

ИЗЛУЧЕНИЕ ПРОТЯЖЕННОГО ДЖОЗЕФСОНОВСКОГО ПЕРЕХОДА В ТОНКОЙ ПЛЕНКЕ

А. С. Малишевский*, В. П. Силин, С. А. Урюпин

Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
117924, Москва, Россия

Поступила в редакцию 14 июля 1998 г.

Сформулированы уравнения пространственно-временной нелокальной электродинамики, описывающие нелинейные вихревые состояния джозефсоновского перехода в пленке, толщина которой много меньше лондоновской длины. Изучен спектр и затухание обобщенных волн Свихарта, распространяющихся в таком переходе. В области сверхсветовых фазовых скоростей волны найден радиационный декремент затухания, связанный с возможностью высвечивания электромагнитных волн. Рассмотрена диаграмма направленности высвечивания электромагнитных волн. Изучено излучение нелинейных состояний, размеры которых превышают расстояние, проходимое светом в вакууме за характерное время изменения разности фаз. Показано, что плотность потока излучения, высвечиваемого такими состояниями, сосредоточена в плоскости ортогональной оси туннельного перехода и слабо зависит от угла наблюдения в этой плоскости.

1. ВВЕДЕНИЕ

Излучательные свойства джозефсоновских переходов в течение многих лет привлекают внимание специалистов (см., например, [1–3]). Большое число теоретических и экспериментальных работ (см. обзор литературы в книге [3, § 11.4]) было посвящено изучению микроволнового излучения джозефсоновскими переходами, имеющими размеры, много меньшие длины волны самого излучения. Другое направление исследований нацелено на изучение свойств протяженных джозефсоновских переходов, вдоль которых могут распространяться как линейные волны Свихарта, так и солитоны. В протяженных переходах открывается возможность изучения таких явлений как взаимодействие волны Свихарта и поверхностной электромагнитной волны [4], излучения электромагнитных волн движущимися вихрями [5–9].

Еще одной особенностью протяженных переходов является возможность высвечивания волн Свихарта и нелинейных вихревых состояний. В работе [10] на основе последовательного рассмотрения электромагнитных полей в сверхпроводящих электродах и вакууме дано количественное описание явления высвечивания из волноводного сэндвича. Согласно [10] высвечивание электромагнитных волн приводит к дополнительному затуханию волн Свихарта, фазовые скорости которых больше скорости света. Наиболее ярко эффект высвечивания проявляется в том случае, когда толщина электродов сэндвича меньше лондоновской длины и электромагнитное поле из джозефсоновского перехода легко проникает в вакуум.

* E-mail: malish@sci.lebedev.ru

Можно ожидать, что эффект высвечивания электромагнитных волн будет проявляться еще проще в случае джозефсоновского перехода в тонкой пленке, толщина которой D много меньше лондоновской длины λ . Другой особенностью джозефсоновской электродинамики тонких пленок является большая глубина проникновения поля в пленку $\lambda_e = \lambda^2/D \gg \lambda$ [11], что делает актуальным использование нелокальной связи магнитного поля с разностью фаз волновых функций по разные стороны туннельного перехода [12].

Имея ввиду эти особенности, во втором разделе мы приводим вывод уравнения для разности фаз, учитывающего как эффект пространственно-нелокальной связи, так и возможность высвечивания электромагнитного поля. Получено новое нелокальное в пространстве и во времени интегродифференциальное уравнение для разности фаз, которое в пренебрежении временной дисперсией переходит в известное [12–14]. При использовании такого нелокального уравнения для разности фаз в третьем разделе найден закон дисперсии обобщенных волн Свихарта. Показано, что в области фазовых скоростей меньших скорости света закон дисперсии отличается от установленного ранее [14] тогда, когда существенно взаимодействие поверхностной электромагнитной волны и волны Свихарта. Различие оказывается еще более существенным в пределе сверхсветовых фазовых скоростей, когда не только перенормируется действительная часть частоты волн Свихарта, но и появляется дополнительное затухание, обусловленное высвечиванием волн. Найден радиационный декремент затухания и показано, что в туннельном переходе с небольшой проводимостью он может превосходить декремент затухания, связанный с омическими потерями. В четвертом разделе установлена диаграмма направленности излучения, высвечиваемого волной Свихарта. Если $v = \omega/ck_z$ — отношение фазовой скорости волны к скорости света близко к единице, $0 < v^2 - 1 \ll 1$, то излучение волн происходит вдоль туннельного перехода. Если же $v \gg 1$, то поток излучения S в основном сконцентрирован в плоскости ортогональной оси перехода. Найдена явная зависимость плотности потока от угла наблюдения в этой же плоскости. Пятый раздел посвящен рассмотрению высвечивания крупномасштабных нелинейных распределений разности фаз, имеющих характерные размеры много большие расстояний, проходимых светом в вакууме за характерное время изменения разности фаз. В первом приближении такие распределения описываются теми же функциями, что и нелинейные колебания математического маятника. Показано, что поток излучения, высвечиваемый крупномасштабными нелинейными структурами, в основном сосредоточен в плоскости ортогональной оси туннельного перехода и постоянен в широком диапазоне углов наблюдения в этой плоскости. Спектральный состав излучения зависит от того, каким решением уравнения математического маятника описывается нелинейное состояние. В случае решения, отвечающего колебаниям конечной амплитуды, спектр излучения содержит нечетные гармоники основной частоты, а для решения, соответствующего вращающемуся маятнику, в спектре излучения представлены четные гармоники. Если нелинейное состояние описывается решением вида 2π -кинк, то излучается непрерывный спектр частот, меньших или порядка джозефсоновской.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим джозефсоновский переход в тонкой сверхпроводящей пленке, расположенной симметрично относительно плоскости $y = 0$. Толщину пленки D вдоль оси

у будем считать много меньшей лондоновской глубины λ . Примем, что туннелирование куперовских пар происходит через несверхпроводящий слой толщиной $2d$, расположенный симметрично относительно оси $x = y = 0$. Для выяснения электродинамики такого перехода воспользуемся уравнениями для векторного $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ и скалярного $V(\mathbf{r}, t)$ потенциалов в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0, \tag{2.1}$$

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} V(\mathbf{r}, t) = -\frac{4\pi}{c} \delta(y) D \mathbf{j}(\mathbf{r}_{\parallel}, t), \tag{2.2}$$

$$\Delta V(\mathbf{r}, t) = 0, \tag{2.3}$$

где c — скорость света, $\delta(y)$ — дельта-функция, $\mathbf{j}(\mathbf{r}_{\parallel}, t)$ — плотность тока в пленке, $\mathbf{r}_{\parallel} = (x, 0, z)$,

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}_{\parallel}, t) = -\frac{c}{4\pi\lambda^2} \left[\frac{\phi_0}{2\pi} \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}_{\parallel}, t) + \mathbf{A}(y = 0, \mathbf{r}_{\parallel}, t) \right], \tag{2.4}$$

