

## СУБПУАССОНОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ОДНОАТОМНОГО ДВУХУРОВНЕВОГО ЛАЗЕРА С НЕКОГЕРЕНТНОЙ НАКАЧКОЙ

А. В. Козловский\*, А. Н. Ораевский

Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук  
117924, Москва, Россия

Поступила в редакцию 25 сентября 1998 г.

Проведен анализ квантово-статистических свойств излучения одноатомного двухуровневого лазера с некогерентной накачкой. Решение уравнения Лиувилля для оператора плотности в базе фоковских состояний показало, что стационарное излучение одномодового лазера с некогерентной накачкой может находиться в сжатом по числу фотонов (субпуассоновском) стационарном состоянии, в случае если скорость спонтанного распада ниже скорости потерь резонатора и скорости накачки. Внутри резонатора фактор Фано достигает величины  $F = 0.85$  (15%-ое сжатие). Многократное сжатие ( $F = 0.19$ ) возможно в переходном режиме генерации. Значительное сжатие имеется на выходе резонатора; спектральный фактор Фано на нулевой частоте составляет 0.36 в оптимальных условиях.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Микроскопическая лазерная система, состоящая из иона/атома, помещенного в ловушку и находящегося внутри высокодобротного резонатора, в настоящее время является объектом интенсивных исследований. Детальный анализ, проведенный за последние годы [1–7], показал, что излучение в резонансной моде такой элементарной лазерной системы проявляет ряд неклассических свойств, таких как субпуассоновская статистика [1–4] и антигруппировка фотонов [5], многопиковые спектры флуоресценции, спектр Моллоу при некогерентной накачке [6], беспороговая генерация [3, 5] и сопутствующие ей антигруппировка фотонов и уширение спектральной линии в многоуровневом случае [5].

В настоящей работе нами исследуется такой аспект генерации одноатомного лазера, как субпуассоновская статистика числа фотонов излучения в одномодовом случае при некогерентной накачке. За последнее время найдено несколько способов создания состояния электромагнитного поля с флуктуациями числа фотонов ниже уровня дробового шума (субпуассоновский свет). Для этого в работах [8–10] предложено использование одномодового лазера с регуляризованной накачкой. В [11, 12] для получения сжатого по числу фотонов света используется атомная когерентность активной среды. Многоуровневые схемы обычного одномодового лазера, как показано в [13–19], также могут являться источником сжатого света в случае как когерентной, так и некогерентной накачки. В работах [20, 21] указывается на возможность генерации субпуассоновского света с помощью многомодового лазера. В [22] для одномодового двухуровневого лазера с некогерентной накачкой найдены условия создания переходного сжатого состояния

\*E-mail: kozlovsky@neur.lpi.msk.su

генерируемого излучения. В случае одномодовых двухуровневых лазеров, рассмотренных в работах [2, 5–7, 19, 22, 23], заметное сжатие излучения в стационарных условиях отсутствует как для многоатомных ( $N_{atom} \gg 1$ ), так и для одноатомных лазеров [5–7].

В настоящей работе нами проведен анализ динамики квантово-статистических свойств излучения лазера с помощью приведенного оператора плотности системы атом + поле в базисе фоковских состояний поля, справедливый при любых возможных соотношениях между значениями параметров, характеризующих процессы некогерентной накачки и диссипации, моделируемые с помощью соответствующих резервуаров, взаимодействующих с атомом и полем излучения. Отметим, что проводимые нами исследования динамики лазера и статистических свойств излучения не предполагают использование приближения малых флуктуаций, в рамках которого обычно принимается линейное по флуктуациям приближение.

## 2. МОДЕЛЬ ЛАЗЕРА

Гамильтониан системы атом + поле + резервуар включает в себя операторы энергии электромагнитного поля ( $H_F$ ), атома ( $H_A$ ), взаимодействия поля с атомом ( $V_{A-F}$ ), энергии резервуара непрерывного спектра тепловых мод электромагнитного поля (термостат) ( $R_F$ ), оператор взаимодействия атома с резервуаром термостата ( $V_{A-R}$ ), оператор взаимодействия поля резонатора с термостатом ( $V_{F-R}$ ), а также энергии резервуара накачки ( $R_P$ ) и его взаимодействия с атомом ( $V_{A-P}$ ):

