ЖЭТФ, 1999, том 115, вып. 3, стр. 894–919 © 1999

ЧЕРЕНКОВСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВИХРЕЙ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Е. А. Кузнецов, В. П. Рубан*

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
117334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 23 сентября 1998 г.

На основе канонического формализма рассматривается задача о взаимодействии вихревых нитей в идеальной несжимаемой жидкости с ее свободной поверхностью. Дана гамильтоновская формулировка уравнений движения в терминах канонических и неканонических скобок Пуассона. Прослежена связь между этими двумя подходами. Получены лагранжиан системы и скобки Пуассона в терминах вихревых линий, что дает возможность изучать динамику тонких вихревых нитей при учете конечности их толщины. Для двумерных течений путем перехода к конформным переменным получены точные уравнения движения, описывающие взаимодействие точечных вихрей и поверхностных волн. Найдены асимптотические стационарные решения для вихря, двигающегося со скоростью, меньшей минимальной фазовой скорости поверхностных волн. Выяснено, что за счет неоднородного эффекта Доплера возможны дискретные связанные состояния поверхностных волн над вихрем. При скоростях, больших минимальной фазовой скорости, в квазиклассическом пределе описан процесс всплытия вихря благодаря черенковскому излучению. Продемонстрирована неустойчивость вихревой нити относительно трехмерных изгибных возмущений, обусловленная взаимодействием с «изображением».

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно (см., например, [1]), течение при колебаниях водной поверхности под действием сил тяжести и капиллярного натяжения можно с высокой точностью считать потенциальным: $\mathbf{v} = \nabla\Phi$. Малая непотенциальная компонента поля скорости обязана вязкости жидкости. В пределе нулевой вязкости эта система превращается в гамильтоновскую. При этом сама форма поверхности $z = \eta(x, y, t)$ и значение потенциала на поверхности $\phi(x, y, t)$ выступают в качестве канонических переменных, так что уравнения движения записываются в виде

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\phi}, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta\eta}, \tag{1}$$

где гамильтониан H совпадает с полной энергией жидкости.

Гамильтоновская формулировка (1) уравнений движения для потенциальных течений жидкости со свободной поверхностью была дана в конце шестидесятых годов Захаровым [2, 3]. Впоследствии с помощью гамильтоновского подхода удалось изучить целый круг явлений: модуляционную неустойчивость поверхностных волн [2], нелинейную стадию развития неустойчивости Кельвина—Гельмгольца [4], формирование

* E-mail: kuznetso@itp.ac.ru

гексагонального рельефа на поверхности жидких диэлектриков в присутствии внешнего электрического поля [5], процесс образования особенностей на поверхности идеальных жидкостей [6, 7]. Важное значение в исследованиях турбулентности поверхностных волн сыграли работы [3, 8], в которых впервые была построена последовательная теория колмогоровских спектров — степенных распределений потокового типа.

В настоящее время теория турбулентности поверхностных волн — одна из наиболее продвинутых теорий (см., например, обзор [9]). Несмотря на это, в этой теории остается ряд нерешенных проблем, среди которых, пожалуй, центральной является задача о взаимодействии непотенциальных — вихревых — течений со свободной поверхностью.

По-видимому, впервые теоретически этот вопрос рассматривался Келдышем и Лаврентьевым [10], этому же посвящен параграф в книге [11]. Позже к этому вопросу обращался Новиков [12]. Во всех этих работах вычислялись потери движущимся стационарно точечным двумерным вихрем за счет возбуждения поверхностных волн. Этот процесс в [12] рассматривался в линейном приближении по амплитуде поверхностных волн в предположении, что вихрь находится достаточно глубоко от свободной поверхности. В этом случае в нулевом приближении вихрь вместе со своим отражением образует дипольную пару, двигающуюся с постоянной скоростью вдоль поверхности. Создаваемое при этом течение от вихря неоднородно вдоль поверхности. В системе координат, где вихрь покоится, течение на больших расстояниях от вихря однородно. При приближении к вихрю скорость течения на поверхности в некоторой точке изменяет свой знак, так что над вихрем скорость течения противоположна по знаку скорости на бесконечности и превышает ее значение в три раза. Отсюда становится ясным, что возбуждаемая волна за счет черенковского процесса испытывает неоднородный эффект Доплера. Следует напомнить, что черенковское излучение имеет место, если скорость распространения вихря превышает минимальную фазовую скорость поверхностных волн. В том случае, когда длина черенковской волны λ много меньше расстояния от вихря до поверхности — его глубины h, черенковское излучение, как показано в данной работе, может быть описано квазиклассически. Как известно, поверхностные волны локализованы вблизи поверхности в слое порядка длины волны, на бо́льших расстояниях скорость жидкости экспоненциально затухает. Поэтому при $\lambda \ll h$ обратное влияние излучения на вихрь будет экспоненциально малым, что позволяет эффективно использовать теорию возмущений.

Данная работа посвящена изучению нелинейного взаимодействия вихрей со свободной поверхностью. Основное внимание уделяется рассмотрению черенковского излучения поверхностных волн двигающимся точечным вихрем. Принципиальное отличие нашей работы от предшествующих состоит в учете неоднородного эффекта Доплера. Его влияние существенно не только для черенковского излучения, но также и в докритическом режиме, когда скорость распространения вихря меньше минимальной фазовой скорости волн. В этом случае возможен захват поверхностных волн и образование стационарных связанных состояний — вихря и распространяющихся вместе с ним волн. Захват волн вихрем возможен при скоростях распространения v существенно ниже минимальной фазовой скорости V_{min}. Так, например, при $\lambda \ll h$ скорость v, при которой наступает захват, доходит до величины порядка $V_{min}/3$.

Для описания процессов взаимодействия вихрей со свободной поверхностью мы используем гамильтоновский подход. В канонической [13, 14] формулировке скорость жидкости представима через переменные Клебша. Несмотря на то что такая параметризация скорости описывает частный тип течений, каноническая скобка Пуассона (выраженная через переменные Клебша) допускает пересчет к неканонической скобке, которая уже выражается в терминах скорости, потенциала на поверхности и самой формы поверхности, и главное — позволяет описать течения с произвольной топологией. Однако неканоническая скобка оказывается вырожденной. Причина этого связана с существованием специальной симметрии, образующей целую группу — группу переобозначений лагранжевых маркеров (более подробно об этом см. обзор [14]). Эта симметрия порождает все известные законы сохранения завихренности. Главным из них является закон вмороженности вихревых линий в жидкость. Этому отвечает локальный лагранжев инвариант — инвариант Коши. В нашей предыдущей работе [15] для несжимаемой идеальной жидкости в отсутствие свободной границы был предложен способ разрешения вырождения путем введения новых переменных — лагранжевых меток, нумерующих каждую вихревую линию. Как показано в разд. 2, данный подход может быть распространен на случай идеальной гидродинамики со свободной поверхностью. В частности, переход к представлению вихревых линий позволяет записать вариационный принцип и достаточно просто получить самосогласованное гамильтоновское описание системы тонких вихревых нитей, взаимодействующих со свободной поверхностью.

Для двумерной геометрии с помощью вариационного принципа и конформного отображения в полуплоскость (аналогичного [16]) в разд. 3 получены уравнения движения точечных вихрей и свободной поверхности. В следующем разделе находятся стационарные решения полученных уравнений в виде асимптотического разложения по степеням параметра Фруда F. Связанные состояния поверхностных волн обсуждаются в разд. 5. В шестом разделе в предположении $h \gg \lambda$ найдено, по какому закону происходит всплытие точечного вихря за счет черенковского излучения. Заключительный раздел посвящен изучению влияния трехмерных возмущений на динамику вихревой нити. Показано, что благодаря взаимодействию вихря со своим отображением вихревая нить испытывает неустойчивость относительно изгибных возмущений — те участки нити, которые находятся ближе всего к свободной поверхности, ускоренно к ней приближаются, а более дальние, наоборот, уходят от свободной поверхности. Эта неустойчивость аналогична неустойчивости Кроу [17] двух антипараллельных вихревых нитей. В отсутствие свободной поверхности развитие этой неустойчивости ведет к пересоединению вихревых линий и образованию вихревых колец. В данном случае следует ожидать «пересоединения» вихревой линии со своим отражением, в результате чего должен возникнуть целый ряд вихревых полуколец, начинающихся и кончающихся на поверхности жидкости. При этом процесс «пересоединения» должен сопровождаться черенковским излучением поверхностных волн.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ГАМИЛЬТОНОВСКИЙ ФОРМАЛИЗМ

Рассмотрим несжимаемую идеальную жидкость постоянной плотности ρ (в последствии будем полагать $\rho = 1$) в присутствии постоянного поля тяжести $\mathbf{g}$, антипараллельного оси z. Пусть $z = \eta(x, y, t)$ — форма свободной поверхности.

Уравнения движения жидкости — уравнения Эйлера —

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right) = -\nabla p, \ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{2}$$

дополним граничными условиями: 1) затуханием скорости ($\mathbf{v} \to 0$) на большой глубине

$z \to -\infty$, 2) динамическим условием на свободной границе:

$$p|_{z=\eta} = \sigma \,\mathrm{div}\, \frac{\nabla\eta}{\sqrt{1+(\nabla\eta)^2}}, \tag{3}$$

и кинематическим условием:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = v_n\sqrt{1+(\nabla\eta)^2} = v_z - (\mathbf{v}_\perp\nabla)\eta. \tag{4}$$

Здесь p — давление, σ — коэффициент поверхностного натяжения.