$\phi_0 = \pi \hbar c / |e|$ — квант магнитного потока, \hbar — постоянная Планка, e — заряд электрона,

$$\Phi(\mathbf{r}_{\parallel}, t) = \eta(-x) \Phi_1(\mathbf{r}_{\parallel}, t) + \eta(x) \Phi_2(\mathbf{r}_{\parallel}, t), \tag{2.5}$$

$\eta(x) = 1$ ($x > 0$) и $\eta(x) = 0$ ($x < 0$) — функция Хэвисайда, $\Phi_1(\mathbf{r}_{\parallel}, t)$ и $\Phi_2(\mathbf{r}_{\parallel}, t)$ — фазы волновых функций куперовских пар по разные стороны от туннельного перехода. При написании выражения (2.4) опущен ток смещения, который мал по сравнению со сверхпроводящим током в пленке. Кроме того, выражение (2.5) не учитывает конечности толщины туннельного перехода, а выражение для плотности сверхпроводящего тока в пленке (см. (2.2), (2.4)) представлено в виде дельта-функции $\delta(y)$. Таким образом, уравнения (2.2), (2.4) и (2.5) пригодны для описания электромагнитных структур, имеющих пространственные масштабы, большие как ширины туннельного перехода $2d$, так и толщины пленки D .

Вследствие калибровочной инвариантности теории скалярный потенциал $V(y = 0, \mathbf{r}_{\parallel}, t)$ в сверхпроводящей пленке связан с фазой волновой функции соотношением (см., например, [15])

$$V(y = 0, \mathbf{r}_{\parallel}, t) = \frac{\phi_0}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}_{\parallel}, t). \tag{2.6}$$

Уравнения (2.1)–(2.6) позволяют связать электромагнитные потенциалы с разностью фаз на переходе

$$\varphi(z, t) = \Phi_1(0, z, t) - \Phi_2(0, z, t). \tag{2.7}$$

Из симметрии задачи и уравнений (2.1) – (2.4) видно, что потенциалы $A_x(\mathbf{r}, t)$, $A_z(\mathbf{r}, t)$ и $V(\mathbf{r}, t)$ — четные, а $A_y(\mathbf{r}, t)$ — нечетная функция аргумента y . Поэтому достаточно найти решение уравнений (2.1)–(2.4) при $y \geq 0$ и воспользоваться граничными условиями

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathbf{A}_{\parallel}(y, \mathbf{r}_{\parallel}, t)|_{y=0} = \frac{1}{2\lambda_e} \left[\frac{\phi_0}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_{\parallel}} \Phi(\mathbf{r}_{\parallel}, t) + \mathbf{A}_{\parallel}(y = 0, \mathbf{r}_{\parallel}, t) \right], \tag{2.8}$$

$$A_y(y = 0, r_{\parallel}, t) = 0, \quad (2.9)$$

где вектор A_{\parallel} имеет только компоненты A_x и A_z . Соотношение (2.8) следует из уравнения (2.2), если учесть непрерывность потенциалов $A_{\parallel}(r, t)$ и $V(r, t)$ при $y = 0$ и нечетность производных $\partial A_{\parallel}/\partial y$. Условие (2.9) следует из непрерывности и нечетности функции A_y и означает отсутствие компоненты тока j_y (2.4) нормальной поверхности пленки. Решение уравнений (2.1)–(2.4) в области $y \geq 0$, удовлетворяющее граничным условиям (2.8), (2.9), представим в виде (см. Приложение А):

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}(r, t) \\ V(r, t) \end{array} \right\} &= \frac{\phi_0}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \varphi(z', t') \times \\ &\times \exp [i\omega(t' - t) + i\mathbf{k}r_{\parallel} - ik_z z'] \frac{1}{G} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{g} \\ g_v \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

В (2.10) использованы обозначения для функций:

$$g_x = \frac{k_x^2}{k} \exp(-ky) - \frac{G + 2\lambda_e k_x^2}{1 + 2\lambda_e \psi} \exp(-\psi y), \quad (2.11)$$

$$g_y = ik_x [\exp(-ky) - \exp(-\psi y)], \quad (2.12)$$

$$g_z = \frac{k_x k_z}{k} \left[\exp(-ky) - \frac{2\lambda_e k}{1 + 2\lambda_e \psi} \exp(-\psi y) \right], \quad (2.13)$$

$$g_v = \frac{\omega}{c} \frac{k_x}{k} \exp(-ky), \quad (2.14)$$

и величин G и ψ :

$$G = \psi - 2\lambda_e \omega^2 / c^2, \quad (2.15)$$

$$\psi = \sqrt{k^2 - \omega^2/c^2} \eta (c^2 k^2 - \omega^2) - i \sqrt{\omega^2/c^2 - k^2} \eta (\omega^2 - c^2 k^2) \text{sign } \omega. \quad (2.16)$$

Дополненное обозначениями (2.11)–(2.16) соотношение (2.10) устанавливает нелокальную во времени и пространстве связь электромагнитных потенциалов с разностью фаз волновых функций $\varphi(z, t)$. Подынтегральное выражение в (2.10) имеет особенность при $G = 0$, когда

$$\frac{\omega^2}{c^2 k^2} = \frac{1}{8\lambda_e^2 k^2} \left(\sqrt{1 + 16\lambda_e^2 k^2} - 1 \right) \leq 1. \quad (2.17)$$

Формула (2.17) описывает закон дисперсии поверхностной электромагнитной волны, у которой компоненты векторного потенциала A_x и A_z — четные, а A_y — нечетная функция переменной y . Правильный обход особенности $G = 0$ достигается при учете потери энергии поверхностной электромагнитной волны в сверхпроводящей пленке.

Изложенное выше решение уравнений (2.1)–(2.6) с граничными условиями (2.8), (2.9) позволило нам связать векторный и скалярный потенциалы в вакууме и сверхпроводящей пленке со скачком фазы между сверхпроводниками, разделенными контактом, физические свойства которого пока никак не учитывались. Решение (2.10)–(2.17) получено из уравнений (2.1)–(2.4), (2.6), пригодных вне контакта, а он, в свою очередь, определяет вид решения только из-за наличия скачка фазы при переходе через контакт (см. (2.5), (2.7)).

