Пусть $|M| \sim 1$ (требование положительной определенности матрицы плотности приводит к условию $0 \le |M| \le 1$, а при оптической поляризации парамагнитного газа естественным образом достигается значение $|M|$, близкое к единице). Теперь операторы $J_{\pm}$ практически сводятся к третьему слагаемому в правой части формулы (12), а первые два оператора можно рассматривать как малую поправку.

Чтобы убедиться в этом, проведем оценку вещественной части амплитуды обменного рассеяния на нулевой угол: $\mathrm{Re}[T_{ex}(0)]$. Из общей формулы для T-матрицы [14] следует, что основной вклад в матрицу рассеяния быстрых атомов на нулевой угол вносит борновский член, поскольку в нем полностью компенсируются осцилляции множителя $\exp(ikx)$, описывающего падающую волну ($k = p/\hbar$ — волновой вектор атома). При комнатной температуре (а на самом деле и при более низких температурах) для обмена электронным спином с большим запасом выполняется соотношение $|k|a_0 \gg 1$, где a_0 — эффективный радиус взаимодействия. Последнее неравенство как раз и означает, что атомы являются быстрыми. Таким образом, характерное собственное значение ν_{ex} оператора L_I пропорционально борновской амплитуде рассеяния на нулевой угол

$$A(0) = -\frac{m}{4\pi\hbar^2}\int U\, d^3x \simeq -\frac{m}{4\pi\hbar^2}|U|a_0^3$$

(U — потенциал обменного взаимодействия).

Теперь нетрудно оценить отношение ν_{ex}/ν_s:

$$\frac{\nu_{ex}}{\nu_s} \sim |M| \frac{|U| a_0}{\hbar \bar{v}}. \tag{17}$$

Отметим, что правая часть этого равенства с точностью до множителя $|M|$ представляет собой так называемый «борновский параметр» [8], который в классических (неквантовых) газах обычно велик. Ниже в качестве примера будет приведена численная оценка борновского параметра для атомов цезия.

Итак, в первом приближении по (обратному) борновскому параметру уравнение (10) можно представить в виде

$$(kv - \omega)\mu_\pm(p) = \mp 16|M|\pi^3\hbar^2 \int dp_1 f^{(0)}(p_1) \operatorname{Re} T_{ex}(0)[\mu_\pm(p) - \mu_\pm(p_1)]. \tag{18}$$

Это уравнение снова можно рассматривать по схеме теории возмущений, как мы поступили ранее. Однако здесь для оценки будет использован другой способ. Для упрощения задачи предположим, что $T_{ex} = \text{const}$, т. е. не зависит от энергии. Тогда

$$(kv - \omega)\mu_\pm(p) = \mp \nu_{ex} \left[\mu_\pm(p) - \frac{1}{n} \int dp_1 f^{(0)}(p_1) \mu_\pm(p_1)\right]$$

(на этот раз $\nu_{ex} = 16|M|\pi^3\hbar^2 n \operatorname{Re} T_{ex}$).

В гидродинамическом приближении ($|k\bar{v}/\nu_{ex}| \ll 1$, $|\omega/\nu_{ex}| \ll 1$) получается следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega = \pm \frac{k^2 \bar{v}^2}{3\nu_{ex}}. \tag{19}$$

Это уравнение описывает незатухающую волну спиновой поляризации. Диффузионное затухание волны Г — эффект следующего порядка по обратному борновскому параметру ν_s/ν_{ex}. Оценка величины Г имеет вид

$$\Gamma \sim \frac{k^2 \bar{v}^2}{\nu_{ex}} \frac{\nu_s}{\nu_{ex}} \ll \omega. \tag{20}$$

Таким образом, в парамагнитном поляризованном больцмановском газе могут распространяться слабозатухающие спиновые волны, частота и затухание которых оцениваются по формулам (19), (20). Отметим, что диффузионное затухание спиновой волны Г в поляризованном газе (20) меньше соответствующей величины в неполяризованном газе (16) в $(\nu_s/\nu_{ex})^2$ раз.

В качестве примера рассмотрим параметры спиновых волн в пара́х поляризованного цезия, для которого имеются необходимые экспериментальные данные. Во-первых, согласно [15], электронная спиновая поляризация в пара́х цезия с хорошей точностью сохраняется: отношение сечений столкновений с несохранением спина и спинового обмена приблизительно равно 1%. Эффективный радиус взаимодействия имеет величину $a_0 \sim 10^{-7}$ см. [15, 17]. В качестве оценки величины $|U|$ примем удвоенную энергию связи молекулы Cs_2: $|U| \sim 1$ эВ [18]. Тогда борновский параметр при средней тепловой скорости атомов цезия $\bar{v} = 2 \cdot 10^4$ см/с оказывается порядка 10^3. Такая большая величина борновского параметра тесно связана с выраженной анизотропией индикатриссы рассеяния быстрых частиц [8]. Отметим, что зависимость этого параметра от температуры сводится главным образом к соответствующей зависимости $\bar{v} \propto \sqrt{T}$. Поэтому борновский параметр приближается к единице лишь при температурах менее 10^{-4}–10^{-3} К.