Система уравнений (2)–(4) относится к гамильтоновским. В случае чисто потенциальных течений $\mathbf{v} = \nabla\Phi$ уравнение (2) с граничными условиями (3), (4) представимо в каноническом виде (1). Для непотенциальных течений, которые могут быть параметризованы через переменные Клебша,

$$\mathbf{v} = \hat{P}\lambda\nabla\mu + \nabla\Phi, \tag{5}$$

к каноническим уравнениям (1) добавляются два уравнения для переменных λ и μ (см., например, [14, 18]):

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\mu} = -(\mathbf{v}\nabla)\,\lambda, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta\lambda} = -(\mathbf{v}\nabla)\,\mu. \tag{6}$$

Здесь гамильтониан H совпадает по величине с полной энергией жидкости:

$$H = \int\limits_{z\le\eta} \frac{\mathbf{v}^2}{2}d\mathbf{r} + \int d\mathbf{r}_\perp \left\{\frac{g\eta^2}{2} + \sigma\left[\sqrt{1+(\nabla\eta)^2} - 1\right]\right\}, \tag{7}$$

скорость $\mathbf{v}$ выражается через λ и μ с помощью (5). В формуле (5) $P_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha\Delta^{-1}\nabla_\beta$ — поперечный проектор. Оператор Δ^{-1} понимается здесь и всюду ниже в этом разделе как обратный оператор для задачи Дирихле $\Delta f = g$ с нулевыми граничными условиями:

$$f|_{z=\eta} = 0 \text{ и } f \to 0 \text{ при } z \to -\infty.$$

При таком выборе ϕ в уравнениях (1) сохраняет свое определение: это есть значение Φ на свободной поверхности, а сам потенциал Φ является гармонической функцией:

$$\Delta\Phi = 0, \quad \Phi|_{z=\eta} = \phi. \tag{8}$$

Важно, что при этом на λ и μ не накладываются никакие ограничения на свободной поверхности. Вихревые линии, которые задаются пересечением поверхностей $\lambda = \mathrm{const}$ и $\mu = \mathrm{const}$, могут быть ориентированы на поверхности $z = \eta(\mathbf{r}_\perp, t)$ произвольным образом: они могут как касаться свободной поверхности, так и выходить на нее.

Замена (5), как известно (см., например, [19]), определяет частный тип течений, в частности, она не описывает заузленных течений. Тем не менее, несмотря на частный характер этой замены, с ее помощью можно получить гамильтоновское описание для течений с произвольной топологией в терминах так называемых неканонических скобок Пуассона [20]. Впервые этот факт был продемонстрирован для течений без свободной границы [14]. Покажем, что это справедливо и для течений со свободной поверхностью. Для этого пересчитаем каноническую скобку Пуассона, задаваемую через объемные переменные (λ, μ) и поверхностные (ϕ, η),

$$\{F, G\} = \int \left(\frac{\delta F}{\delta \lambda} \frac{\delta G}{\delta \mu} - \frac{\delta G}{\delta \lambda} \frac{\delta F}{\delta \mu} \right) d\mathbf{r} + \int \left(\frac{\delta F}{\delta \eta} \frac{\delta G}{\delta \phi} - \frac{\delta G}{\delta \eta} \frac{\delta F}{\delta \phi} \right) d\mathbf{r}_\perp, \tag{9}$$

к скобке, выраженной через скорость $\mathbf{v}$ и форму поверхности. Эти вычисления основаны на пересчете вариационных производных.

Используя определение (5) и самосопряженность оператора $\hat{P}$, имеем

$$\left.\frac{\delta F}{\delta \lambda}\right|_{\mu\eta\psi} = \left(\nabla\mu, \frac{\tilde{\delta} F}{\delta \mathbf{v}} \right), \quad \left.\frac{\delta F}{\delta \mu}\right|_{\lambda\eta\psi} = \left(\nabla\lambda, \frac{\tilde{\delta} F}{\delta \mathbf{v}} \right). \tag{10}$$

Здесь

$$\frac{\tilde{\delta} F}{\delta \mathbf{v}} = \hat{P} \frac{\delta F}{\delta v},$$

так что $\operatorname{div}(\tilde{\delta} F/\delta \mathbf{v}) = 0$.

Далее вычисляем вариационную производную от ϕ:

$$\frac{\delta F}{\delta \phi}|_{\lambda\mu\eta} = \int \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \nabla \frac{\delta \phi(\mathbf{r})}{\delta \phi(\mathbf{r}_\perp)} d\mathbf{r}. \tag{11}$$

Пользуясь равенством $\Delta \delta\Phi(\mathbf{r})/\delta\phi(\mathbf{r}_\perp) = 0$, заменяем в интеграле (11) вариационную производную $\delta F/\delta \mathbf{v}$ на $\tilde{\delta} F/\delta \mathbf{v}$. Преобразуя затем интеграл к поверхностному, находим

$$\left.\frac{\delta F}{\delta \phi}\right|_{\lambda\mu\eta} = \left(\mathbf{n} \frac{\tilde{\delta} F}{\delta \mathbf{v}} \right)_{z=\eta}. \tag{12}$$

Что касается вариационной производной по η, то она остается неизменной:

$$\left.\frac{\delta F}{\delta \eta}\right|_{\lambda\mu\phi} = \left.\frac{\delta F}{\delta \eta}\right|_{v}. \tag{13}$$

Подставляя далее соотношения (10), (12), (13) в скобку (9), приходим к выражению для неканонической скобки Пуассона [21]:

$$\{F, G\} = \int \left(\operatorname{rot} \mathbf{v} \left[\frac{\tilde{\delta} F}{\delta \mathbf{v}} \times \frac{\tilde{\delta} G}{\delta \mathbf{v}} \right] \right) d\mathbf{r} + \int \left(\frac{\delta F}{\delta \eta} \left(\mathbf{n} \frac{\tilde{\delta} G}{\delta \mathbf{v}} \right) - \frac{\delta G}{\delta \eta} \left(\mathbf{n} \frac{\tilde{\delta} F}{\delta \mathbf{v}} \right) \right) d\mathbf{r}_\perp. \tag{14}$$

Первая часть этой скобки учитывает объемные переменные, в отсутствие свободной границы она переходит в выражение для скобки, которое в терминах ротора скорости $\mathbf{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}$ впервые было приведено в работе [19]:

$$\{F, G\} = \int \left(\mathbf{\Omega} \left[\operatorname{rot} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{\Omega}} \operatorname{rot} \frac{\delta G}{\delta \mathbf{\Omega}} \right] \right) d\mathbf{r}. \tag{15}$$

Вторая часть скобки в случае, когда вихревые линии не выходят на свободную поверхность, может быть выражена через переменные ϕ и η:

$$\int \left(\frac{\delta F}{\delta \eta} \frac{\delta G}{\delta \phi} - \frac{\delta G}{\delta \eta} \frac{\delta F}{\delta \phi} \right) d\mathbf{r}_\perp, \tag{16}$$

и совпадает с канонической скобкой Захарова.

Соответственно уравнения движения (2), (4) записываются посредством скобки (14) в виде

$$\mathbf{v}_t = \{\mathbf{v}, H\}, \quad \eta_t = \{\eta, H\}.$$

При исследовании тонких вихрей более удобной оказывается третья гамильтоновская формулировка — в терминах вихревых линий. Как было показано нами в предыдущей работе [15], для идеальной несжимаемой гидродинамики в отсутствие свободной границы переход к новым переменным — вихревым линиям — приводит к снятию вырождения скобок Пуассона и позволяет записать вариационный принцип. Следует отметить также, что предел бесконечно тонких вихревых нитей конечной завихренности в присутствии свободной границы был рассмотрен в работе [22]. Предлагаемая ниже формулировка дает гамильтоновское описание распределенных вихрей, взаимодействующих со свободной поверхностью. Наши доказательства более просты, главное, они позволяют контролировать предельный переход к бесконечно тонким нитям.

Представим вихревую трубку конечной толщины в виде непрерывного распределения вихревых нитей, каждую из которых будем маркировать координатой ν. Будем считать координату ν принадлежащей некоторой фиксированной двумерной области. Например, в качестве ν можно взять начальные координаты вихревой нити в некотором поперечном сечении вихревой трубки.

Положение каждой вихревой нити будем задавать функцией

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(\nu, s, t), \tag{17}$$

где s — параметр, меняющийся вдоль нити. Для замкнутой вихревой линии функция $\mathbf{R}(\nu, s, t)$ будет периодической с периодом, зависящим от ν:

$$\mathbf{R}(\nu, s, t) = \mathbf{R}(\nu, s + l(\nu), t).$$

Мы будем далее для простоты предполагать, что вихревые линии нигде не выходят на поверхность и замкнуты. Поэтому скалярный потенциал скорости хорошо определен на границе. (Отметим, что его значение $\phi(\mathbf{r}_\perp)$ помимо потенциала волн содержит в себе вклад от вихрей, находящихся в глубине жидкости.)

Пусть циркуляция скорости вокруг вихревой трубки, опирающейся на элемент площади $d^2\nu$ в окрестности точки ν, равна $\rho(\nu)d^2\nu$. При этом $\rho(\nu)$ в силу сохранения циркуляции не зависит от времени.

В этом случае ротор скорости $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}, t)$ может быть записан в виде

$$\Omega(\mathbf{r}; \{\mathbf{R}(\nu, s, t)\}) = \int d^2\nu \rho(\nu) \int ds \frac{\partial \mathbf{R}(\nu, s, t)}{\partial s} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(\nu, s, t)). \tag{18}$$

Легко видеть, что в формулах (17) и (18) выбор параметра s с точностью до замен $s \to \to \tilde{s}(s, t)$ неоднозначен. Вне зависимости от выбора s вектор $\partial \mathbf{R}(\nu, s, t)/\partial s$ всегда касателен вихревой линии с заданным ν.