Решенная выше задача необходима для получения уравнения для разности фаз φ на разделяющем пленку переходном слое, которому отвечает скачок фазы волновых функций сверхпроводника. Для получения такого уравнения можно учесть подход работ [12, 13], согласно которому формулы (2.10)–(2.17) используются для вычисления x -компоненты плотности сверхтока на контакте (ср. (2.4)):

$$j_x(x = 0, z, t) = -\frac{c}{4\pi\lambda^2} \left[\frac{\phi_0}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \Phi(\mathbf{r}_{\parallel}, t) \Big|_{x=0} + A_x(x = 0, y = 0, z, t) \right]$$

через разность фаз на контакте. При этом согласно (2.6) и (2.10) имеем

$$j_x(x = 0, z, t) = \frac{c}{4\pi\lambda^2} \frac{\phi_0}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d\mathbf{k} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \varphi(z', t') \times \\ \times \exp [ik_z(z - z') - i\omega(t - t')] \frac{1}{G} \frac{G + 2\lambda_e k_x^2}{1 + 2\lambda_e \psi}.$$

С другой стороны, согласно [12, 13], сверхток через джозефсоновский контакт равен сумме [1–3] джозефсоновского тока

$$j_c \sin \varphi(z, t), \tag{2.18}$$

тока проводимости

$$\sigma E_x(x = 0, y = 0, z, t) = \frac{\hbar\sigma}{4|e|d} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(z, t) \tag{2.19}$$

и тока смещения

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} E_x(x = 0, y = 0, z, t) = \frac{\hbar\varepsilon}{16\pi|e|d} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(z, t), \tag{2.20}$$

где j_c — критическая плотность тока Джозефсона, σ и ε — соответственно проводимость и диэлектрическая проницаемость туннельного перехода.

Итак, сумма токов (2.18)–(2.20) должна равняться x -компоненте тока (2.4) при $x = 0$, что дает

$$\sin \varphi(z, t) + \frac{\beta}{\omega_j^2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(z, t) + \frac{1}{\omega_j^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(z, t) = \frac{j_x(x = 0, z, t)}{j_c}, \tag{2.21}$$

где $\beta = 4\pi\sigma/\varepsilon$, $\omega_j = 4\pi(dcj_c/\varepsilon\phi_0)^2$ — джозефсоновская частота. Используя явное выражение для $j_x(x = 0, z, t)$, приходим к интегродифференциальному уравнению для разности фаз:

$$\begin{aligned} \sin \varphi(z, t) + \frac{\beta}{\omega_j^2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(z, t) + \frac{1}{\omega_j^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(z, t) = \\ = -4l\lambda_e \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \varphi(z', t') Q(z - z', t - t'), \end{aligned} \quad (2.22)$$

где $l = \lambda_j^2/\lambda$, $\lambda_j = (c\phi_0/\lambda j_c)^{1/2}/4\pi$ — джозефсоновская длина, а ядро $Q(z, t)$ пространственно-временной нелокальной связи имеет вид

$$Q(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{2\pi} \exp(ik_z z - i\omega t) Q(k_z, \omega), \quad (2.23)$$

$$Q(k_z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x}{2\pi} \frac{1}{k^2} \left[\frac{\psi k_x^2}{1 + 2\psi\lambda_e} - \frac{\omega^2 k_x^2}{\psi c^2 - 2\lambda_e \omega^2} \right] \equiv Q'(k_z, \omega) + iQ''(k_z, \omega). \quad (2.24)$$

Конечно, можно пойти по другому пути (см., например, [1]), когда записывается уравнение Максвелла в контакте

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

где для левой части этого уравнения используется магнитное поле, определяемое потенциалами (2.10). Можно убедиться, что возникающее при этом уравнение для разности фаз оказывается таким же, как и при использованном нами выше подходе работ [12, 13], основанном на условии непрерывности тока.

Используя функцию ψ (2.16), мнимую часть фурье-компоненты ядра $Q''(k_z, \omega)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} Q''(k_z, \omega) = \left\{ \frac{1}{a^2 + 1} \left[a \sqrt{a^2 \omega^2 + \omega^2 - c^2 k_z^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{c^2 k_z^2}{\sqrt{a^2 \omega^2 + \omega^2 - a^2 c^2 k_z^2}} \right] - |\omega| \right\} \frac{\omega}{2c^2} \eta(\omega^2 - c^2 k_z^2), \end{aligned} \quad (2.25)$$

где

$$a \equiv 2\lambda_e |\omega|/c. \quad (2.26)$$

Выражение для действительной части фурье-компоненты ядра $Q'(k_z, \omega)$ более громоздкое (см. Приложение В), но оно имеет сравнительно простые асимптотики в представляющих интерес предельных случаях. В частности, при $|\omega| \ll c|k_z|$ и $a \ll 1$ из (В.1) и (В.6) имеем

$$Q'(k_z, \omega) = \frac{k_z^2}{\pi} Q(2\lambda_e |k_z|) - \frac{\omega^2}{\pi c^2} \ln \frac{1}{d|k_z|}, \quad (2.27)$$

где функция $Q(x)$ имеет вид [14]

$$Q(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}} \arctg \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{1 + x}. \quad (2.28)$$

В пределе низких частот, когда можно пренебречь вторым слагаемым в формуле (2.27), фурье-компонента ядра $Q(k_z, \omega)$ (2.24), (2.27) переходит в известный результат работы [14]. В общем случае $Q(k_z, \omega)$, в отличие от [14], зависит от частоты. Частотная дисперсия возникла вследствие последовательного описания электромагнитных потенциалов в вакууме и позволяет, в частности, исследовать влияние вакуумного поля на дисперсионные свойства джозефсоновского перехода. Особенно ярко частотная дисперсия проявляется в пределе, когда $|\omega| \gg c|k_z|$. В этом пределе, но при $a \ll 1$ из (В.1) и (В.7) находим

$$Q'(k_z, \omega) = \frac{k_z^2}{\pi} \ln \frac{c}{\lambda_e |\omega|} - \frac{\omega^2}{\pi c^2} \ln \frac{c}{d|\omega|}. \tag{2.29}$$

Отметим, что при $|\omega| \sim c|k_z|$ выражения (2.27), (2.29) хорошо сшиваются. Это означает, что при $a \ll 1$ формул (2.27), (2.29) достаточно для описания всего диапазона изменения параметра $|\omega/c k_z|$.

В заключение этого раздела подчеркнем, что в соответствии с выражением (2.19) уравнение (2.22) учитывает омические потери тока, текущего через джозефсоновский переход. Это отвечает нелокальной модели работ [16, 17], получившей развитие в работе [18]. При этом не учитываются омические потери в сверхпроводниках, обусловленные наличием нормальных электронов, учет которых в работе [19] позволил расширить нелокальное описание диссипации в джозефсоновских переходах с большим значением критической плотности тока. Пренебрежение в нашем рассмотрении вкладом нормальных электронов в сверхпроводниках возможно, во-первых, при достаточно низких температурах, когда доля нормальных электронов мала, а во-вторых, тогда, когда рассматриваемые состояния оказываются достаточно длинноволновыми, что в обсуждаемых ниже задачах высвечивания волн из джозефсоновского перехода выполняется.