Отношение частоты спиновой волны к ее затуханию согласно (19), (20) составляет

$$\omega/\Gamma \sim 10^3\,|M|.$$

В частности, отсюда следует, что с увеличением $|M|$ сужение возрастает. Следует иметь в виду, что эта оценка, вообще говоря, может потребовать уточнения с учетом фактического несохранения спина.

Таким образом, условие распространения спиновых волн в поляризованном больцмановском газе определяется двумя факторами: сохранением спина, т. е. медленностью его разрушения в столкновениях, и резкой анизотропией индикатриссы рассеяния атомов при комнатной температуре. Как известно, в этом случае рассеяние в основном происходит на малые углы в диапазоне $(|k|a_0)^{-1}$ (где $|k| = m\bar{v}/\hbar$). Для цезия при комнатной температуре соответствующий диапазон углов составляет $\simeq 10^{-3}$. Отметим, что, согласно ранее принятому критерию $\Lambda/r_0 \gg 1$ (см. выше), слабозатухающие спиновые волны в парах цезия при комнатной температуре распространяться не должны, поскольку $\Lambda/r_0 \sim 10^{-3}$.

Для наблюдения спиновых волн в парах щелочных металлов помимо метода магнитного резонанса [19] можно использовать метод рассеяния света вблизи резонансных D-линий атомов. При наличии спиновых волн спектр флуктуаций электронной спиновой поляризации должен представлять собой хорошо разрешенный дублет с узкими компонентами [20].

5. ДИНАМИКА ПРОДОЛЬНОЙ СПИНОВОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ

В отличие от поперечной спиновой поляризации $\mu_\pm$ продольная поляризация μ_z в поляризованном газе не может рассматриваться независимо и связана со скалярной составляющей функции Вигнера φ (с плотностью газа). Интеграл столкновений теперь дается первыми четырьмя слагаемыми общего интеграла столкновений (8). В число инвариантов столкновений в данном случае помимо пяти обычных величин — числа частиц, трех компонент импульса и энергии — входит еще и продольная компонента спина. Им соответствуют шесть собственных функций интеграла столкновений с нулевым собственным значением. Рассматриваемое пространство функций состоит из пар коэффициентов при единичной матрице и z-матрице Паули соответственно. Вычисление правильных функций нулевого приближения (диагонализация относительно оператора $ik\hat{v}$) приведено в Приложении.

Среди шести перечисленных выше мод единственной распространяющейся (в первом порядке теории возмущений по оператору $ik\hat{v}$) является только звуковая мода, причем скорость звука $u_s = \sqrt{5T/3m}$ не зависит от степени поляризации газа. Отметим, что поправка к скорости звука, зависящая от поляризации, возникает только в третьем порядке по оператору $ik\hat{v}$. При этом имеется в виду классический газ без учета вириальных поправок [5]. Собственные функции поперечных (сдвиговых) мод не зависят от степени поляризации газа, в то время как все остальные — звуковая, мода теплопроводности и спиновая — от M зависят.

Нашей целью не является точное вычисление поправок второго порядка, определяющих затухание перечисленных мод, поскольку для этого требуются конкретные данные о характере взаимодействия частиц. Отметим только некоторые качественные особенности поправок второго порядка по оператору $ik\hat{v}$. В отличие от случая поперечных мод, теперь все эти поправки γ — величины одного порядка. При малых M имеет место соотношение $\gamma \sim \gamma_0 + \gamma_1 M^2$. Здесь γ_0 — величина затухания в неполяризованном газе, и обе величины (γ_0 и γ_1) имеют порядок газокинетической частоты столкновений. Подчеркнем, что в данном случае ситуация существенно отличается от той, что имела место для поперечной спиновой моды, где затухание в поляризованном газе существенно меньше, чем в неполяризованном (см. (17)–(20)). Именно это обстоятельство привело к возможности распространения слабозатухающей спиновой волны.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-02-17312-а).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь приведены результаты диагонализации оператора $ik\hat{v}$ в базисе нулевых собственных функций оператора столкновений (8). При этом недиагональные (поперечные) элементы матрицы Вигнера исключены из рассмотрения, поскольку динамика продольных и поперечных составляющих спина может рассматриваться независимо друг от друга.

Оператор столкновений эрмитов относительно скалярного произведения:

$$\langle [a(p), b(p)] | [c(p), d(p)] \rangle =$$

$$= (2\pi m T)^{-3/2} \int \big(a(p)c(p) + b(p)d(p)\big) \exp\left(-\frac{p^2}{2mT}\right) d^3p.$$

Здесь исходное линейное пространство состоит из пар $[a(p), b(p)]$ диагональных матричных элементов матрицы Вигнера. Они являются коэффициентами при единичной матрице и z-матрице Паули соответственно. Весовым множителем служит нормированная равновесная функция распределения по импульсам.