$$\begin{aligned} \frac{H}{\hbar} &= (H_F + H_A + V_{A-F} + R_F + V_{A-R} + V_{F-R} + R_P + V_{A-P}) \frac{1}{\hbar} = \\ &= \omega_c a^+ a + \frac{\omega_A}{2} \sigma^z + g(a^+ \sigma^- + \sigma^+ a) + \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j b_j^+ b_j + \sum_{j=1}^{\infty} g_j (b_j^+ \sigma^- + b_j \sigma^+) + \sum_{j=1}^{\infty} k_j (a^+ b_j + b_j^+ a) + \\ &+ \sum_k \omega_k \Pi_k^+ \Pi_k + \sum_k \mu_k (\Pi_k^+ \sigma^- + \sigma^+ \Pi_k). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $a$  ( $a^+$ ) — операторы уничтожения (рождения) электромагнитного поля дискретной моды резонатора с частотой  $\omega_c$ , операторы  $b_j$  ( $b_j^+$ ) суть операторы уничтожения (рождения) резервуара непрерывного спектра, тепловых мод электромагнитного поля, присутствующих внутри резонатора вследствие частичной прозрачности зеркал. Указанные операторы подчиняются перестановочным соотношениям для бозе-частиц:

$$\begin{aligned} [a, a^+] &= 1, \quad [a^+, a^+] = [a, a] = 0, \\ [b_j, b_k^+] &= \delta_{jk}, \quad [b_j^+, b_k^+] = [b_j, b_k] = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Операторы  $\Pi_k$  ( $\Pi_k^+$ ) относятся к полю резервуара накачки, в общем случае, не находящегося в термодинамическом равновесии и состоящего из частиц, подчиняющихся статистике Ферми (например, электронов дискретного или непрерывного спектра энергий), и подчиняются перестановочным соотношениям

$$\{\Pi_k, \Pi_l^+\} = \delta_{kl}, \quad \{\Pi_k^+, \Pi_l^+\} = \{\Pi_k, \Pi_l\} = 0, \quad (3)$$

здесь  $\{...\}$  — антикоммутиатор.

Входящий в (1) член взаимодействия поля излучения лазера с модами резервуара  $\{b_j\}$  ответствен за установление термодинамического равновесия моды резонатора с поступающим через зеркала полем резервуара-термостата со средним числом фотонов в моде [24, 25]

$$n_T \equiv \bar{n}(\omega = \omega_c, T) = [\exp(\hbar\omega_c/kT) - 1]^{-1}. \quad (4)$$

Атомные операторы поляризации и инверсии населенностей двухуровневого атома ( $|\downarrow\rangle$  и  $|\uparrow\rangle$ ) — соответственно нижнее и верхнее энергетические состояния активного электрона)

$$\sigma^- = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|, \quad \sigma^+ = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|, \quad \sigma^z = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \quad (5)$$

удовлетворяют соотношениям

$$2\sigma^\mp\sigma^\pm = (1 \mp \sigma^z), \quad \sigma^z\sigma^z = 1, \quad (6)$$

а также перестановочным соотношениям для ферми-частиц:

$$\{\sigma^+, \sigma^-\} = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| = 1, \quad \{\sigma^+, \sigma^+\} = \{\sigma^-, \sigma^-\} = 0. \quad (7)$$

Член взаимодействия атомного электрона с полем гармонических осцилляторов термостата  $\{b_j\}$  обеспечивает установление теплового равновесия квантовых средних атомных операторов с температурой  $T$ . Член взаимодействия атомных операторов поляризации с полем накачки  $\{P_k\}$  приводит систему к отклонению от равновесия.

Взаимодействие поля излучения с поляризацией атома пропорционально константе взаимодействия  $g$ , характеризуемой дипольным моментом перехода  $d_{\uparrow\downarrow}$  и объемом резонатора  $V$ :

$$g = d_{\uparrow\downarrow} \sqrt{\frac{2\pi\omega_A}{\hbar V}}. \quad (8)$$

Подобным образом определяются константы взаимодействия электромагнитного поля термостата с атомным электроном:  $g_j$ . Параметры  $k_j$  и  $\mu_k$  представляют собой константы взаимодействия лазерной моды поля резонатора с термостатом и константы взаимодействия атома с резервуаром накачки.

Квантовую стохастическую динамику двухуровневого одноатомного лазера мы будем анализировать с помощью приведенного оператора плотности системы атом + одномодовое поле в базисе фоковских состояний следующего вида:

$$\rho(t) = \sum_{i,j=\{\uparrow,\downarrow\}} \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho_{n,i;m,j}(t) |i\rangle|n\rangle\langle m|\langle j|. \quad (9)$$

В представлении взаимодействия и в приближении Борна—Маркова [24, 25] приведенный оператор плотности системы атом + поле (9), взаимодействующей с резервуаром, удовлетворяет уравнению Лиувилля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{Sp}_R(\sigma_{R \oplus S}) = & -i\Delta \left[ \frac{\sigma^z}{2}, \rho \right] - ig [(a^+ \sigma^- + \sigma^+ a), \rho] + \\ & + \frac{\gamma}{2} (n_T + 1) (2a \rho a^+ - a^+ a \rho - \rho a^+ a) + \frac{\gamma}{2} n_T (2a^+ \rho a - a a^+ \rho - \rho a a^+) + \\ & + \frac{\Gamma}{2} (N_T + 1) (2\sigma^- \rho \sigma^+ - \sigma^+ \sigma^- \rho - \rho \sigma^+ \sigma^-) + \frac{\Gamma}{2} N_T (2\sigma^+ \rho \sigma^- - \sigma^- \sigma^+ \rho - \rho \sigma^- \sigma^+) + \\ & + \frac{P}{2} (1 - p) (2\sigma^- \rho \sigma^+ - \sigma^+ \sigma^- \rho - \rho \sigma^+ \sigma^-) + \frac{P}{2} p (2\sigma^+ \rho \sigma^- - \sigma^- \sigma^+ \rho - \rho \sigma^- \sigma^+), \end{aligned} \quad (10)$$