3. ВОЛНЫ СВИХАРТА

Воспользуемся нелокальным во времени и пространстве уравнением (2.22)–(2.24) для изучения бегущих вдоль перехода линейных волн вида

$$\varphi(z, t) = \frac{1}{2} \varphi_0 \exp(ik_z z - i\omega t) + \text{c.c.}, \quad k_z > 0, \tag{3.1}$$

где $|\varphi_0| \ll 1$. Тогда, заменяя $\sin \varphi$ на аргумент φ , получим дисперсионное уравнение, описывающее связь частоты ω и компоненты волнового вектора k_z :

$$\omega^2 + i\beta\omega - \omega_j^2 = 4 \frac{d}{\varepsilon D} c^2 [Q'(k_z, \omega) + iQ''(k_z, \omega)]. \tag{3.2}$$

Рассмотрим следствия уравнения (3.2) в наиболее интересном случае, когда

$$|\omega| \ll c/2\lambda_e = cD/2\lambda^2. \tag{3.3}$$

При типичных значениях лондоновской длины, $\lambda \sim 10^{-5}$ см, и толщины сверхпроводящей пленки, $D \sim 3 \cdot 10^{-7}$ см, неравенство (3.3) выполнено, если $|\omega| \ll 5 \cdot 10^{13}$ с⁻¹. Помимо этого условия, как обычно, считается выполненным неравенство

$$|\omega| \ll \Delta/\hbar \tag{3.4}$$

(Δ — ширина сверхпроводящей щели), которое при $\Delta \sim 100$ К дает $|\omega| \ll 1.4 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$.

Обсудим сначала следствия уравнения (3.2) в пределе фазовых скоростей волн много меньших скорости света,

$$|\omega/k_z| \ll c. \quad (3.5)$$

В этом пределе $Q''(k_z, \omega) = 0$ (2.25), а действительная часть фурье-компоненты ядра $Q'(k_z, \omega)$ описывается выражениями (2.27), (2.28). Подставляя (2.27) в уравнение (3.2) и считая $\omega \equiv \omega' - i\gamma \simeq \omega'$, что оправдано при малых значениях β , получим связь между действительной частью частоты ω' и компонентой волнового вектора k_z :

$$\omega'^2 = \omega_j^2 \left[1 + \frac{4}{\pi} k_z^2 l \lambda_e Q(2\lambda_e k_z) \right] / \Lambda(k_z), \quad (3.6)$$

где функция $\Lambda(k_z)$ логарифмически слабо зависит от k_z :

$$\Lambda(k_z) \equiv 1 + \frac{4}{\pi} \frac{d}{\varepsilon D} \ln \left(\frac{1}{dk_z} \right). \quad (3.7)$$

Закон дисперсии (3.6) отличается от известного [14, 20] наличием в знаменателе функции $\Lambda(k_z)$, возникновение которой можно интерпретировать как следствие влияния поверхностной электромагнитной волны (2.17) на волну Свихарта. Для типичных джозефсоновских переходов в тонкой пленке величины $2d$ и D одного порядка, а $\varepsilon \sim 2$, что дает $4d/\pi\varepsilon D \sim 0.3$. С другой стороны, характерные масштабы изменения разности фаз вдоль оси y порядка λ_e , т. е. $\ln(1/dk_z) \sim \ln(\lambda_e/d) \sim 7$. В итоге получаем $\Lambda \sim 3$. Поверхностная электромагнитная волна влияет и на затухание волны Свихарта, обусловленное омическими потерями энергии в туннельном переходе. Используя закон дисперсии (3.6), для соответствующего декремента затухания γ из (3.2) находим

$$\gamma = \beta/2\Lambda(k_z) < \beta/2. \quad (3.8)$$

Перейдем к анализу уравнения (3.2) в противоположном (3.5) пределе, когда фазовая скорость волны Свихарта превышает скорость света:

$$|\omega/k_z| \gg c. \quad (3.9)$$

Тогда, принимая во внимание соотношения (2.25), (2.29) и считая $\omega' \gg \gamma$, для определения связи между ω' и k_z получаем уравнение

$$\omega'^2 = \omega_j^2 + \frac{4}{\pi} \frac{d}{\varepsilon D} c^2 \left\{ k_z^2 \ln \frac{c}{\lambda_e \omega'} - \frac{\omega'^2}{c^2} \ln \frac{c}{d\omega'} \right\}. \quad (3.10)$$

Поскольку в области релятивистских фазовых скоростей частота ω' близка к джозефсоновской частоте, то из (3.10) с логарифмической точностью находим

$$\omega'^2 = \omega_j^2 \left(1 + \frac{4}{\pi} k_z^2 l \lambda_e \ln \frac{c}{\lambda_e \omega_j} \right) / \Lambda \left(\frac{\omega_j}{c} \right). \quad (3.11)$$

Отметим, что при $\omega' \sim ck_z$ в силу условия (3.3) закон дисперсии (3.11) переходит в закон (3.6), реализующийся при малых фазовых скоростях волн Свихарта.

Для вычисления малого декремента затухания воспользуемся выражением (2.25), которое в условиях неравенства (3.3) и при

$$\omega^2 - c^2 k_z^2 \gg a^2 \omega^2 \tag{3.12}$$

имеет вид

$$Q''(k_z, \omega) = \frac{1}{2} \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \text{sign } \omega. \tag{3.13}$$

Тогда, для $\gamma \ll \omega'$ из (3.2) получаем

$$\gamma = \left[\frac{\beta}{2} + \frac{d}{\epsilon D \omega'} (\omega'^2 - c^2 k_z^2) \right] / \Lambda \left(\frac{\omega'}{c} \right), \tag{3.14}$$

где частота ω' описывается выражением (3.11).

Если вместо условия (3.12) выполнено противоположное условие,

$$a^2 \omega^2 \gg \omega^2 - c^2 k_z^2 \geq 0, \tag{3.15}$$

то мнимая часть $Q''(k_z, \omega)$ (2.25) в два раза меньше, чем дает формула (3.13). Это означает, что при фазовых скоростях волн, близких к скорости света, не содержащее β слагаемое в (3.14) следует уменьшить в два раза.

Согласно (3.14) в случае фазовых скоростей волн Свихарта, больших скорости света декремент затухания содержит два аддитивных вклада. Первый пропорциональный β вклад в γ существует и при $\omega' < ck_z$ и обусловлен омическими потерями энергии в туннельном переходе. Второй содержащий множитель $\omega'^2 - c^2 k_z^2$ вклад в γ существует лишь при больших фазовых скоростях и описывает затухание волн Свихарта, обусловленное потерями энергии на излучение электромагнитных волн в вакуум. В области больших длин волн, когда $k_z \ll \omega_j/c$, второй вклад будет основным, если проводимость туннельного перехода достаточно мала,

$$\sigma < \frac{d}{2\pi D} \omega_j, \tag{3.16}$$

что эквивалентно неравенству $\beta < (2d/\epsilon D)\omega_j$. Если принять $2d \sim D$, $\epsilon \sim 10$, то необходимо выполнить условие $\beta < 0.1\omega_j$. Отметим, что выражение (3.14) получено в пределе $\gamma \ll \omega'$. Сравнивая соотношения (3.11) и (3.14), при $\omega' \gg ck_z$ и $\beta \ll 2\omega'd/\epsilon D$ получим, что $\gamma \ll \omega'$, если

$$d \ll \epsilon D \Lambda (\omega'/c) \simeq \epsilon D \Lambda (\omega_j/c). \tag{3.17}$$

Следовательно, установленные выше особенности спектра волн Свихарта имеют место в пленках, толщина которых лежит в интервале $\lambda \gg D \gg d/\epsilon \Lambda (\omega_j/c)$.

4. ВЫСВЕЧИВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

Рассмотрим особенности излучения протяженного джозефсоновского перехода, когда вдоль него распространяется линейная волна разности фаз вида (3.1). Фазовую скорость волны будем считать большей скорости света, $\omega/k_z > c$. Согласно соотношениям (2.10)–(2.16) высвечиваются лишь те фурье-компоненты потенциалов, для которых

$$k_x^2 < \omega^2/c^2 - k_z^2 \tag{4.1}$$

и функция ψ (2.16) чисто мнимая. При этом вкладом скалярного потенциала (2.14) можно пренебречь, так как он не приводит к потерям энергии на излучение и пренебрежимо мал вдали от пленки. Тогда, используя соотношения (2.10)–(2.16), найдем компоненты векторного потенциала в вакууме:

$$A_x(\mathbf{r}, t) = -\frac{\phi_0\varphi_0}{2\pi^2} \int_0^\kappa dk_x \cos(xk_x) \left\{ [Z_2 + k_x^2(1 - a^2 - Z_1)] \cos \alpha - 2\lambda_e \sqrt{\kappa^2 - k_x^2} [Z_2 + k_x^2(1 - a^2)] \sin \alpha \right\} (Z_1 Z_2)^{-1}, \quad (4.2)$$

$$A_y(\mathbf{r}, t) = -\frac{\phi_0\varphi_0}{2\pi^2} \int_0^\kappa dk_x k_x \sin(xk_x) \left\{ a \frac{\omega}{c} \cos \alpha + \sqrt{\kappa^2 - k_x^2} \sin \alpha \right\} Z_2^{-1}, \quad (4.3)$$

$$A_z(\mathbf{r}, t) = -\frac{\phi_0\varphi_0}{\pi^2} \lambda_e k_z \int_0^\kappa dk_x k_x \sin(xk_x) \left\{ 2\lambda_e \left[Z_2 + \frac{\omega^2}{c^2} (1 - a^2) \right] \sin \alpha - (1 - a^2) \sqrt{\kappa^2 - k_x^2} \cos \alpha \right\} (Z_1 Z_2)^{-1}, \quad (4.4)$$

где использованы обозначения $\kappa^2 \equiv \omega^2/c^2 - k_x^2$,

$$\alpha \equiv \sqrt{\kappa^2 - k_x^2} y + k_x z - \omega t, \quad (4.5)$$

$$Z_1 \equiv 1 + 4\lambda_e^2(\kappa^2 - k_x^2), \quad Z_2 \equiv \kappa^2 - k_x^2 + a^2\omega^2/c^2. \quad (4.6)$$

Соотношения (4.2)–(4.4) позволяют найти вклад в компоненты электромагнитных полей \mathbf{E} и \mathbf{H} , обусловленный излучением волн в вакуум:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (4.7)$$

В формуле для \mathbf{E} (4.7), как и при выводе выражений (4.2)–(4.4), опущено слагаемое $-\text{grad}V$ — вклад от скалярного потенциала. Используя описывающие излучение части полей \mathbf{E} и \mathbf{H} , можно найти усредненную по периоду поля плотность потока электромагнитного излучения

$$\mathbf{S} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt \frac{1}{4\pi} \left[\text{rot } \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right]. \quad (4.8)$$

Подставляя выражения (4.2)–(4.4) в (4.8) и вычисляя интегралы по переменной k_x подобно тому, как это изложено в Приложении С, находим

$$S_x = S_0 R \cos \xi, \quad (4.9)$$

$$S_y = S_0 R \sin \xi, \quad (4.10)$$

$$S_z = \frac{S_0 R}{\sqrt{v^2 - 1}}, \tag{4.11}$$

где $\xi \equiv \text{arctg}(y/x)$ изменяется в пределах от 0 до 2π . В (4.9) S_0 характеризует порядок величины потока на расстоянии $r_\perp = \sqrt{x^2 + y^2}$ от джозефсоновского перехода

$$S_0 \equiv \left(\frac{\phi_0 \varphi_0 \omega}{8\pi^2 c} \right)^2 \frac{\omega}{r_\perp}, \tag{4.12}$$

а функция R зависит от угла ξ и $v \equiv \omega/ck_z$ — отношения фазовой скорости волны Свихарта к скорости света,

$$R \equiv \left[1 + \frac{a^2 - 1}{v^2 + a^2(v^2 - 1) \sin^2 \xi} \right] \left[1 + \frac{a^2 v^2}{(v^2 - 1) \sin^2 \xi} \right]^{-1}. \tag{4.13}$$

Из (4.9)–(4.11) получаем для отношения компоненты плотности потока вдоль джозефсоновского перехода S_z к величине плотности потока в плоскости, нормальной оси туннельного перехода $S_\perp \equiv \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = S_0 R$:

$$\frac{S_z}{S_\perp} = \frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}}. \tag{4.14}$$

Согласно (4.14) $S_z \gg S_\perp$ при $1 \gg v^2 - 1 > 0$, и высвечивание электромагнитной энергии происходит вдоль направления распространения волны Свихарта. Напротив, при $v \gg 1$, когда фазовая скорость волны сильно превышает скорость света, $S_\perp \gg S_z$, и излучение в основном сконцентрировано в плоскости, ортогональной оси туннельного перехода. Из формул (4.9)–(4.11) имеем следующие выражения для полной плотности потока излучения под углом ξ к плоскости пленки:

$$S = \sqrt{S_z^2 + S_\perp^2} = S_0 R \frac{v}{\sqrt{v^2 - 1}}. \tag{4.15}$$

Принимая во внимание малость параметра a , из (4.13) и (4.15) имеем

$$\frac{S}{S_0} = \frac{v^2 - 1 + a^2}{v\sqrt{v^2 - 1}} \left[1 + \frac{a^2 v^2}{(v^2 - 1) \sin^2 \xi} \right]^{-1}. \tag{4.16}$$

Отсюда видно, что при $1 \geq |\sin \xi| > av/\sqrt{v^2 - 1}$ плотность потока энергии S практически не зависит от угла ξ . Если же $|\sin \xi| \ll av/\sqrt{v^2 - 1}$, то

$$\frac{S}{S_0} \simeq \frac{\sqrt{v^2 - 1}}{v} (v^2 - 1 + a^2) \frac{\sin^2 \xi}{a^2 v^2} \tag{4.17}$$

изменяется как функция $\sin^2 \xi$.