Как было нами показано в [15], уравнение движения для вихревой линии $\mathbf{r} = \mathbf{R}(\nu, s, t)$,

$$[\mathbf{R}_s \times (\mathbf{R}_t - \mathbf{v}(\mathbf{R}, t)] = 0, \tag{19}$$

определяет только «поперечную» к вихревой линии динамику. Уравнение движения (19) следует непосредственно из уравнения Эйлера для ротора скорости $\mathbf{\Omega} = \operatorname{rot}\mathbf{v}$. Как и должно быть, продольное «изменение» не сказывается на деформации кривой, оставляя уравнение (19) инвариантным относительно всех гладких замен $s \to \tilde{s}(s, t)$.

Описание вихревых линий с помощью уравнений (17), (18) и (19) является смешанным — лагранжево-эйлеровым описанием. При этом параметр ν имеет прозрачное лагранжевое происхождение, в то время как координата s остается эйлеровой. Для плоских течений координату s естественно отождествить с координатой z, перпендикулярной соответствующей плоскости.

Прямой проверкой можно убедиться, что уравнения движения (4), (19) для переменных $\mathbf{R}$ и η, а также для ψ следуют из вариационного принципа для действия $S = \int \mathscr{L} dt$:

$$\delta S = 0,$$

где лагранжиан $\mathscr{L}$ задается выражением

$$\mathscr{L} = \frac{1}{3}\int d^2\nu \rho(\nu) \int ([\mathbf{R}_t(\nu, s) \times \mathbf{R}(\nu, s)]\mathbf{R}_s(\nu, s))ds + \int \phi \eta_t d\mathbf{r}_\perp - \mathscr{H}[\mathbf{R}, \phi, \eta]. \tag{20}$$

Центральным моментом в этой проверке являются два соотношения:

$$\rho(\nu)\left[\mathbf{R}_s \times \operatorname{rot}\frac{\delta F}{\delta \mathbf{\Omega}}\right] = \frac{\delta F}{\delta \mathbf{R}} \tag{21}$$

и

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot}\frac{\delta \mathscr{H}}{\delta \mathbf{\Omega}},$$

первое из которых справедливо лишь для функционалов, зависящих от $\mathbf{\Omega}$, ϕ и η, т. е. калибровочно-инвариантных функционалов, не зависящих от выбора параметров s и ν.

Уравнение движения для $\mathbf{R}$ (19), следующее из (20), приобретает гамильтоновскую форму:

$$\rho(\nu)[\mathbf{R}_s(\nu, s) \times \mathbf{R}_t(\nu, s)] = \left.\frac{\delta \mathscr{H}}{\delta \mathbf{R}(\nu, s)}\right|_{\phi,\eta}, \tag{22}$$

а уравнения для ϕ и η сохраняют свой канонический вид (1).

Используя свойство (21), возможно путем прямого пересчета скобки (14) получить скобку Пуассона (между двумя калибровочно-инвариантными функционалами), выраженную в терминах вихревых линий:

$$\{F, G\} = \int \frac{d^2\nu ds}{\rho(\nu)|\mathbf{R}_s(\nu, s)|^2}\left(\mathbf{R}_s(\nu, s)\left[\frac{\delta F}{\delta \mathbf{R}(\nu, s)} \times \frac{\delta G}{\delta \mathbf{R}(\nu, s)}\right]\right) + \\ + \int \left(\frac{\delta F}{\delta \eta}\frac{\delta G}{\delta \phi} - \frac{\delta G}{\delta \eta}\frac{\delta F}{\delta \phi}\right) d\mathbf{r}_\perp. \tag{23}$$

Как видно из этого выражения, в новую скобку (23) не вошли вариационные производные по ρ, хотя неизменность ρ в данных вычислениях можно было и не предполагать. Это свидетельствует о том, что ρ является казимиром по отношению к исходной скобке, что позволяет ввести вариационный принцип (20). При этом переменные ϕ и η остаются канонически-сопряженными величинами.

Каноническая формулировка в виде (20) удобна для нас еще и тем, что в ней легко совершить предельный переход к конечному числу очень тонких вихревых нитей $\mathbf{R}_n(s,t)$ с конечными завихренностями γ_n:

$$\mathscr{L}_\epsilon = \frac{2\pi}{3}\sum_n \gamma_n \int ds\,(\mathbf{R}_{ns}[\mathbf{R}_n \times \mathbf{R}_{nt}]) + \int \phi\eta_t d\mathbf{r}_\perp - \mathscr{H}[\mathbf{R}_n, \phi, \eta]. \tag{24}$$

Нужно только аккуратно учитывать тот факт, что при устремлении толщины нити к нулю логарифмически растет ее «собственная» энергия, набираемая в непосредственной близости от оси нити. В трехмерном пространстве эффекты конечной толщины зачастую играют важную роль, поскольку вытягивание какого-либо участка нити сопровождается уменьшением ее толщины и увеличением благодаря этому погонной плотности «собственной» энергии. Это свойство системы в принципе может быть включено в рассмотрение путем сохранения при нашем огрубленном описании дополнительных степеней свободы, кроме $\mathbf{R}(s)$, а именно — площади сечения нити $\Sigma(s)$ и канонически-сопряженного к ней угла $\theta(s)$ поворота поперечного сечения как целого вокруг оси нити.

При рассмотрении плоских течений такая проблема и вовсе не возникает. Вихрь имеет постоянную площадь, значение которой сказывается только на аддитивной константе в выражении для гамильтониана. В этом случае вариационный принцип для действия с лагранжианом (20) приводит к хорошо известному факту (см. [13]), что $X_n(t)$ и $Y_n(t)$ — координаты каждого точечного вихря — являются канонически-сопряженными величинами, а лагранжиан принимает вид

$$\mathscr{L} = \sum_n 2\pi\gamma_n X_n(t)\dot{Y}_n(t) + \int \phi\eta_t dx - \mathscr{H}[X_n, Y_n, \phi, \eta]. \tag{25}$$

3. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В КОНФОРМНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В данном разделе мы обратимся к плоским течениям, предполагая вихри точечными. Поскольку нас в основном интересует взаимодействие вихрей со свободной поверхностью, ограничимся рассмотрением только одного вихря (всякое обобщение на N вихрей представляется более-менее очевидным). В случае двумерных течений удобно, следуя работе [16], совершить конформное преобразование области $D : \{y \le \eta(x,t)\}$, занятой жидкостью, в нижнюю полуплоскость комплексной переменной $w = u + iv$. Будем считать, что конформное отображение задается аналитической функцией

$$z(w) = x + iy = w + A(w), \tag{26}$$

переводящей границу жидкости $y = \eta(x,t)$ в вещественную ось $v = 0$, с функцией $A(w)$, стремящейся к нулю на бесконечности.

Для описания течения жидкости введем комплексный потенциал скорости

$$\Pi = \Phi + i\Theta,$$

где Φ — использованный выше гидродинамический потенциал, а Θ — функция тока. В присутствии вихрей потенциал Π неоднозначен — при обходе вокруг вихря потенциал приобретает ненулевую добавку. Поэтому в дальнейшем, где это необходимо, мы будем предполагать, что потенциал Π задан на (нижней) полуплоскости с разрезом от точки $w = W = U + iV$, где находится вихрь, до $w = -i\infty$.

Спрямление свободной поверхности с помощью конформного преобразования $z = z(w)$ позволяет точно выделить в комплексном потенциале вихревую составляющую вместе с вихрем изображения:

$$\Pi(w) = \Pi_0(w) + \Psi(w) = i\gamma \ln\left(\frac{w - W}{\bar{W} - w}\right) + \Psi(w). \tag{27}$$

Важно, что эта составляющая (первое слагаемое в (27)) дает нулевой вклад в нормальную к поверхности компоненту скорости. Другое слагаемое в Π можно интерпретировать как потенциал поверхностных волн.

Здесь и всюду ниже мы считаем $\gamma > 0$, соответственно, направление вихря — по часовой стрелке.

При $v = 0$ (т.е. на свободной поверхности) значение вещественного потенциала есть

$$\phi(u) = \Phi_0(u) + \psi(u) = 2\gamma \operatorname{arctg}\left(\frac{u - U}{-V}\right) + \psi(u). \tag{28}$$

Введем необходимые для дальнейшего изложения проекторы $P^{(\pm)}$ и оператор $|\hat{k}|$, имеющие в фурье-представлении вид

$$P^{(\pm)} = \frac{1}{2}(1 \pm \operatorname{sign}(k)), \tag{29}$$

$$|\hat{k}| = |k|. \tag{30}$$

Проекторы $P^{(\pm)}$ при действии на произвольную функцию, приравнивая к нулю ее фурье-компоненты с отрицательными либо с положительными волновыми числами k, выделяют тем самым из нее функции, аналитически продолжаемые соответственно в верхнюю либо в нижнюю комплексную полуплоскость аргумента. Эти операторы выражаются через преобразование Гильберта

$$\hat{H} f(x) = \frac{1}{\pi} \mathrm{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')dx'}{x' - x}$$

с помощью формулы

$$P^{(\pm)} = \frac{1}{2}(1 \mp i\hat{H}). \tag{31}$$

Соответственно, оператор $|\hat{k}|$ записывается через $\hat{H}$ в виде

$$|\hat{k}| = -\hat{H}\frac{\partial}{\partial x}.$$

Запишем теперь кинематическое условие на поверхности, а также уравнение Бернулли в конформных переменных. Первое из них с помощью соотношения

$$\eta_t = \frac{\partial(y,x)}{\partial(t,x)} = \frac{1}{x_u}(y_t x_u - y_u x_t)$$

преобразуем к виду

$$y_t x_u - y_u x_t = |\hat{k}|\psi. \tag{32}$$

Следуя работе [16], это уравнение можно разрешить относительно временных производных:

$$\frac{z_t}{z_u} = P^{(-)}\left(\frac{2i|\hat{k}|\psi}{|z_u|^2}\right). \tag{33}$$

На этом уравнении наличие вихря никак не отражается. Причиной тому является представление потенциала скорости в специальном виде (27). Правая часть уравнения (32) $|\hat{k}|\psi$ представляет собой нормальную компоненту скорости, в которую вихри не дают никакого вклада.