Исходное нулевое подпространство состоит из шести ортонормированных пар функций, отвечающих следующим законам сохранения:

$$f_1 = [1, 0] \qquad \text{(число частиц)},$$

$$\left.\begin{aligned} f_2 &= [p_x/\sqrt{mT}, 0], \\ f_3 &= [p_y/\sqrt{mT}, 0], \\ f_4 &= [p_z, Mp_z]/\sqrt{(1+M^2)mT} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(импульс)},$$

$$f_5 = [p^2, Mp^2]/mT\sqrt{3(1+M^2)} \qquad \text{(энергия)},$$

$$f_6 = [0, 1] \qquad (z\text{-компонента спина}).$$

Диагонализация матрицы возмущения $ikv = ikp/m$ в этом базисе приводит к следующим правильным функциям нулевого приближения:

$$f_s^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2(1+M^2)}} \times$$

$$\times\left[\frac{p_z}{\sqrt{mT}}+\frac{1}{\sqrt{15}}\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{mT},\frac{M}{\sqrt{15}}\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2+p_z\sqrt{15mT}}{mT}\right],$$

$$f_s^{(-)}=\frac{1}{\sqrt{2(1+M^2)}}\times$$

$$\times\left[-\frac{p_z}{\sqrt{mT}}+\frac{1}{\sqrt{15}}\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{mT},\frac{M}{\sqrt{15}}\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2-p_z\sqrt{15mT}}{mT}\right],$$

$$f_v^{(x)}=[p_x/\sqrt{mT},0],$$

$$f_v^{(y)}=[p_y/\sqrt{mT},0],$$

$$f_t=\frac{1}{mT\sqrt{2(2M^2+5)(1+M^2)}}\times$$

$$\times[p_z+p_x^2+p_y^2+p_z^2-5mT-2M^2mT, M(p_z+p_x^2+p_y^2+p_z^2-3mT)],$$

$$f_m=[-M/\sqrt{(1+M^2)},1].$$

Первые две моды — $f_s^{(+)}$ и $f_s^{(-)}$ — описывают распространение звука в одноатомном газе. Моды $f_x^{(-)}$ и $f_y^{(-)}$ описывают вязкостное затухание поперечной скорости и не зависят от поляризации газа. Мода f_t описывает распространение тепла в поляризованном газе и, вообще говоря, зависит от степени поляризации газа. И наконец, f_m описывает продольную магнитную поляризацию.

Литература

1. В. П. Силин, ЖЭТФ **6**, 945 (1957).
2. А. Г. Аронов, ЖЭТФ **73**, 577 (1977).
3. Е. П. Башкин, Письма в ЖЭТФ **33**, 11 (1981).
4. A. E. Meyerovich, S. Stepaniants, and F. Laloë, Phys. Rev. B **52**, 6808 (1995).
5. Е. П. Башкин, УФН **148**, 433 (1986).
6. B. R. Johnson, J. S. Den'ker, N. Bigelow et al., Phys. Rev. Lett. **52**, 1508; **53**, 302 (1984).
7. N. Bigelow, P. J. Nacher, and M. Leduc, J. de Phys. II **2**, 2159 (1992).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, Москва (1989).
9. R. J. Knize, Phys. Rev. A **40**, 6219 (1989).
10. R. F. Snider, J. Chem. Phys. **32**, 1051 (1960).
11. Т. Л. Андреева, П. Л. Рубин, ЖЭТФ **111**, 831 (1997).
12. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979).
13. A. E. Meyerovich, J. H. Naish, J. R. Owers-Braley, and S. Stepaniants, Low Temp. Phys. **23**, 553 (1997)
14. М. Гольдбергер, К. Ватсон, *Теория столкновений*, Мир, Москва (1967).

15. N. D. Bhaskar, J. Pietras, J. Camparo et al., Phys. Rev. Lett. **44**, 930 (1980).
16. Р. Балеску, *Равновесная и неравновесная статистическая механика*, Мир, Москва (1978). П. Резибуа, М. Де Ленер, *Классическая кинетическая теория жидкостей и газов*, Мир, Москва (1980).
17. А. А. Радциг, Б. М. Смирнов, *Справочник по атомной и молекулярной физике*, Атомиздат, Москва (1980).
18. W. Happer, Rev. Mod. Phys. **44**, 169 (1972).
19. L.-J. Wey, N. Kalenchofsky, and D. Candela, Phys. Rev. Lett. **71**, 879 (1993).
20. Т. Л. Андреева, П. Л. Рубин, Е. А. Юков, ЖЭТФ **107**, 1160 (1995).