где отстройка частоты резонатора от атомной частоты есть  $\Delta = \omega_A - \omega_c$ . Величины  $\gamma$ ,  $\Gamma$  и  $P$  — соответственно, скорости потерь поля на зеркалах, спонтанного излучения и некогерентной накачки. Указанные константы диссипации выражаются через корреляторы соответствующих операторов резервуаров  $\{b_j\}$  и  $\{\Pi_k\}$  (см., например, [24, 25]).

Входящее в уравнение (10) среднее число возбуждений атомного резервуара  $N_T$  в случае нахождения резервуара  $\{b_j\}$  в термодинамическом равновесии с температурой  $T$  есть (см., например, [25])

$$N_T \equiv \bar{N}(\omega = \omega_A, T) = \langle b_j^+ b_j \rangle |_{\omega_j = \omega_A} = [\exp(\hbar \omega_A / kT) - 1]^{-1}. \quad (11)$$

Взаимодействие атома с резервуаром накачки  $\{\Pi_k\}$  приводит к отклонению от теплового равновесия, степень возбуждения атома накачкой определяется входящим в уравнение (10) средним числом ферми-квантов резервуара накачки на частоте перехода атома  $p(\omega = \omega_A)$ , для которого имеем

$$p = \langle \Pi_k^+ \Pi_k \rangle |_{\omega_k = \omega_A}, \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (12)$$

Уравнения движения для средних от операторов атома могут быть найдены из (10) с помощью соотношения

$$\frac{\partial \langle \sigma^z \rangle}{\partial t} = \text{Sp} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \sigma^z \right). \quad (13)$$

Отсюда следует, что средняя инверсия населенностей атома, взаимодействующего с резервуаром  $\{b_j\}$ , ответственным за спонтанный распад, подчиняется уравнению

$$\frac{\partial \langle \sigma^z \rangle_{spont}}{\partial t} = -(2N_T + 1) \Gamma \langle \sigma^z \rangle_{spont} - \Gamma. \quad (14)$$

Взаимодействие с резервуаром накачки  $\{\Pi_k\}$ , приводящее к отклонению от термодинамического равновесия, описывается уравнением

$$\frac{\partial \langle \sigma^z \rangle_{pump}}{\partial t} = -P \langle \sigma^z \rangle_{pump} + (2p - 1)P. \quad (15)$$

Решения уравнения (14) в стационарных условиях ( $SS$ ) имеет вид

$$\langle \sigma^z \rangle_{spont}^{SS} = -\frac{1}{2N_T + 1}, \quad (16)$$

т.е. спонтанный распад возбужденного состояния атома приводит к больцмановскому (фермиевскому) распределению населенностей, если тепловое число возбуждений положить равным  $N_T = [\exp(\hbar \omega_A / kT) - 1]^{-1}$ .

Стационарное решение уравнения (15) показывает, что действие накачки приводит к стационарной инверсии:

$$\langle \sigma^z \rangle_{\text{стат}}^{SS} = 2p - 1. \tag{17}$$

Параметр  $p$ , таким образом, характеризует степень стационарного возбуждения атомных состояний, поддерживаемого данной накачкой в отсутствие взаимодействия с полем,  $0 \leq p \leq 1$ .

Используя (1) и свойства ортонормированности базиса фоковских состояний, а также (2), (5)–(7), из (10) находим систему связанных дифференциальных уравнений для элементов матрицы плотности следующего вида [26]:

$$\begin{aligned} \rho_{1n,m}(t) &\equiv \langle \uparrow | \rho_{n,m} | \uparrow \rangle + \langle \downarrow | \rho_{n,m} | \downarrow \rangle, & \rho_{2n,m}(t) &\equiv \langle \uparrow | \rho_{n,m} | \uparrow \rangle - \langle \downarrow | \rho_{n,m} | \downarrow \rangle, \\ \rho_{3n,m}(t) &\equiv \langle \uparrow | \rho_{n,m} | \downarrow \rangle, & \rho_{4n,m}(t) &\equiv \langle \downarrow | \rho_{n,m} | \uparrow \rangle. \end{aligned} \tag{18}$$