При преобразовании динамического граничного условия — уравнения Бернулли на свободной границе $v = 0$ — член $(\nabla\Phi)^2$ записывается в виде

$$(\nabla\Phi)^2|_{y=\eta} = \frac{1}{|z_u|^2}(\Phi_u^2 + \Phi_v^2)|_{v=0} = \frac{1}{|z_u|^2}(\phi_u^2 + \psi_v^2),$$

а производная

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{y=\eta} = \phi_t - \phi_u \hat{H}\left(\frac{\hat{H}\psi_u}{|z_u|^2}\right) - \frac{(\hat{H}\psi_u)^2}{|z_u|^2}.$$

Отсюда после простых преобразований уравнение Бернулли для ϕ в конформных переменных приобретает следующую форму:

$$\phi_t - \phi_u \hat{H}\left(\frac{\hat{H}\psi_u}{|z_u|^2}\right) - \frac{(\hat{H}\psi_u)^2 - (\phi_u)^2}{2|z_u|^2} + gy - \sigma\frac{1}{1+|\hat{k}|y}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{y_u}{|z_u|}\right) = 0. \tag{34}$$

В отсутствие вихря $\phi = \psi$, и в этом случае уравнение описывает собственно поверхностные волны вместе со своими нелинейностями, поэтому все взаимодействие волн с вихрем спрятано в разнице между потенциалами ϕ и ψ.

Осталось написать уравнение движения вихря. Как известно, скорость его смещения $\tilde{\mathbf{v}}$ получается из полного поля скорости течения вычитанием центрально-симметричного поля самого вихря и взятием предела $x \to X$ и $y \to Y$:

$$X_t = \tilde{v}_x(X,Y,t), \quad Y_t = \tilde{v}_y(X,Y,t)$$

или

$$\bar{Z}_t = \tilde{v}_x - i\tilde{v}_y = \left.\frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial z}\right|_{z=Z}.$$

При переходе к конформным переменным последнее уравнение переписывается как

$$Z'(W)\frac{d\bar{Z}}{dt} = \tilde{\Pi}'|_{w=W}.$$

Для замыкания уравнений необходимо теперь найти потенциал $\tilde{\Pi}$. Он определяется исходя из соотношения (27):

$$\tilde{\Pi} = i\gamma \ln\left(\frac{w-W}{\bar{W}-w}\right) + \Psi(w) - i\gamma \ln(z(w) - Z(W)).$$

Дифференцируя это выражение по w и переходя к пределу $w \to W$, окончательно имеем:

$$Z'(W)\frac{d\bar{Z}}{dt} = \frac{-i\gamma}{W-\bar{W}} - \frac{i\gamma}{2}\frac{Z''(W)}{Z'(W)} + \Psi'(W). \tag{35}$$

Уравнения (33), (34), (35) с учетом равенств

$$x - u = -\hat{H}y, \tag{36}$$

$$Z(W) - W = \frac{i}{2\pi}\int \frac{(z(u)-u)du}{u-W} \tag{37}$$

образуют замкнутую систему, описывающую в конформных переменных взаимодействие точечного вихря со свободной поверхностью.

В заключение данного раздела приведем выражение для лагранжиана в конформных переменных:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{conf} = {} & i\pi\gamma Z\frac{d\bar{Z}}{dt} + \int (\Phi_0(u)+\psi)\left(\frac{z_t\bar{z}_u - \bar{z}_t z_u}{2i}\right)du - \\ & - \int \frac{\psi|\hat{k}|\psi}{2}du + \frac{g}{2}\int \frac{(z-\bar{z})^2}{4}\frac{z_u+\bar{z}_u}{2}du - \sigma\int(\sqrt{z_u\bar{z}_u}-1)du - \\ & - \pi\gamma^2\left(\ln\left(\frac{\bar{W}-W}{i}\right) + \frac{1}{2}\ln(Z'(W)\,\bar{Z}'(\bar{W}))\right).\end{aligned} \tag{38}$$

Здесь слагаемые, стоящие во второй строке, ответственны за поверхностные волны. В пределе малых амплитуд волн в отсутствие вихрей по переменным ψ и η лагранжиан квадратичен:

$$\mathscr{L}_s = \int du\psi\, y_t - \frac{1}{2}\int du(\psi|\hat{k}|\psi + gy^2 + \sigma y_u^2).$$

Соответствующие ему линейные уравнения движения определяют закон дисперсии поверхностных волн

$$\omega = \sqrt{gk + \sigma k^3}; \tag{39}$$

при этом поверхностная волна с волновым вектором k локализована в слое толщиной порядка длины волны ($\sim k^{-1}$).

Логарифмические члены в лагранжиане (38) соответствуют взаимодействию вихря со своим отражением, а также учету изменения размера вихря при конформном преобразовании: $|\Delta z| \approx |Z'(W)||\Delta w|$. Именно последнее слагаемое в (38), как показано в Приложении, обеспечивает при варьировании действия появление слагаемого $(i\gamma/2)Z''(W)/Z'(W)$ в уравнении (35), а также члена взаимодействия вихря с волнами в уравнении Бернулли (34).

4. СТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Рассмотрим стационарные решения уравнений (33), (34), (35), описывающие распространение вихря вдоль оси x с постоянной скоростью c и связанной с ним деформации поверхности. В этом случае

$$\dot{U} \equiv \dot{W} = c,$$

а

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c\frac{\partial}{\partial u}.$$

В результате кинематическое условие в форме (32) просто интегрируется:

$$x(u') - u' = c\psi, \tag{40}$$

что в силу аналитичности A дает

$$A(w') = c\Psi. \tag{41}$$

Здесь $u' = u - ct$, $w' = w - ct$ (в дальнейшем штрихи у u и w будут опускаться).

В стационарном случае уравнение Бернулли (34) также существенным образом упрощается. В системе координат, где вихрь покоится, справа налево натекает поток со скоростью c. На границе (в силу стационарности) функция тока постоянна (= 0), соответственно, у скорости присутствует только одна тангенциальная компонента:

$$V(u) = -c + \frac{i\gamma(W - \bar{W})}{|u - W|^2}. \tag{42}$$

В результате уравнение (34) записывается в виде

$$\frac{V^2}{2|z_u|^2} + gy - \sigma\frac{1}{1 + |\hat{k}|y}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{y_u}{|z_u|}\right) = \frac{c^2}{2}. \tag{43}$$

Уравнение движения вихря (35) в стационарном случае с учетом (41) определяет скорость c в зависимости от значения производных $z(w)$ в точке $w = W$:

$$c = \frac{-i\gamma}{W - \bar{W}} - \frac{i\gamma}{2}\frac{Z''(W)}{Z'(W)}. \tag{44}$$

Уравнения (44) и (43) образуют замкнутую систему, в которой c играет роль собственного значения.

Рассмотрим асимптотику (43) при больших значениях u, предполагая отклонение $y(u)$ малым. Производя линеаризацию, имеем

$$\hat{L}y(u) = \frac{2c\gamma h}{u^2}. \tag{45}$$

Здесь оператор $\hat{L}$, равный

$$\hat{L} = |\hat{k}|(V_{ph}^2 - c^2), \quad V_{ph}^2 = g|k|^{-1} + \sigma|k|,$$

определяет асимптотику y. Оператор $\hat{L}$ является положительно определенным, если квадрат скорости c меньше квадрата минимальной фазовой скорости $V_{ph} = \omega(k)/k$ линейных волн:

$$c^2 < \min V_{ph}^2 = 2gk_0,$$

где $\omega(k)$ задается выражением (39), а $k_0 = \sqrt{g/\sigma}$. В этом случае оператор $\hat{L}$ обратим и, соответственно, у уравнения (43) возможны локализованные решения. Если

$$c^2 > \min V_{ph}^2,$$

то оператор $\hat{L}$ необратим, соответственно, решение линейного уравнения (45) будет содержать осциллирующую асимптотику с волновыми числами k — корнями уравнения

$$g|k|^{-1} + \sigma|k| = c^2. \tag{46}$$

Последнее равенство есть условие черенковского излучения, которое выполняется для двух значений $k_{1,2}$:

$$k_{1,2} = \frac{c^2}{2\sigma}\left[1 \pm \sqrt{1 - (V_{min\,ph}/c)^4}\right]. \tag{47}$$

Причем k_1 лежит в капиллярной области спектра ($k_1 > k_0$), а k_2 — в гравитационной области ($k_2 < k_0$). При этом групповая скорость при $k = k_1$ больше c, а для гравитационных волн с $k = k_2$, наоборот, меньше c. Поэтому при $c^2 > \min V_{ph}^2$ перед вихрем будет формироваться осциллирующий фронт капиллярных волн, а позади вихря — фронт гравитационных волн (более подробно об этом см. разд. 6).

Таким образом, главное отличие локализованных решений от нелокализованных заключено в соотношении между скоростью вихря c и минимальной фазовой скоростью поверхностных волн. Важно, что при $c \geq \min V_{ph}$ локализованный объект — связанное состояние вихря и волн — не может быть стационарным образованием, он будет обязательно излучать поверхностные волны благодаря черенковскому эффекту, теряя при этом свою энергию. Однако отсутствие черенковского излучения, вообще говоря, полностью еще не гарантирует стационарность движения вихря и связанных с ним поверхностных волн (об этом см. ниже).