Эти закономерности иллюстрирует рис. 1, где приведена зависимость функции S/S_0 от угла ξ . При построении кривых принято $a = 2\lambda_e|\omega|/c = 0.1$. Приведены графики S/S_0 для шести значений параметра v^2 . На рис. 1 видно, как по мере увеличения фазовой скорости расширяется область углов, в которой постоянна плотность потока

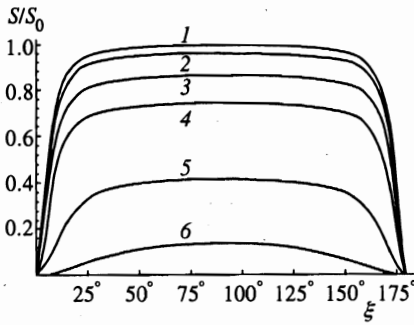


Рис. 1

Рис. 1. Плотность потока излучения в полупространстве над пленкой как функция угла наблюдения ξ . Кривые 1–6 соответствуют следующим значениям параметра $(\omega/ck_z)^2$: 1 — 100, 2 — 40, 3 — 2, 4 — 1.5, 5 — 1.1, 6 — 1.01

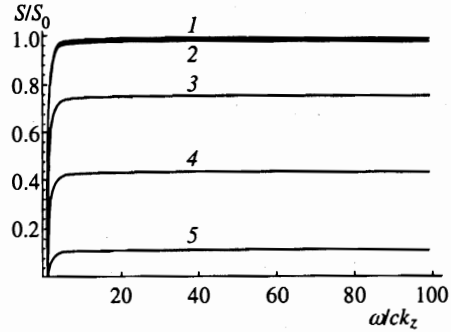


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость функции S/S_0 от ω/ck_z для углов наблюдения: 1 — 90° , 2 — 45° , 3 — 10° , 4 — 5° , 5 — 2°

излучения. Зависимость S/S_0 от отношения ω/k_z к скорости света иллюстрирует рис. 2. Кривые на рисунке соответствуют пяти разным углам наблюдения ξ . Согласно рис. 2, чем меньше $|\sin \xi|$, тем меньше плотность потока излучения. По мере приближения ω/ck_z к единице плотность потока S/S_0 монотонно стремится к нулю.

Соотношения (4.9)–(4.11) также позволяют получить декремент затухания бегущих вдоль джозефсоновского перехода волн, обусловленный потерями энергии на излучение. Действительно, потери энергии на единицу длины туннельного перехода даются интегралом

$$r_{\perp} \int_0^{2\pi} d\xi \mathbf{nS} = r_{\perp} S_0 \int_0^{2\pi} d\xi R = -\frac{4\pi c^2}{\omega^2} r_{\perp} S_0 Q''(k_z, \omega), \quad (4.18)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к цилиндрической поверхности радиуса $r_{\perp} = \sqrt{x^2 + y^2}$, а мнимая часть $Q''(k_z, \omega)$ описывается выражением (2.25).

С другой стороны, потери энергии на излучение можно представить в виде $2\gamma_r W$, где γ_r — радиационный декремент затухания, W — средняя за период энергия на единицу длины джозефсоновского перехода. Для вычисления W для волн с фазовой скоростью, большей скорости света, и при

$$\frac{d}{\epsilon D} \ln \frac{c}{d\omega_j} \ll 1, \quad (4.19)$$

когда можно пренебречь отличием частоты волны ω от джозефсоновской ω_j , достаточно учесть энергию электрического поля внутри перехода и энергию джозефсоновского тока.

Тогда имеем

$$W = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt \frac{\hbar j_c}{2|e|} D \left[\frac{1}{2\omega_j^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \varphi \right)^2 + 1 - \cos \varphi \right] \approx \frac{\varepsilon D}{d} S_0 \frac{\pi r_{\perp}}{\omega}. \quad (4.20)$$

Приравнивая $2\gamma_r W$ к потерям энергии на излучение (4.18), получаем

$$\gamma_r = -\frac{2d}{\varepsilon D} \frac{c^2}{\omega} Q''(k_z, \omega), \quad (4.21)$$

что находится в согласии с (3.13), (3.14).

5. ВЫСВЕЧИВАНИЕ КРУПНОМАСШТАБНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СОСТОЯНИЙ

В этом разделе остановимся на рассмотрении излучения волн в вакуум нелинейными состояниями, когда амплитуда разности фаз волновых функций не мала по сравнению с единицей. Примем, что характерное время изменения разности фаз достаточно велико:

$$T \equiv \left| \frac{\partial}{\partial t} \ln \varphi(z, t) \right|^{-1} \gg \frac{2\lambda_e}{c}. \quad (5.1)$$

Пространственный масштаб изменения разности фаз L будем считать много большим расстояния, проходимого электромагнитным полем в вакууме за характерное время изменения разности фаз:

$$L \equiv \left| \frac{\partial}{\partial z} \ln \varphi(z, t) \right| \gg cT. \quad (5.2)$$

Неравенства (5.1) и (5.2) совместны, если масштаб неоднородности L много больше удвоенной эффективной глубины проникновения поля в пленку, $L \gg 2\lambda_e$. Состояния с пространственными масштабами L , удовлетворяющими неравенству (5.2), будем называть крупномасштабными. Помимо условий (5.1), (5.2) примем, что

$$\frac{d}{\varepsilon D} \ln \frac{cT}{d} \ll 1. \quad (5.3)$$

Неравенство (5.3) позволяет не учитывать влияния поверхностной электромагнитной волны на нелинейное крупномасштабное состояние. В условиях, определяемых неравенствами (5.1)–(5.3), при учете соотношений (2.24), (2.25) и (2.29) уравнение (2.22) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \sin \varphi(z, t) + \frac{\beta}{\omega_j^2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(z, t) + \frac{1}{\omega_j^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(z, t) = \\ & = -\frac{2}{\pi} \lambda_e l \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \operatorname{sign}(t' - t) \left[C + \ln \left(\frac{c}{\lambda_e} |t' - t| \right) \right] \frac{\partial}{\partial t'} \varphi(z, t') - \\ & - \frac{2}{\pi} \lambda_e l \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt'}{t - t'} \frac{\partial}{\partial t'} \varphi(z, t'), \end{aligned} \quad (5.4)$$

где $C = 0.577$ — постоянная Эйлера. В отличие от уравнения (2.22) уравнение (5.4) не содержит пространственно-нелокальной связи. В том случае, когда характерное время изменения разности фаз определяется обратной джозефсоновской частотой, аргумент логарифма в правой части (5.4) можно приближенно заменить на $c/\lambda_e \omega_j$. При этом уравнение (5.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \omega_j^2 \sin \varphi(z, t) + \beta \frac{\partial}{\partial t} \varphi(z, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(z, t) = \\ = \frac{4}{\pi} \frac{d}{\varepsilon D} c^2 \ln \left(\frac{c}{\lambda_e \omega_j} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varphi(z, t) + \frac{2}{\pi} \frac{d}{\varepsilon D} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt'}{t' - t} \frac{\partial}{\partial t'} \varphi(z, t'). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Отметим, что в силу сделанных предположений (5.2), (5.3) в правых частях уравнений (5.4) и (5.5) стоят сравнительно малые слагаемые. Однако именно эти слагаемые определяют как потери энергии на излучение, так и медленное пространственное изменение разности фаз. В частности, эти слагаемые определяют дисперсию и радиационное затухание волн Свихарта (см. раздел 3). Воспользуемся уравнением (5.4) (или (5.5)) для рассмотрения высвечивания волн крупномасштабными распределениями разности фаз. При учете неравенств (5.2) и (5.3) в первом приближении влиянием малых слагаемых в правой части (5.4) будем пренебрегать. Примем также, что диссипация, обусловленная омическими потерями, мала: $\beta \ll \omega_j$. В этих условиях уравнение (5.4) сводится к уравнению математического маятника:

$$\omega_j^2 \sin \varphi(z, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(z, t) = 0, \quad (5.6)$$