Система уравнений для компонент (18) размерности  $4 \times (n_{\text{max}} + 1) \times (n_{\text{max}} + 1)$ , приведенная в Приложении, решалась нами численно. В начальный момент времени поле находится в общем случае в произвольном смешанном состоянии, а атом — в суперпозиции верхнего и нижнего состояний. Таким образом, матрица плотности невзаимодействующих в момент  $t = 0$  атома и поля есть

$$\rho(0) = \rho_a \otimes \rho_f,$$

$$\begin{aligned} \rho_a &= \left[ \cos \frac{\theta}{2} | \uparrow \rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} | \downarrow \rangle \right] \left[ \cos \frac{\theta}{2} \langle \uparrow | + \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \langle \downarrow | \right], \\ \rho_f &= \sum_{n,m=0}^{\infty} c_n c_m^* | n \rangle \langle m |. \end{aligned} \tag{19}$$

В частности, если поле в начальный момент времени находится в когерентном состоянии  $|\alpha\rangle$ , то для коэффициентов разложения по фоковским состояниям справедливо соотношение

$$c_n^* c_m = \frac{\alpha^{*n} \alpha^m}{\sqrt{n! m!}} \exp(-|\alpha|^2).$$

Если исходное состояние является чистым фоковским состоянием  $|n_0\rangle$ , то  $c_n^* c_m = \delta_{n,m}$ . В случае теплового состояния имеем  $c_n^* c_m = [n_T^n / (1 + n_T)^{n+1}] \delta_{n,m}$ .

### 3. ФЛУКТУАЦИИ ЧИСЛА ФОТОНОВ ВНУТРИ РЕЗОНАТОРА

Среднее число фотонов, средняя инверсия, флуктуации (дисперсия) фотонов, а также среднее поле при использовании группировки матричных элементов системы вида

(18) определяются как

$$\begin{aligned} \langle n(t) \rangle &= \text{Sp} (\rho(t) a^+ a) = \sum_{n=0}^{\infty} n \rho_{1n,n}(t), \\ \langle D(t) \rangle &= \text{Sp} (\rho(t) \sigma^z) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{2n,n}(t), \\ \text{Var} (n(t)) &\equiv \langle (\Delta n(t))^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (n - \langle n(t) \rangle)^2 \rho_{1n,n}(t), \\ \langle a^+(t) \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} \rho_{1n,n+1}(t), \quad \langle a(t) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \rho_{1n,n-1}(t). \end{aligned} \quad (20)$$

Дисперсии сопряженных квадратур  $X_+(t) = [a^+(t) + a(t)]/2$ ,  $X_-(t) = [a^+(t) - a(t)]/2i$  выражаются через матричные элементы оператора плотности:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta X_{\pm})^2 \rangle &= \frac{1}{4} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \rho_{1n,n}(t) \pm \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{n(n-1)} \rho_{1n,n-2}(t) \pm \right. \\ &\left. \pm \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)(n+2)} \rho_{1n,n+2}(t) \mp \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} \rho_{1n,n+1}(t) \pm \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \rho_{1n,n-1}(t) \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

В качестве исходного состояния поля при  $t = 0$  использовались как состояние когерентного вакуума, так и хаотическое тепловое состояние со средним числом фотонов, соответствующим оптическому диапазону излучения  $\omega_a \sim 10^{14} \text{ с}^{-1}$  при температуре  $T \approx 300 \text{ К}$ . Численное исследование системы (П.3)–(П.6) в представлении (18) при различных параметрах лазера показало, что стационарное излучение лазера обладает субпуассоновской статистикой числа фотонов, если скорость спонтанного излучения удовлетворяет условию  $\Gamma < g, \gamma$ . Максимальная степень сжатия флуктуаций числа фотонов имеет место при  $\Gamma \ll g, \gamma$  для  $T = 0$  и составляет величину 15% (см. рис. 1). При возрастании  $\Gamma \rightarrow \gamma$  степень сжатия уменьшается, и при  $\Gamma > \gamma$  излучение переходит в суперпуассоновское состояние. Значение параметра накачки  $p$  существенно влияет на стационарную статистику излучения; наибольшее сжатие имеет место при  $p = 1$  и уменьшается при  $p < 1$ . Наличие отстройки ( $\Delta \neq 0$ ) также отрицательно влияет на величину сжатия. Оптимальные значения скорости потерь резонатора  $\gamma$  и скорости накачки  $P$  по отношению к константе связи  $g$  составляют  $\gamma = P \approx 1.4g$  при  $p = 1, \Delta = 0$ , при этом фактор Фано ( $F = \text{Var}(n)/\langle n \rangle$ ) равен  $F = 0.85$  при температуре  $T < 100 \text{ К}$  и  $\omega_A = 10^{14}$ .