Обратимся теперь к решению уравнений (43) и (44). Отметим прежде всего, что эти решения являются стационарными точками гамильтониана $\mathscr{H}$ при фиксированном значении x-компоненты полного импульса $\mathscr{P}$:

$$\delta(\mathscr{H} + c\mathscr{P}) = \delta S_c = 0, \tag{48}$$

где

$$\mathcal{P} = -2\pi\gamma Y + \int \phi\eta_x dx,$$

а действие для стационарных решений S_c имеет вид

$$S_c = \int\Bigg(-\frac{ic^2}{4}\bar{A}A' + \sigma\left(\sqrt{(1+A')(1+\bar{A}')} - 1\right) + \\ + \frac{g}{2}\left(\frac{A-\bar{A}}{2i}\right)^2\left(1 + \frac{A'+\bar{A}'}{2}\right) + \bar{\mu}P^{(+)}A + \mu P^{(-)}\bar{A}\Bigg)du - \\ - \pi\gamma ci(W-\bar{W}) + \pi\gamma^2\left[\ln\left(\frac{W-\bar{W}}{-i}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+A'(W)\right)\left(1+\bar{A}'(\bar{W})\right)\right]. \quad (49)$$

Здесь мы воспользовались соотношениями (40), позволяющими исключить потенциал Ψ из рассмотрения, и ввели связи $P^{(+)}A = P^{(-)}\bar{A} = 0$, гарантирующие аналитичность A и $\bar{A}$ (μ, $\bar{\mu}$ — соответствующие им множители Лагранжа).

При этом вариация S_c по W дает уравнение для глубины вихря W, совпадающее с (44). Из этого уравнения легко следует, что при малой деформации свободной поверхности (в этом случае вторым слагаемым в правой части (44) можно пренебречь) скорость вихря обратно пропорциональна расстоянию до вихря изображения $2h$:

$$c \approx c_0 = \frac{\gamma}{2h}.$$

Рассматривая вариацию по A, получаем стационарное уравнение Бернулли в форме, отличной от (43), но более удобной для последующего анализа[1]:

$$P^{(-)}\left(ic^2A' + 2\sigma\frac{d}{du}\sqrt{\left(\frac{1+A'}{1+\bar{A}'}\right)} + g(\bar{A}A' - AA' - A) + \frac{i\gamma^2}{1+\bar{A}'(\bar{W})}\frac{1}{(u-\bar{W})^2}\right) = 0. \quad (50)$$

Решения уравнений (44) и (50) зависят от двух безразмерных параметров: числа Фруда $F = \gamma^2/gh^3$ и $T = \sigma/gh^2$, представляющих соответственно отношения c_0^2 и характерной скорости капиллярных волн (с длиной волны $\sim h$) к характерной скорости гравитационной волны.

Пусть в системе координат, двигающейся со скоростью c, вихрь находится в точке $W = -ih$. Вводя безразмерные переменные

$$\xi = u/h, \quad a(\xi, F, T) = A/h, \quad c = c_0\tilde{c},$$

уравнения (44) и (50) можно переписать в виде

$$\tilde{c} = 1 - i\frac{a''(-i)}{1+a'(-i)}, \quad (51)$$

[1] Эквивалентность этого уравнения и (43) проверяется примерно так же, как это изложено в Приложении для уравнения (34).

$$a = P^{(-)}\left(iF\frac{\tilde{c}^2}{4}a' + 2T\frac{d}{d\xi}\sqrt{\left(\frac{1+a'}{1+\bar{a}'}\right)} + \bar{a}a' - aa' + \frac{iF}{1+\bar{a}'(-i)}\frac{1}{(\xi+i)^2}\right). \tag{52}$$

Решение системы (51), (52) при малых скоростях движения может быть представлено в виде асимптотического разложения по степеням параметра F.

Разложение скорости c от глубины дается выражением

$$\tilde{c} = 1 + \frac{3}{8}F + \frac{21}{16}F^2 + \left(\frac{2439}{256} - \frac{15}{8}T\right)F^3 + \left(\frac{52629}{512} - \frac{213}{8}T\right)F^4 + \ldots \tag{53}$$

Форма поверхности определяется параметрически из соотношений

$$A(u) = h\left(a_1(\zeta,T)F + a_2(\zeta,T)F^2 + a_3(\zeta,T)F^3 + \ldots\right), \tag{54}$$

где

$$a_1 = \frac{i}{\zeta^2}, \tag{55}$$

$$a_2 = -\frac{2}{\zeta^5} + \frac{1}{\zeta^3} + \frac{(3/4)i}{\zeta^2} - \frac{3/8}{\zeta}, \tag{56}$$

$$a_3 = -\frac{14i}{\zeta^8} + \frac{10i}{\zeta^6} - \frac{11/2}{\zeta^5} + \frac{i(6T-9/2)}{\zeta^4} + \frac{17/4}{\zeta^3} + \frac{(123/32)i}{\zeta^2} - \frac{39/16}{\zeta}. \tag{57}$$

(Здесь $\zeta = \xi - i$).

Члены первого порядка по F находятся непосредственно из уравнений. В этом порядке форма поверхности может быть определена в явном виде. Из (55) с точностью до членов более высокого порядка имеем

$$y = Fh^3\frac{x^2-h^2}{(x^2+h^2)^2}.$$

При $x = 0$ (строго над вихрем) имеется минимум поверхности с отрицательным значением y (ямка), при $x^2 > h^2$ поверхность возвышается над своим средним уровнем, что согласуется с результатами численного интегрирования [12]. Появление ямки на поверхности объясняется тем, что скорость V (42) над вихрем превосходит по абсолютной величине значение V на бесконечности, что в силу уравнения Бернулли дает меньшее давление над вихрем, чем давление на бесконечности.

Что касается старших членов разложения (вплоть до четвертого порядка по F), приведенных в (53) и (54), то они были вычислены с помощью программы на $MapleV$. Важно отметить, что старшие коэффициенты разложения $a(\xi)$ убывают при больших ξ медленнее, чем $a_1(\xi)$. При этом наличие конечного коэффициента поверхностного натяжения принципиально для существования стационарного решения. Только при этом условии, как мы видели выше, невозможно черенковское излучение в некотором диапазоне скоростей движения. Однако и при $T = 0$ формальное разложение (53), (54) может быть получено. Это указывает на то, что в действительности эти ряды по F расходятся, и поэтому при их использовании нужно ограничиваться конечным числом членов и малыми F. Другое очевидное условие их применимости — малость скорости движения по сравнению с $V_{min\,ph}$, потому что при $c > V_{min\,ph}$ локализованных стационарных решений уже не существует. Отсюда условия применимости асимптотического разложения (54) записываются в виде

$$\frac{\gamma^2}{gh^3} \ll 1, \quad \frac{\gamma}{h} \ll (\sigma g)^{1/4}. \tag{58}$$

5. СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

При увеличении скорости c в стационарном решении, рассмотренном выше, происходит ряд перестроек. Чтобы понять причину этих перестроек, как и в предыдущем разделе, рассмотрим случай больших глубин h ($k_0 h \gg 1$), когда взаимодействие поверхностных волн с вихрем можно считать слабым, а вихрь — двигающимся с постоянной скоростью $c \approx c_0 = \gamma/2h$ ($< V_{min\,ph}$). В этом приближении поверхность почти плоская, а, соответственно, различие между конформной глубиной и обычной глубиной мало.

Перейдем в движущуюся вместе с вихрем систему отсчета. В этой системе координат взаимодействие натекающего потока со скоростью c с дипольной парой (вихрем и его изображением) приводит к тому, что вдоль поверхности формируется постоянное во времени сильно неоднородное течение со скоростью (42):

$$V(x) = c_0 \frac{3h^2 - x^2}{h^2 + x^2}. \tag{59}$$

Это течение на бесконечности имеет значение скорости $-c_0$, а в центре (при $x = 0$) — значение $3c_0$, превышающее по модулю в 3 раза величину V_∞.

Поскольку $V(x)$ меняется медленно по сравнению с характерной длиной поверхностных волн ($\sim k_0^{-1}$), мы вправе написать квазиклассические уравнения движения для пакета поверхностных волн, имеющего несущее волновое число k и координату центра в точке x:

$$\dot{k} = -\frac{\partial \omega(k, x)}{\partial x}, \tag{60}$$

$$\dot{x} = \frac{\partial \omega(k, x)}{\partial k}. \tag{61}$$

Здесь

$$\omega(k, x) = kV(x) + \sqrt{|k|(g + \sigma k^2)} \tag{62}$$

— частота волн, испытывающая, благодаря зависимости скорости течения от x, неоднородный доплеровский сдвиг. При движении пакета $\omega(k, x)$ сохраняется во времени.

Замкнутые линии уровня $\omega(k, x) = \mathrm{const}$ на фазовой плоскости соответствуют финитным периодическим движениям волнового пакета. Такие движения квантуются по известному правилу Бора—Зоммерфельда:

$$\oint\limits_{\omega(k,x)=\omega_n} k\, dx = 2\pi(n + \alpha_n), \tag{63}$$

где n — номер уровня, α_n — число порядка единицы, ω_n — собственная частота уровня.

Конкретный вид $V(x)$ позволяет утверждать, что еще до достижения вихрем $V_{min\,ph}$ появляются связанные состояния с близкими к нулю частотами. Это оказывается важным с точки зрения поведения стационарного решения при изменении скорости движения. Начиная со значения $c = V_{min\,ph}/3$ имеется финитная фазовая траектория с нулевой частотой при отрицательных k. А при $V_{min\,ph}$ появляются также две отраженные инфинитные траектории с нулевой частотой при положительных k. В терминах связанных состояний это означает, что при значении, близком к $V_{min\,ph}/3$, частота первого уровня проходит через нуль. А поскольку вихрь, хотя и экспоненциально слабо, все же взаимодействует со связанными состояниями, происходит резонансное увеличение вклада данного уровня в форму поверхности, причем знак эффекта меняется после перехода частоты через нуль. Нелинейность препятствует неограниченному возрастанию резонансной моды и приводит к бифуркации. По сути, мы имеем дело с двумя различными решениями до и после перехода, если следим только за решениями с малой амплитудой возмущения поверхности.

При дальнейшем увеличении скорости вихря через нуль пройдет частота второго связанного состояния и так далее.