решения которого хорошо известны (см., например, [3, 21]). В кратком сообщении [21] рассмотрены потери энергии на излучение нелинейными состояниями, описываемыми решениями уравнения (5.6). Подчеркнем, что несмотря на то что производная разности фаз по координате для таких состояний обращается в нуль, электромагнитное поле на поверхности сверхпроводящей пленки не равно нулю. Наличие такого поля приводит к возникновению потока излучения, уносящего энергию из перехода в вакуум (см. Приложение D). Остановимся более подробно на обсуждении особенностей высвечивания волн крупномасштабными нелинейными состояниями. Поскольку в первом приближении распределение разности фаз таких состояний не зависит от координаты, фурье-компонента $\varphi(k_z, \omega)$ пропорциональна дельта-функции $\delta(k_z)$. Тогда, используя выражения (2.10)–(2.16) и пренебрегая вкладом скалярного потенциала, после сохранения лишь высвечивающихся фурье-компонент потенциалов, находим:

$$\begin{aligned} A_x(\mathbf{r}, t) = -\frac{\phi_0}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt' \exp[i\omega(t' - t)] \varphi(t') \times \\ \times \int_0^{|\omega|/c} dk_x \cos(xk_x) \exp[-y\psi(\omega, k_x)] \frac{\psi(\omega, k_x)}{\psi(\omega, k_x) - a\omega/c}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$A_y(\mathbf{r}, t) = \frac{\phi_0}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt' \exp[i\omega(t' - t)] \varphi(t') \times$$

$$\times \int_0^{|\omega|/c} dk_x k_x \sin(xk_x) \exp[-y\psi(\omega, k_x)] \frac{1}{\psi(\omega, k_x) - a\omega/c}, \quad (5.8)$$

где $\varphi(t)$ — решение уравнения (5.6),

$$\varphi(\omega, k_x) = -i\sqrt{\omega^2/c^2 - k_x^2} \text{sign } \omega. \quad (5.9)$$

В рассматриваемом приближении $A_z(r, t) = 0$.

Обсудим сначала высвечивание волн в случае нелинейного состояния, описываемого решениями уравнения (5.6), отвечающими колебаниям разности фаз конечной амплитуды, когда

$$\varphi_v(t) = 2 \arcsin[k \text{sn}(\omega_j t, k)], \quad (5.10)$$

где k — модуль эллиптического синуса sn . Воспользуемся разложением производной функции φ_v в ряд Фурье:

$$\frac{d}{dt} \varphi_v(t) = 8\Omega_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+1/2}}{1 + q^{2n+1}} \cos[(2n + 1)\Omega_v t], \quad (5.11)$$

где частота Ω_v и параметр q зависят от модуля k ,

$$\Omega_v = \frac{\pi\omega_j}{2K(k)}, \quad (5.12)$$

$$q = \exp\left[-\frac{\pi}{K(k)} K(\sqrt{1 - k^2})\right], \quad (5.13)$$

$K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Теперь, используя выражения для компонент векторного потенциала (5.7), (5.8) и разложение (5.11), найдем усредненную за период $2\pi/\Omega_v$ (ср. (4.8)) плотность потока излучения

$$\mathbf{S} = (\mathbf{e}_x \cos \xi + \mathbf{e}_y \sin \xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_{v,n} \sin^2 \xi}{\sin^2 \xi + [2\lambda_e(2n + 1)\Omega_v/c]^2}, \quad (5.14)$$

где использовано обозначение

$$S_{v,n} = \frac{\phi_0^2 \Omega_v^3}{\pi^4 c^2 r_{\perp}} \frac{q^{2n+1}}{(1 + q^{2n+1})^2} (2n + 1). \quad (5.15)$$

Согласно (5.11), (5.14) излучение происходит на нечетных гармониках основной частоты Ω_v (5.12), которая меньше джозефсоновской. При $k \ll 1$ частота Ω_v близка к ω_j , а потери энергии на излучение в основном определяются высвечиванием основной гармоники $n = 0$. По мере увеличения k спектр излучения обогащается высшими гармониками, а интервал между гармониками уменьшается. При k близких к единице Ω_v логарифмически стремится к нулю:

$$\Omega_v \simeq \frac{\pi\omega_j}{2} \left(\ln \frac{4}{\sqrt{1 - k^2}} \right)^{-1}, \quad (5.16)$$

при этом излучается широкий спектр частот $(2n+1)\Omega_v$, отстоящих близко друг от друга. Отметим, что в соответствии с условиями применимости теории (5.1), (5.2) излучаемые частоты должны лежать в интервале

$$2\pi c/L \ll (2n+1)\Omega_v \ll \pi c/\lambda_e. \quad (5.17)$$

Выражение (5.14) позволяет указать направленность высвечивания гармоник. Согласно (5.14) поток излучения от крупномасштабных нелинейных состояний сконцентрирован в плоскости, ортогональной оси джозефсоновского перехода, и направлен вдоль радиус-вектора \mathbf{r}_\perp . Поскольку в силу правого неравенства (5.17) параметр $2\lambda_e(2n+1)\Omega_v/c$ мал по сравнению с единицей, в широком интервале углов, когда

$$|\sin \xi| > 2(2n+1)\lambda_e\Omega_v/c, \quad (5.18)$$

абсолютная величина плотности потока на частоте $(2n+1)\Omega_v$ не зависит от угла наблюдения и составляет $S_{v,n}$. Вне интервала (5.18), что имеет место для углов наблюдения, «прижатых» к плоскости пленки, интенсивность излучения гармоник убывает с уменьшением $|\sin \xi|$ пропорционально $\sin^2 \xi$. Интегрируя поток \mathbf{S} (5.14) по поверхности цилиндра радиуса r_\perp , с учетом малости параметра $2(2n+1)\lambda_e\Omega_v/c$ получим выражение (11) работы [21] для потока энергии с единицы длины туннельного перехода.