Как видно на рис. 2, в процессе установления стационарной генерации излучение лазера пребывает в состоянии с неклассической субпуассоновской статистикой фотонов. Уменьшение скорости потерь резонатора по отношению к скорости накачки позволяет резко уменьшить значение фактора Фано. На рис. 2 изображена динамика изменения фактора Фано для  $\gamma = 0.1g, P = 2g$  в случае лазерной генерации из состояния когерентного вакуума поля и атома на нижнем уровне. В этом случае минимальное значение  $F_{min}$  равно 0.54 при  $\langle n \rangle = 1.43$ . Таким образом, в переходном режиме генерации оказывается возможным генерация интенсивного сжатого излучения. Величина

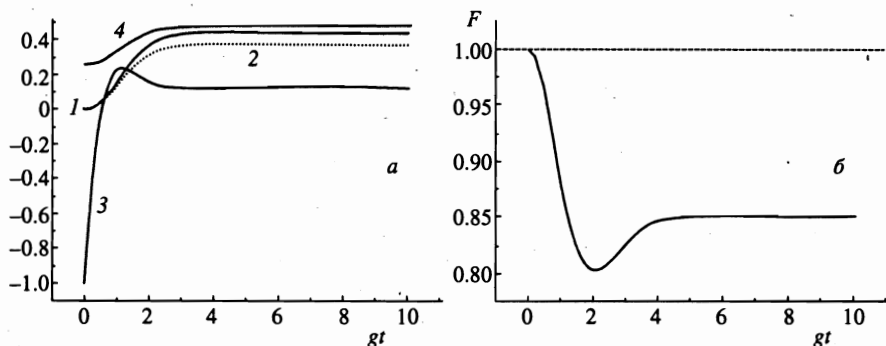


Рис. 1. а — Среднее число фотонов  $\langle n(t) \rangle$  (1), флуктуации (дисперсия) числа фотонов  $\text{Var } n(t)$  (2), средняя инверсия  $\langle D(t) \rangle$  (3) и флуктуации (дисперсии) квадратур поля  $\text{Var } X_{\pm}(t)$  (4) лазера для начального состояния поля в когерентном вакууме и атома на нижнем уровне, при  $\gamma = 1.4g$ ,  $\Gamma \ll \gamma$ ,  $P = 1.4g$ ,  $p = 1$ ,  $\Delta = 0$ ,  $T = 0$ . б — Фактор Фано  $F = \text{Var}(n)/\langle n \rangle$

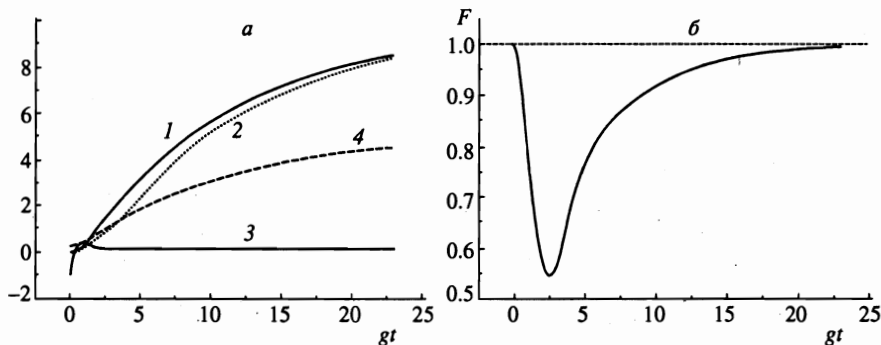


Рис. 2. То же, что на рис. 1, при  $\gamma = 0.1g$ ,  $\Gamma \ll \gamma$ ,  $P = 2g$ ,  $p = 1$ ,  $\Delta = 0$ ,  $T = 0$

сжатия в переходном режиме зависит от начального состояния. Наибольшие сжатие и интенсивность излучения достигаются в том случае, если атом находится в верхнем состоянии, а поле — в состоянии когерентного вакуума: при этом, например, для  $\gamma = 0.1g$ ,  $P = 0.5g$  достигается пятикратное сжатие ( $F_{min} = 0.19$ ) при  $gt = 1.8$  и  $\langle n \rangle = 1.2$  (рис. 3).

Квадратурное сжатие ( $\text{Var } X_+ < 1/4$  или  $\text{Var } X_- < 1/4$ ) для всех рассмотренных нами значений параметров лазера отсутствует.

#### 4. ФЛУКТУАЦИИ ЧИСЛА ФОТОНОВ НА ВЫХОДЕ РЕЗОНАТОРА

Нами предполагается, что внутри резонатора лазера электромагнитное поле находится в состоянии с дискретными значениями частот (энергий фотонов), тогда как вне резонатора поле имеет непрерывный спектр. Вследствие этого следует предполагать, что временные флуктуации электромагнитного поля внутри резонатора являются источниками флуктуаций частотного спектра излучения, выходящего через зеркало резонатора. Поле вне резонатора может быть представлено в виде суммы выходящего из