Возникающая в связи со сказанным проблема нелинейной динамики в системе дискретных уровней пока остается до конца не ясной и требует своего исследования. Различные сценарии усложнения поведения с увеличением скорости, например, сценарий, когда при появлении нескольких связанных состояний стационарное движение теряет устойчивость и переходит в нестационарное состояние, что представляется достаточно вероятным, нуждаются в проверке.

Отметим, что неоднородный эффект Доплера, приводящий к столь принципиальным результатам, упущен из виду в работе [12] и в соответствующем параграфе книги [11].

6. ВСПЛЫВАНИЕ ТОЧЕЧНОГО ВИХРЯ

Как уже было сказано, стационарное движение вихря невозможно при условии $c > V_{min\,ph}$ в силу черенковского излучения волн. Обратное влияние излучения на вихрь приводит к изменению со временем вертикальной координаты вихря — вихрь всплывает. При этом излучаемые волны лежат в различных участках спектра — гравитационном и капиллярном. Вперед излучается капиллярная волна, а гравитационная — назад. В отсутствие излучения, несмотря на притяжение вихря к своему изображению, расстояние от вихря до поверхности в среднем не изменяется. Напомним, что для двумерных течений в отсутствие свободной границы дипольная пара точечных вихрей устойчиво двигается с постоянной скоростью в перпендикулярном к диполю направлении.

Наличие черенковского излучения приводит к тому, что расстояние до поверхности уменьшается в силу сохранения энергии — излучаемые волны уносят положительную энергию, уменьшая энергию взаимодействия вихря со своим изображением (увеличивая при этом ее абсолютное значение).

Таким образом, динамика вихря в данном случае имеет нестационарный характер. Однако при двух условиях, которые мы укажем далее, движение можно рассматривать как квазистационарное, поскольку в этом случае амплитуды излучаемых поверхностных волн экспоненциально малы и всплытие вихря в таком режиме является медленным. Указанное свойство квазистационарности относится к взволнованному участку на промежутке времени, когда фронты уже ушли далеко от вихря. Заметим, что если бы равномерное движение вихря поддерживалось некоей внешней силой, то во взволнованной области поверхность могла бы быть неподвижной по отношению к вихрю. При медленном всплывании форма поверхности меняется тоже медленно. С точки зрения вычисления амплитуд черенковских волн оба режима движения вихря — строго равномерное при наличии внешней силы и квазиравномерное с медленным всплыванием при ее отсутствии — различаются мало. Существенная разница проявляется только в невыполнении законов сохранения полных энергии и импульса при строго стационарном течении.

Сформулируем условия, при которых вихрь излучает слабо. Для этого, во-первых, требуется, чтобы длины черенковских волн были малы по сравнению с глубиной h (условие квазиклассичности). Это требование удовлетворяется при

$$c \gg V_{min\, ph}, \tag{64}$$

когда

$$k_2 h \approx 4gh^3/\gamma^2 = 4/F \gg 1. \tag{65}$$

Для вычисления черенковского излучения воспользуемся стационарным уравнением Бернулли (43):

$$\frac{V^2}{2|z_u|^2} + gy - \sigma \frac{1}{1+|\hat{k}|y} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{y_u}{|z_u|}\right) = \frac{c^2}{2}.$$

Считая возмущения поверхности малыми (в силу малости F) и полагая

$$|z'(u)|^2 \approx 1 + 2|\hat{k}|y, \quad c \approx c_0 = \gamma/2h, \tag{66}$$

после линеаризации (43) имеем

$$\hat{L}y(u) = \frac{1}{2}(V^2(u) - c_0^2), \qquad V(u) = c_0 \frac{3h^2 - u^2}{h^2 + u^2}. \tag{67}$$

Здесь в отличие от (45) оператор $\hat{L}$ учитывает неоднородный эффект Доплера:

$$\hat{L} = V^2(u)|\hat{k}| - g + \sigma \frac{d^2}{du^2}.$$

Для нахождения решения этого уравнения воспользуемся тем, что функция $y(u)$ представляет собой мнимую часть аналитической в нижней полуплоскости функции $A(u) = ha(u/h) = ha(q)$. Уравнение для $a(q)$ получается из (67) применением проектора $P^{(-)}$. В безразмерных переменных оно имеет вид

$$-v^2(q)a' + \frac{\lambda}{i}a - \frac{\epsilon}{i}a'' = f(q, d_1, d_2). \tag{68}$$

Здесь по определению

$$V^2 = c_0^2 v^2, \qquad v^2(q) = \left(\frac{q^2-3}{q^2+1}\right)^2 = 1 - \frac{4}{(q-i)^2} - \frac{4}{(q+i)^2},$$
$$f(q,d_1,d_2) = 4\left[\frac{1}{(q-i)^2} + \frac{d_2}{q+i} - \frac{\bar{d}_2}{q-i} + \frac{d_1}{(q+i)^2} - \frac{\bar{d}_1}{(q-i)^2}\right], \tag{69}$$

$\lambda = 4/F \gg 1$ — большой параметр, соответственно, $\epsilon = 4h\sigma/\gamma^2 \ll 1$ — малый параметр, члены, пропорциональные $d_1 = a'(-i)$ и $d_2 = a''(-i)$, как нетрудно видеть, обеспечивают устранение особенностей решения в нижней полуплоскости. При малых F значения d_1 и d_2 малы ($d_1, d_2 \sim F$), что следует из асимптотического разложения решения по F. Поэтому их вкладом в главном приближении следует пренебречь по сравнению со свободным членом в f.

После сделанных упрощений мы имеем обыкновенное дифференциальное второго порядка линейное неоднородное уравнение с асимптотическими условиями на бесконечности, состоящими в отсутствии гравитационной волны при $q \to +\infty$ и в отсутствии капиллярной волны при $q \to -\infty$ (условия излучения). Как легко понять из анализа общей картины, описанной в начале этого раздела, именно такие асимптотические свойства стационарного решения обеспечивают совместно со свободными нестационарными волнами распространение волновых фронтов от вихря.

Для нахождения решения неоднородного уравнения проанализируем сначала свойства решений однородного уравнения ((68) без правой части), поскольку искомое решение уравнения (68) выражается через них по методу вариации постоянных. При выполнении условия квазиклассичности однородные решения $a_1(q)$ и $a_2(q)$ находятся аналогично квантовомеханическим [23]:

$$a_{1,2}(q) \approx C_g^{1,2}\frac{\exp\left\{-i\int^q \kappa_g(x)dx\right\}}{\sqrt{\lambda - \epsilon\kappa_g^2}} + C_c^{1,2}\frac{\exp\left\{-i\int^q \kappa_c(x)dx\right\}}{\sqrt{\lambda - \epsilon\kappa_c^2}}. \tag{70}$$

Здесь зависимость волновых чисел $\kappa_g(q)$ и $\kappa_c(q)$ от координаты дается выражениями

$$\kappa_{g,c}(q) = \frac{v^2(q) \mp \sqrt{v^4(q) - 4\lambda\epsilon}}{2\epsilon}. \tag{71}$$

На бесконечности $\kappa_g \to \kappa_2$, $\kappa_c \to \kappa_1$. Данные формулы применимы вдали от «точек остановки», где $\kappa_g = \kappa_c$, а корни в знаменателях обращаются в нуль. Таких точек в нашем случае имеется четыре, причем две из них выделяют «классически недоступную» область возле точки $q = -\sqrt{3}$, две другие — возле $q = +\sqrt{3}$. Здесь оба волновых числа имеют мнимую часть, что определяет экспоненциальное поведение $a_1(q)$ и $a_2(q)$. Соответственно, есть три классически разрешенных области, и в типичной ситуации амплитуды волн в них резко различны, так что их отношение при переходе через запрещенную область экспоненциально велико, а в показателе экспоненты стоит число порядка $\lambda(c/V_{min\,ph})$. Подобный результат просто получается из оценки интеграла по недоступной области:

$$\int \mathrm{Im}\{\kappa(q)\}dq \sim \int \frac{\sqrt{x^4 - \lambda\epsilon}}{\epsilon}dx \sim \lambda(\lambda\epsilon)^{-\frac{1}{4}} \sim \lambda(c/V_{min\,ph}). \tag{72}$$

В окрестности самих «точек остановки» формулы (70), разумеется, несправедливы, ибо на самом деле однородные решения не имеют там никаких особенностей. Поскольку соответствующая асимптотика нами не используется, укажем лишь, что они приближенно выражаются через функцию Эйри, как и в квантовой механике. Разница лишь в том, что после избавления от члена с первой производной в уравнении (68) мы получаем уравнение Шредингера с комплексным потенциалом. «Сила» около «точки остановки» также имеет мнимую часть, и потому функция Эйри берется с комплексным аргументом.