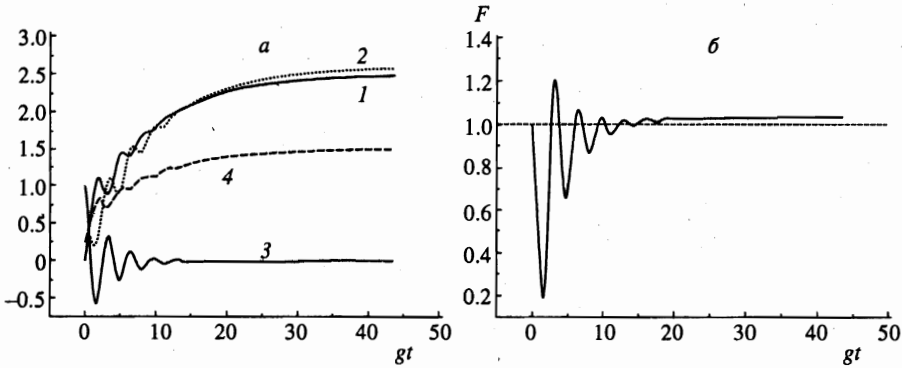


Рис. 3. То же, что на рис. 1, при  $\gamma = 0.1g$ ,  $\Gamma \ll \gamma$ ,  $P = 0.5g$ ,  $p = 1$ ,  $\Delta = 0$ ,  $T = 0$ , атом на верхнем уровне в начальный момент времени

зеркала поля излучения лазера и шумового поля резервуара-термостата, падающего на зеркало, т. е.  $a^{(out)}(t) = b^{(in)}(t) + \sqrt{\gamma}a(t)$ , где

$$b^{(in)}(t) \propto \sum_j \sqrt{\omega_j} \exp(-i\omega_j t) b_j$$

[27–29]. Гейзенберговский оператор  $a^{(out)+}(t)a^{(out)}(t)$  представляет собой оператор числа фотонов, выходящих через зеркало в единицу времени. величиной, характеризующей статистику излучения лазера, проходящего через выходное зеркало, является стационарный спектр флуктуации [12] следующего вида:

$$V^{(out)}(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} 2 \int_0^{\infty} d\tau \cos \omega \tau [\langle n^{(out)}(t+\tau)n^{(out)}(t) \rangle - \langle a^{(out)+}(t+\tau)a^{(out)}(t) \rangle^2]. \quad (22)$$

Поскольку двухвременные корреляторы в стационарных условиях являются четными функциями  $\tau$ , в (22) использовано cos-преобразование Фурье. Перестановочные соотношения для операторов поля, составляющих непрерывный спектр вне резонатора, имеют вид [27, 28]

$$[a^{(out)}(t+\tau), a^{(out)+}(t)] = \delta(\tau). \quad (23)$$

Отсюда получаем, что двухвременная корреляционная функция операторов числа фотонов есть

$$\begin{aligned} \langle n^{(out)}(t+\tau)n^{(out)}(t) \rangle &\equiv \langle a^+(t+\tau)a(t+\tau)a^+(t)a(t) \rangle^{(out)} = \\ &= \langle a^+(t+\tau)a(t) \rangle^{(out)} \delta(\tau) + \langle a^+(t)a^+(t+\tau)a(t+\tau)a(t) \rangle^{(out)}, \end{aligned} \quad (24)$$

т. е. спектр флуктуаций числа фотонов поля на выходе резонатора состоит из слагаемых дробового шума и хронологически и нормально упорядоченного спектра флуктуаций:

$$V^{(out)}(\omega) = \langle n^{(out)}(t_{SS}) \rangle + : V^{(out)}(\omega) : . \quad (25)$$



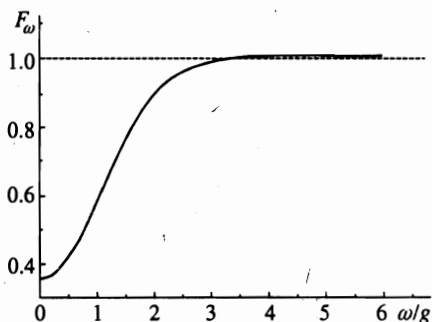


Рис. 4. Спектральный фактор Фано излучения лазера вне резонатора при параметрах накачки  $P = 1.4$ ,  $p = 1$  и потерь  $\gamma = 2 \gg \Gamma$  (в единицах  $g$ )

Корреляторы поля дискретной моды излучения внутри резонатора связаны с корреляторами полей непрерывного спектра вне резонатора, как показано в [27–29], в случае одного пропускающего зеркала следующим образом:

$$\langle a^+(t)a(t) \rangle^{(out)} = \gamma \langle a^+(t)a(t) \rangle, \tag{26}$$

$$\langle a^+(t)a^+(t+\tau)a(t+\tau)a(t) \rangle^{(out)} = \gamma^2 \langle a^+(t)a^+(t+\tau)a(t+\tau)a(t) \rangle. \tag{27}$$