Для решения неоднородного уравнения с условиями излучения на бесконечности удобно выбрать функции $a_1(q)$ и $a_2(q)$ так, чтобы решение $a_1(q)$ содержало далеко впереди лишь капиллярную волну, а решение $a_2(q)$ далеко позади — только гравитационную волну:

$$a_1(q) \to \exp(-i\kappa_1 q), \qquad q \to +\infty, \tag{73}$$

$$a_2(q) \to \exp(-i\kappa_2 q), \qquad q \to -\infty. \tag{74}$$

При этом искомое решение записывается в виде

$$a(q) = -\frac{i}{\epsilon}\left(a_1(q)\int\limits_{-\infty}^{q} f\frac{a_2(x)}{W(x)}dx + a_2(q)\int\limits_{q}^{+\infty} f\frac{a_1(x)}{W(x)}dx\right), \tag{75}$$

где

$$W(q) = a_1a_2' - a_2a_1' \propto \exp\left(-\frac{i}{\epsilon}\int^{q} v^2(x)dx\right)$$

есть вронскиан для двух данных решений. Очевидно, что амплитуды черенковских волн определяются выражениями

$$|a_g(-\infty)| = \left|-\frac{i}{\epsilon}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\frac{a_1(q)}{W(q)}dx\right|, \qquad |a_c(+\infty)| = \left|-\frac{i}{\epsilon}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\frac{a_2(q)}{W(q)}dx\right|. \tag{76}$$

Предположим теперь, что мы не попадаем в окрестность резонанса на квазидискретном уровне оператора $\hat{L}$. Это есть второе условие квазистационарности. Тогда функции a_1 и a_2 устроены таким образом, что у первой функции амплитуда максимальна при $q < -\sqrt{3}$, а у второй — при $q > +\sqrt{3}$ (резонансу соответствовал бы средний участок). Это приводит к эффективному изменению пределов интегрирования в равенствах (76). Кроме того, при $c \gg V_{min\,ph}$ из двух волн, участвующих в каждом из решений a_1 и a_2 (см. формулу (70)), в интегралы дает главный вклад только одна, именно та, которая после деления на вронскиан осциллирует с меньшим волновым числом. Это соответствует тому, как нетрудно проверить, что амплитуда $a_g(q)$ может быть найдена из решения уравнения первого порядка без капиллярности:

$$-v^2(q)a' + \frac{\lambda}{i}a = \frac{4}{(q-i)^2}.$$

При этом выбор точек, с которых начинается набор амплитуды гравитационной волны, определяется из (76). Так, после несложных вычислений выражение для амплитуды излученной назад волны приводится к виду

$$|a_g(-\infty)| = \left| \frac{i}{\lambda} \int\limits_{-\infty}^{-\sqrt{3}} f'(q,0,0) \exp(i\lambda P(q)) dq \right|, \qquad (77)$$

где

$$P(q) = \int \frac{dq}{v^2(q)} = q + \frac{8}{3}\frac{q}{(3-q^2)} + \frac{8}{3\sqrt{3}} \ln\left(\frac{q-\sqrt{3}}{q+\sqrt{3}}\right).$$

Далее, в написанном выше интеграле (77) контур интегрирования смещаем в верхнюю полуплоскость и интегрируем по частям, устраняя полюс в точке $q = +i$. К полученному интегралу применяем метод перевала. Перевальная точка совпадает с $q = i$. В результате имеем

$$|a_g(-\infty)| \approx \left| \frac{i + 1/\sqrt{3}}{2} \right| \left(\frac{12}{\lambda}\right)^{1/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \exp\left(-\lambda\left(\frac{5}{3} + \frac{16\pi}{9\sqrt{3}}\right)\right). \qquad (78)$$

Амплитуда гравитационной волны непосредственно справа от точки $+\sqrt{3}$ дается аналогичным выражением с пределами интегрирования от $\sqrt{3}$ до $+\infty$. Поэтому после повторения вычислений получаем, что ее модуль такой же. В рассматриваемом пределе $c \gg V_{min\,ph}$ после отражения вперед и превращения в капиллярную данная волна изменяет свою амплитуду в $\sqrt{\lambda/\epsilon\kappa_c^2}$ раз. Этот результат может быть получен аналогично тому, как выводятся квазиклассические граничные условия в квантовой механике [23].

Скорость всплывания вихря определяется из закона сохранения энергии:

$$\pi\gamma^2 \dot{h}/h \approx -(c/2)(\overline{gy^2(-\infty)} + \overline{\sigma y'^2(+\infty)}). \qquad (79)$$

Здесь мы учли, что при соблюдении условий (64) гравитационная волна в системе отсчета с вихрем будет иметь скорость

$$\left.\frac{\partial\omega}{\partial k}\right|_{k=k_1} - c \approx -\frac{c}{2},$$

а, соответственно, капиллярная волна — приблизительно скорость $c/2$. С учетом отмеченного изменения амплитуды второй волны после превращения ее в капиллярную получим, что обе волны вносят одинаковый вклад в скорость всплывания вихря.

Окончательно уравнение для траектории движения вихря $h(x)$ в промежутке между прохождением соседних резонансных квазиуровней имеет вид

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\dot{h}}{c} = -\frac{\Gamma^2(1/3)}{2\pi}\left(\frac{gh^3}{3\gamma^2}\right)^{1/3} \exp\left(-\frac{8gh^3}{\gamma^2}\left(\frac{5}{3} + \frac{16\pi}{9\sqrt{3}}\right)\right). \qquad (80)$$

Отсюда следует, что благодаря черенковскому излучению вихрь всплывает. Скорость всплытия растет с уменьшением h, соответственно увеличивается излучаемая мощность. Поскольку γ не изменяется в этом процессе, всплытие вихря одновременно приводит к его ускорению в горизонтальном направлении.

Скорость всплытия (80) отличается от приведенной в работе [12] — отличие состоит не только в предэкспоненте, но и в самом показателе экспоненты. Совпадение для показателей имеет место только по порядку величин.

В случае резонанса на квазидискретном уровне амплитуда однородных решений максимальна в области классически финитного движения. Оценка амплитуд черенковских волн теперь должна проводиться с использованием коэффициента подбарьерного перехода, который есть величина порядка $\exp(-C_1\lambda(c/V_{min\,ph}))$. Результат

$$|a_{g,c}^{res}| \sim \exp\left(\lambda\left(C_1\frac{c}{V_{min\,ph}} - C_2\right)\right)$$

показывает, что амплитуды эти не малы и, соответственно, квазистационарный режим вблизи резонанса нарушается, как и условие применимости линейного приближения. Исследование перехода системы через квазиуровень требует рассмотрения нестационарных уравнений с учетом нелинейности и представляется на данном этапе довольно затруднительным. Качественное предположение заключается в том, что квазистационарный режим всплывания чередуется с кратковременными резкими выбросами энергии при прохождении резонансов.

Данная тенденция будет сохраняться по крайней мере до тех пор, пока выполняются условия

$$\frac{\gamma^2}{gh^3} < 1, \qquad \frac{\gamma}{h} > (\sigma g)^{1/4}. \tag{81}$$

Когда глубина h будет меньше или сравнима с длиной гравитационной волны, взаимодействие вихря с поверхностью уже нельзя рассчитать в линейном приближении, поведение системы становится сильно нелинейным и ответить тогда на вопрос, произойдет ли дальнейшее всплытие вихря, становится крайне затруднительным — ответ на него, по-видимому, можно получить только путем численного интегрирования нестационарных уравнений (33), (34), (35).

7. ТРЕХМЕРНАЯ ДИНАМИКА

В данном разделе мы обсудим один из аспектов трехмерной динамики вихревой нити: ее неустойчивости относительно изгибных возмущений, обусловленной наличием поверхности.

Рассмотрим вихревую нить, параллельную поверхности. Пусть относительная деформация поверхности жидкости мала, так что взаимодействием вихревой нити со свободными волнами можно пренебречь. Соответственно, при вычислении гамильтониана потенциальной энергией поверхности пренебрегаем, а кинетическую энергию жидкости вычисляем по формуле, в которой скорость выражена через скалярный потенциал. Далее после интегрирования по частям выражение сводится к половине интеграла по поверхности, натянутой на две нити. При этом надо учесть, что после обхода вокруг одной какой-либо из нитей скалярный потенциал получает приращение $2\pi\gamma$. В результате имеем формулу

$$\mathcal{H} = \frac{\pi\gamma}{2}\int\limits_S (\mathbf{V}\,d\mathbf{S}). \tag{82}$$

Для бесконечно тонкой нити данный интеграл логарифмически расходится. Для конечной толщины нити ε_0 интеграл обрезается на размере $\sim \varepsilon_0$.

В длинноволновом пределе, когда характерный радиус кривизны R_0 нити велик по сравнению с Y ($Y'^2 \ll 1$), гамильтониан (82) приближенно может быть записан в виде

$$\mathcal{H}_{appr} = \pi\gamma^2 \int \sqrt{1+X'^2}\ln\left(\frac{Y}{\varepsilon_0}\right) dz. \tag{83}$$

Уравнения для координат вихря $X(z,t)$ и $Y(z,t)$ получаются с помощью (22) путем варьирования гамильтониана (83):

$$\dot{X} = \frac{\gamma}{2}\frac{\sqrt{1+X'^2}}{Y}, \tag{84}$$

$$\dot{Y} = \frac{\gamma}{2}\left(\frac{X'\ln(Y/\varepsilon_0)}{\sqrt{1+X'^2}}\right)'. \tag{85}$$

В этом приближении относительная погрешность в уравнении (84) порядка Y/R_0, а в уравнении для Y — порядка $1/\ln(Y/\varepsilon_0)$. Важно, что малость значений X'^2 и диапазона относительных вариаций Y здесь не предполагается, так что уравнения (84),(85) описывают поведение системы не только для малых отклонений формы нити от прямолинейной.

Для малых отклонений эти уравнения (после линеаризации) описывают неустойчивость с инкрементом, линейно зависящим от $|k|$:

$$\Gamma(k) = |k|\frac{\gamma}{2Y_0}\sqrt{\ln(Y_0/\varepsilon_0)}.$$

Эта неустойчивость есть не что иное, как длинноволновый предел неустойчивости Кроу [17], найденной им для симметричных возмущений двух антипараллельных вихревых нитей.

Физическая причина этой неустойчивости состоит в том, что те возмущенные участки нити, которые находятся ближе к поверхности, будут опережать участки более удаленные. В результате в проекции сверху (со стороны поверхности) изгиб вихревой нити будет иметь выраженный фокусировочный характер (в этом смысле данная неустойчивость похожа на неустойчивость Кадомцева—Петвиашвили [24, 25]). Эта качественная картина сохраняется и на нелинейной стадии, когда нить уже никак нельзя полагать почти прямой. В результате развития неустойчивости Кроу происходит сильное вытягивание и быстрое приближение тех участков нити, которые были ближе всего к поверхности, где диссипация, реально всегда имеющаяся за счет вязкости и за счет черенковского излучения волн в случае свободной границы, приводит к разрыву нити и образованию вихревых полуколец, начинающихся и заканчивающихся на поверхности жидкости.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе нам удалось прояснить лишь самые простые аспекты динамики системы вихрь—поверхность. Остались неисследованными такие интересные вопросы, как существенно нестационарное движение точечного вихря в двух измерениях, устойчивость различных режимов течения, особенно трехмерных, например эволюции системы после выхода нити на поверхность в трехмерном пространстве. Часть из этих проблем может быть решена с помощью численного моделирования, другие требуют дальнейшего аналитического исследования.

Данная работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-01-00093). Работа Е. К. частично была поддержана грантом INTAS 96-0413 и грантом NATO Lincage Grant OUTR.LG 970583, а работа В. Р. — грантом Landau Scholarship.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Мы покажем, как получаются динамические уравнения (35), (34), (33) из вариационного принципа в конформных переменных. Варьирование лагранжиана (38) по $\psi(u)$ дает уравнение

$$(1/2i)(z_t\bar{z}_u - \bar{z}_t z_u) = |\hat{k}|\psi. \tag{86}$$

После умножения его на $1/|z_u|^2$ и действия проектором $\hat{P}^{(-)}$ получим

$$\frac{z_t}{z_u} = \hat{P}^{(-)}\left(\frac{2i|\hat{k}|\psi}{|z_u|^2}\right), \tag{87}$$

что совпадает с (33).

Далее, при варьировании по W и $\bar{W}$ можно произвести подстановку в лагранжиане в соответствии с кинематическим соотношением (86). В результате нее произойдет замена

$$\int \Phi_0(u)\frac{z_t\bar{z}_u - \bar{z}_t z_u}{2i}du \to 2\pi\gamma\left(\frac{\Psi(W) - \bar{\Psi}(\bar{W})}{2i}\right),$$

после чего варьированием по W без труда получается уравнение движения вихря (35):

$$Z'(W)\Big(\bar{Z}'(\bar{W}))\dot{\bar{W}} + \bar{Z}_t(\bar{W})\Big) = \frac{-i\gamma}{W-\bar{W}} - \frac{i\gamma}{2}\frac{Z''(W)}{Z'(W)} + \Psi'(W). \tag{88}$$

Перейдем к выводу уравнения Бернулли. Во избежание излишней громоздкости выкладок исключим пока из рассмотрения поверхностное натяжение. Варьируя по $\bar{z}(u)$ и пользуясь условием аналитичности этой функции в верхней полуплоскости, на первом шаге вычислений имеем уравнение

$$P^{(-)}\left[\left(\phi_t + g\frac{(z-\bar{z})}{2i}\right)z_u - \phi_u z_t - \frac{\gamma^2}{2}\frac{1}{\bar{Z}'(\bar{W})}\frac{1}{(u-\bar{W})^2} + \frac{\gamma}{i}\frac{(Z'(W)\dot{W}+Z_t(W))}{(u-\bar{W})}\right] = 0. \tag{89}$$

Затем используем уравнения (87) и (88) для исключения отсюда временных производных $z_t(u)$ и $\dot{W}$. Заметим теперь, что соотношение $P^{(-)}f = 0$ есть не что иное как утверждение факта аналитичности f в верхней полуплоскости. Поэтому оно останется справедливым после умножения f на $\bar{z}_u$:

$$P^{(-)}(f\bar{z}_u) = 0.$$

Используя это свойство, на втором шаге с учетом тождеств

$$P^{(-)}\left[\frac{\bar{z}_u}{(u-\bar{W})}\right] = \frac{\bar{Z}'(\bar{W})}{(u-\bar{W})}, \tag{90}$$

$$P^{(-)}\left[\frac{\bar{z}_u}{(u-\bar{W})^2}\right] = \frac{\bar{Z}''(\bar{W})}{(u-\bar{W})} + \frac{\bar{Z}'(\bar{W})}{(u-\bar{W})^2} \tag{91}$$

из (89) имеем

$$P^{(-)}\left(\left(\psi_t + \Phi_{0t} + g\frac{(z-\bar{z})}{2i} - (\psi_u + \Phi_{0u})\hat{P}^{(-)}\left(\frac{2i|\hat{k}|\psi}{|z_u|^2}\right)\right)|z_u|^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{\gamma^2}{2}\frac{1}{(u-\bar{W})^2} + \frac{\gamma}{i}\frac{1}{(u-\bar{W})}\left(\frac{i\gamma}{\bar{W}-W} + \bar{\Psi}'(\bar{W})\right)\right) = 0. \tag{92}$$

После этого нужно сложить последнее уравнение с уравнением, комплексно-сопряженным ему. Члены второго порядка по γ собираются в выражение

$$-\frac{\gamma^2}{2}\frac{(W-\bar{W})^2}{|u-W|^4},$$

а члены нулевого порядка, как и положено, совпадают с полученными в работе [16] для чисто потенциального течения:

$$|z_u|^2\left(\psi_t - \psi_u\hat{H}\left(\frac{\hat{H}\psi_u}{|z_u|^2}\right) - \frac{(\hat{H}\psi_u)^2 - (\psi_u)^2}{2|z_u|^2} + gy\right).$$

Наконец, займемся членами первого порядка. Упростим сначала следующее выражение первой степени по γ:

$$-|z_u|^2\Phi_{0u}\hat{H}\left(\frac{\hat{H}\psi_u}{|z_u|^2}\right) - \hat{H}(\Phi_{0u}\hat{H}\psi_u) - i\gamma\left(\frac{\bar{\Psi}'(\bar{W})}{(u-\bar{W})} - \frac{\Psi'(W)}{(u-W)}\right). \tag{93}$$

Второй член в нем равен

$$-\gamma\left(P^{(-)}\left(\left(\frac{1}{u-W} - \frac{1}{u-\bar{W}}\right)\left(\frac{\Psi'(u) - \bar{\Psi}'(u)}{2i}\right)\right) + \text{c.c.}\right) =$$
$$= \frac{i\gamma}{2}\left(\frac{\bar{\Psi}'(\bar{W}) - \Psi_u(u)}{u-\bar{W}} + \frac{\Psi_u(u) - \Psi'(W)}{u-W} - \text{c.c.}\right) =$$
$$= \frac{\bar{\Psi}_u(u) + \Psi_u(u)}{2}i\gamma\left(\frac{1}{u-W} - \frac{1}{u-\bar{W}}\right) + i\gamma\left(\frac{\bar{\Psi}'(\bar{W})}{(u-\bar{W})} - \frac{\Psi'(W)}{(u-W)}\right).$$

Последнее слагаемое сокращается с третьим членом из (93), в результате чего все члены первого порядка могут быть записаны в виде

$$i\gamma\left(\frac{-\dot{W}}{u-W}+\frac{\dot{\bar{W}}}{u-\bar{W}}\right)|z_u|^2+i\gamma\left(\frac{1}{u-W}-\frac{1}{u-\bar{W}}\right)\left(\psi_u-|z_u|^2\hat{H}\left(\frac{\hat{H}\psi_u}{|z_u|^2}\right)\right).$$

Складывая затем полученные выражения, в итоге приходим к уравнению Бернулли (34) в конформных переменных.

Литература

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Москва, Наука (1988).
2. В. Е. Захаров, ПМТФ Вып. 2, 86 (1968).
3. В. Е. Захаров, Н. Е. Филоненко, ДАН СССР **70**, 1292 (1966).
4. Е. А. Кузнецов, П. М. Лушников, ЖЭТФ **108**, 614 (1995).
5. Е. А. Кузнецов, М. Д. Спектор, ЖЭТФ **71**, 262 (1976).
6. E. A. Kuznetsov, M. D. Spector, and V. E. Zakharov, Phys. Rev. E **48**, 1283 (1994); Phys. Lett. A **182**, 387 (1993).
7. А. И. Дьяченко, В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, ФП **22**, 916 (1996).
8. В. Е. Захаров, Н. Н. Филоненко, ПМТФ Вып. 5, 62 (1968).
9. V. E. Zakharov, in *Nonlinear waves and weak Turbulence* in seria *Advances in Math.* Sci., Series 2, ed. by V. E. Zakharov, AMS, Providence, RI (1998), Vol. 182, p. 167.
10. М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев, *Труды конференции по теории волнового сопротивления*, Изд. ЦАГИ, Москва, (1937), стр. 31.
11. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, *Теоретическая гидродинамика*, Физматгиз, Москва (1963), ч. 1.
12. Е. А. Новиков, Изв. АН СССР (ФАО) **17**, 956 (1981).
13. Г. Лэмб, *Гидродинамика*, Гостехиздат, Москва (1947).
14. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, УФН **167**, 1137 (1997).
15. Е. А. Кузнецов, В. П. Рубан, Письма ЖЭТФ **67**, 1015 (1998).
16. A. I. Dyachenko, E. A. Kuznetsov, M. D. Spector, and V. E. Zakharov, Phys. Lett. A **221**, 73 (1996).
17. S. C. Crow, AIAA J. **8**, 2172 (1970).
18. А. В. Кац, В. М. Конторович, ФНТ **23**, 120 (1997).
19. E. A. Kuznetsov, A. V. Mikhailov, Phys. Lett. A **77**, 37 (1980).
20. P. J. Morrison and J. M. Greene, Phys. Rev. Lett. **45**, 790 (1980).
21. D. Lewis, J. Marsden, R. Montgomery, and T. Ratiu, Physica D **18**, 391 (1986).
22. A. Rouhi and J. Wright, Phys. Rev. E **48**, 1850 (1993).
23. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва, (1989).
24. Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, ДАН СССР **192**, 753 (1970).
25. E. A. Kuznetsov and J. J. Rasmussen, Phys. Rev. E **51**, 4479 (1995).