Подставляя (26) и (27) в (21), окончательно находим для спектрального фактора Фано следующую формулу:

$$F(\omega) \equiv \frac{V^{(out)}(\omega)}{\langle n \rangle^{(out)}} = 1 + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2\gamma}{\langle a^+(t)a(t) \rangle} \int_0^\infty d\tau [\langle a^+(t)a^+(t+\tau)a(t+\tau)a(t) \rangle - \langle a^+(t+\tau)a(t+\tau) \rangle \langle a^+(t)a(t) \rangle] \cos \omega \tau. \tag{28}$$

В стационарных условиях для корреляционных функций операторов поля внутри резонатора нетрудно получить следующее из квантовой теоремы регрессии выражение (см., например, [25])

$$\langle a^+(t)a^+(t+\tau)a(t+\tau)a(t) \rangle_{SS} = \text{Sp} (a^+ a \tilde{\rho}(\tau)), \tag{29}$$

где оператор  $\tilde{\rho}(\tau) \equiv \tilde{\rho}(t+\tau)$  удовлетворяет уравнению Лиувилля (10) с начальным условием ( $\tau = 0$ ):

$$\tilde{\rho}_{n,m}(0) = \sqrt{(n+1)(m+1)} \rho_{n+1,m+1}(t_{SS}). \tag{30}$$

Расчет показал, что вне резонатора сжатие излучения лазера еще более значительно: при оптимальных величинах параметров накачки ( $P = 1.4$ ,  $p = 1$ ) и потерь ( $\gamma = 2$ ) спектральный фактор Фано ниже уровня дробового шума (классический предел) почти в три раза и составляет величину 0.3567 при нулевой частоте (рис. 4). Положения оптимумов сжатия вне резонатора и внутри резонатора не совпадают между собой; наибольшая величина сжатия имеет место вне резонатора при большей скорости потерь, вследствие чего среднее число фотонов излучения при этом уменьшается ( $\langle n \rangle = 0.29$ ).

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами проанализирована динамика квантово-статистических свойств излучения одноатомного лазера. Значительное отклонение величины флуктуаций числа фотонов внутри резонатора от уровня дробового шума (до 15%) обнаружено в стационарных условиях, когда величины скорости накачки и скорости потерь через зеркала много больше скорости спонтанного распада и сопоставимы по величине с константой связи атомного электрона с модой резонатора. Показано, что при специальных условиях многократное сжатие присутствует в переходном динамическом режиме. Сжатие излучения, выходящего через зеркало резонатора, значительно превышает его величину внутри резонатора: фактор Фано на нулевой частоте достигает 0.36.

Рассматриваемый нами случай, когда константа связи много меньше скорости спонтанного излучения и сопоставима по величине со скоростями потерь резонатора и накачки, не является характерным для большинства известных лазеров. При этом наилучшим образом удовлетворяет указанным требованиям лазер на переходах между высоковозбужденными состояниями ридберговских атомов, в случае которых константа связи может достигать величины  $g \sim 10^6 \text{ с}^{-1}$ .

В настоящей работе показано, что одноатомный двухуровневый лазер с некогерентной накачкой является потенциальным источником неклассического излучения с флуктуациями числа фотонов значительно ниже дробового уровня.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Используя соотношения для операторов рождения и уничтожения в фоковском базисе

$$\begin{aligned} a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle, & a^+|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \\ \langle n|a &= \sqrt{n+1}\langle n+1|, & \langle n|a^+ &= \sqrt{n}\langle n-1|, \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

выражения (2), (5)–(7), а также равенства

$$\sigma^z \sigma^+ = \sigma^+, \quad \sigma^+ \sigma^z = -\sigma^+, \quad \sigma^- \sigma^z = \sigma^-, \quad (\text{П.2})$$

из уравнения Лиувилля (10) непосредственно получаем уравнения движения для элементов матрицы плотности (9) вида (18). В результате

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{1,n,m} &= ig \left( \sqrt{m+1} \rho_{3,n,m+1} - \sqrt{n} \rho_{3,n-1,m} + \sqrt{m} \rho_{4,n,m-1} - \sqrt{n+1} \rho_{4,n+1,m} \right) + \\ &+ \frac{\gamma}{2} L \rho_1, \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{2,n,m} &= ig \left( \sqrt{m+1} \rho_{3,n,m+1} + \sqrt{n} \rho_{3,n-1,m} - \sqrt{m} \rho_{4,n,m-1} - \sqrt{n+1} \rho_{4,n+1,m} \right) + \\ &+ \frac{\gamma}{2} L \rho_2 + [P(2p-1) - \Gamma] \rho_{1,n,m} - [\Gamma(2N_T + 1) + P] \rho_{2,n,m}, \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{3,n,m} &= i\Delta \rho_{3,n,m} + i\frac{g}{2} \left( \sqrt{m} \rho_{1,n,m-1} - \sqrt{n+1} \rho_{1,n+1,m} + \sqrt{m} \rho_{2,n,m-1} + \sqrt{n+1} \rho_{2,n+1,m} \right) + \\ &+ \frac{\gamma}{2} L \rho_3 - \frac{\Gamma(2N_T + 1) + P}{2} \rho_{3,n,m}, \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{4,n,m} = & i\Delta\rho_{4,n,m} + i\frac{g}{2} \left( \sqrt{m+1} \rho_{1,n,m+1} - \sqrt{n} \rho_{1,n-1,m} - \sqrt{m+1} \rho_{2,n,m+1} - \sqrt{n} \rho_{2,n-1,m} \right) + \\ & + \frac{\gamma}{2} L\rho_4 - \frac{\Gamma(2N_T + 1) + P}{2} \rho_{4,n,m}, \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

где общий для всех уравнений (П.3)–(П.6) член, обусловленный потерями резонатора через зеркала, может быть записан в виде

$$\begin{aligned} L\rho_j = & (n_T + 1) \left[ 2\sqrt{(n+1)(m+1)} \rho_{j,n+1,m+1} - (m+n) \rho_{j,n,m} \right] + \\ & + n_T \left[ 2\sqrt{nm} \rho_{j,n-1,m-1} - \rho_{j,n,m} (n+m+2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

### Литература

1. G. S. Agarwal and S. Dutta Gupta, Phys. Rev. A **42**, 1737 (1990).
2. Y. Mu and C. M. Savage, Phys. Rev. A **46**, 5944 (1992).
3. G. M. Meyer, H.-J. Briegel, and H. Walther, Europhys. Lett. **37**, 317 (1997).
4. H.-J. Briegel, G. M. Meyer, and B.-G. Englert, Phys. Rev. A **53**, 1143 (1996).
5. G. M. Meyer, M. Löffler, and H. Walther, Phys. Rev. A **56**, R1099 (1997).
6. M. Löffler, G. M. Meyer, and H. Walther, Phys. Rev. A **55**, 3923 (1997).
7. C. Ginzler, H.-J. Briegel, U. Martini, B.-G. Englert, and A. Schenzle, Phys. Rev. A **48**, 732 (1993).
8. Ю. М. Голубев, И. В. Соколов, ЖЭТФ **87**, 408 (1984).
9. Y. Yamamoto, S. Mashida, and O. Nilson, Phys. Rev. A **34**, 4025 (1986).
10. C. Benkert, M. O. Scully, J. Bergou, L. Davidovich, M. Hillery, and M. Orszag, Phys. Rev. A **41**, 2756 (1990).
11. C. Benkert and M. O. Scully, Phys. Rev. A **42**, 2817 (1990).
12. L. Davidovich, J. Mod. Phys. **68**, 127 (1996).
13. M. A. Marte, H. Ritsch, and D. F. Walls, Phys. Rev. Lett. **61**, 1093 (1988).
14. T. A. B. Kennedy and D. F. Walls, Phys. Rev. A **40**, 6366 (1989).
15. H. Ritsch, P. Zoller, C. W. Gardiner, and D. F. Walls, Phys. Rev. A **44**, 3361 (1991).
16. H. Ritsch and P. Zoller, Phys. Rev. A **45**, 1881 (1992).
17. H. Ralph and C. M. Savage, Phys. Rev. A **44**, 7809 (1991).
18. D. L. Hart and T. A. B. Kennedy, Phys. Rev. A **44**, 4572 (1991).
19. А. В. Козловский, А. Н. Ораевский, КЭ **21**, 273 (1994).
20. А. В. Козловский, ЖЭТФ **104**, 2995 (1993).
21. A. Eschmann and C. W. Gardiner, Phys. Rev. A **54**, 3373 (1996).
22. G. M. D. D'Ariano, C. Macchiavello, and M. G. A. Paris, Phys. Rev. Lett. **73**, 3187 (1994).
23. А. В. Козловский, А. Н. Ораевский, ЖЭТФ **109**, 1524 (1996).
24. М. Лэкс, *Флуктуации и когерентные явления*, Мир, Москва (1974) (M. Lax, *Fluctuations and coherence phenomena in classical and quantum physics*, ed. by M. Chretien, E. P. Gross, S. Deser, Gordon, and Breach, New York (1968)).
25. К. В. Гарднер, *Стохастические методы в естественных науках*, Мир, Москва (1986) (C. W. Gardiner, *Handbook of stochastic methods*, ed. by H. Haken, Springer-Verlag, Berlin (1985)).
26. B. Daeubler, H. Risken, and L. Schoendorff, Phys. Rev. A **46**, 1654 (1992).
27. C. W. Gardiner and M. J. Collett, Phys. Rev. A **31**, 3761 (1985).
28. M. J. Collett and C. W. Gardiner, Phys. Rev. A **30**, 1386 (1984).
29. H. J. Carmichael, J. Opt. Soc. Amer. B **4**, 1588 (1987).