Перейдем к рассмотрению высвечивания нелинейного состояния, описываемого решением уравнения (5.6), отвечающего вращающемуся маятнику, когда

$$\varphi_r(t) = 2am \left(\frac{\omega_j}{k} t, k \right) = 2\Omega_r t + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n(1+q^{2n})} \sin[2n\Omega_r t], \quad (5.19)$$

где am — амплитуда Якоби,

$$\Omega_r = \frac{\pi}{2kK(k)} \omega_j. \quad (5.20)$$

В этом случае усредненная за период $2\pi/\Omega_r$ плотность потока излучения имеет вид

$$\mathbf{S} = (\mathbf{e}_x \cos \xi + \mathbf{e}_y \sin \xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_{r,n} \sin^2 \xi}{\sin^2 \xi + (4n\lambda_e\Omega_r/c)^2}, \quad (5.21)$$

$$S_{r,n} = \frac{\phi_0^2 \Omega_r^3}{\pi^4 c^2 r_\perp} \frac{2nq^{2n}}{(1+q^{2n})^2}. \quad (5.22)$$

Выражения (5.21), (5.22) описывают поток излучения на четных частотах $2n\Omega_r$. При k близких к единице частота Ω_r (5.20) много меньше джозефсоновской, а спектр излучения содержит много четных гармоник основной частоты. С уменьшением k частота Ω_r возрастает. Если $k \ll 1$, то $\Omega_r \simeq \omega_j/k \gg \omega_j$. При этом интенсивность излучения на высших гармониках сильно подавлена, так как $q \ll 1$. Диаграмма направленности излучения четных гармоник такая же, как и для нечетных гармоник. Поток излучения сконцентрирован в плоскости, ортогональной оси туннельного перехода. Если $|\sin \xi| > 4n\lambda_e\Omega_r/c$, то плотность потока на частоте $2n\Omega_r$ не зависит от угла наблюдения и составляет $S_{r,n}$ (5.22). Еще одним решением уравнения (5.6) является 2π -кинк

$$\varphi(t) = 4\text{arctg}(e^{\omega_j t}) - \pi. \quad (5.23)$$

Диаграмма направленности излучения от 2π -кинка имеет те же черты, что и для нелинейных периодических решений. При этом излучается непрерывный спектр частот меньших или порядка джозефсоновской. На больших частотах спектральная плотность излучения экспоненциально мала [21].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итог изложенному выше, можно утверждать, что пространственно-временная нелокальная электродинамика, описывающая нестационарные состояния в джозефсоновском контакте в тонкой сверхпроводящей пленке, позволила получить сравнительно простые и наглядные формулы, дающие картину электромагнитного излучения, проникающего с поверхности пленки в вакуум. Это стало возможным как в результате формулировки нелинейного интегродифференциального уравнения, описывающего распределение разности фаз в переходе, так и в результате последовательного описания электромагнитного поля в вакууме.

Однако проведенное выше рассмотрение не учитывает той диссипации, которая связана с тепловыми флуктуациями. Мы признательны рецензенту, привлечшему наше внимание к работе [22], в которой рассмотрено влияние флуктуаций напряжения на контакте, определяющее ширину линии излучения из джозефсоновского микроконтакта, к которому приложено постоянное напряжение V_0 . Из работы [22] следует выражение для ширины линии излучения на частоте $2eV_0/\hbar$:

$$\Gamma = \left(\frac{4\pi c}{\phi_0} \right)^2 \frac{2\pi d}{\beta \epsilon S_{con}} T_{con}, \quad (6.1)$$

где T_{con} — температура, а S_{con} — площадь микроконтакта. Выражение (6.1) справедливо в случае, когда

$$\Gamma \ll \beta \quad (6.2)$$

и сопротивление внешней цепи велико.

Целесообразно установить условия, при которых можно пренебречь влиянием флуктуаций. Поскольку согласно уравнению (2.22) вклад в ширину линии излучения аддитивно определяется слагаемым β , то наше рассмотрение пригодно при выполнении неравенства (6.2). Здесь следует заметить, что согласно [1, стр. 114] и [2, стр. 72] в практике использования микроконтактов наибольший интерес для приложений составляют условия выполнения неравенства (6.2). Действительно, принимая, например, $T = 4.2$ К, $\beta \simeq 5 \cdot 10^{10}$ с⁻¹, $2d/\epsilon \simeq 3 \cdot 10^{-8}$ см, видим, что условие (6.2) выполнено для микроконтактов, площадь которых превышает ~ 10 мкм². Применительно к нашему случаю контакта в пленке $S_{con} = DL_f$, где L_f — ширина пленки, условие (6.2) выполняется при не слишком малой ширине пленки. Так, например, при только что использованных параметрах туннельного перехода и $D \sim 3 \cdot 10^{-7}$ см неравенство (6.2) выполняется при $L_f > 3$ мм. Таким образом, видна возможность пренебречь влиянием флуктуационной диссипации по сравнению с обычной омической.

Наконец следует подчеркнуть, что обсуждаемое нами излучение, связанное со свихартовскими волнами, возможно на частотах, соизмеримых с джозефсоновской частотой ω_j . При этом, когда выполнено условие (6.2), излучение может быть достаточно

эффективным при условии

$$\omega_j \gg \beta. \quad (6.3)$$

Для характерных значений $\omega_j \sim 10^{12} \text{ с}^{-1}$ и $\beta \sim 5 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$ (см., например, [23]) условие (6.3) выполнено.

Однако при достаточно малой ширине пленки, когда условие (6.2) нарушено, именно флуктуации могут определять ширину линии излучения. В таком пределе согласно [22] для ширины линии излучения имеем

$$\Gamma = \frac{8|e|}{\hbar} \sqrt{\frac{\pi d}{\varepsilon S_{\text{con}}} T_{\text{con}}}. \quad (6.4)$$

Ясно, что излучение будет достаточно эффективным, если

$$\frac{8|e|}{\hbar} \sqrt{\frac{\pi d}{\varepsilon S_{\text{con}}} T_{\text{con}}} \ll \omega_j.$$

Последнее неравенство, подобно неравенству (6.2), накладывает ограничения на ширину пленки. При принятых выше параметрах джозефсоновского перехода оно выполнено, если $L_f \gg 10 \text{ мкм}$.

Последнее указывает на то, что проведенное нами выше обсуждение условий выполнения неравенства (6.2) имеет только методическое значение, что, естественно, важно для понимания применимости используемой в нашей статье модели.

Таким образом, наше рассмотрение устанавливает закономерности излучения электромагнитного поля с поверхности пленки, в которой имеется джозефсоновский переход.

Работа выполнена в рамках проекта 96-02-17303 Российского фонда фундаментальных исследований, при поддержке Научного совета по ВТСП (проект «АД» 95008) и государственной поддержке ведущих научных школ (проект 96-15-96750).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Для построения решения уравнений (2.1)–(2.4) перейдем к образам Фурье по переменным $\mathbf{r}_{\parallel}, t$:

$$F(y, \mathbf{k}, \omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt \int dr_{\parallel} \exp(i\omega t - ikr_{\parallel}) F(y, \mathbf{r}_{\parallel}, t), \quad (A.1)$$

где $\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z)$. Тогда для фурье-компонент потенциалов получаем систему уравнений

$$\frac{d}{dy} A_y(y, \mathbf{k}, \omega) + ikA_{\parallel}(y, \mathbf{k}, \omega) = 0, \quad (A.2)$$

$$\frac{d^2}{dy^2} A(y, \mathbf{k}, \omega) - \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) A(y, \mathbf{k}, \omega) + i\frac{\omega}{c} \left(ik + \mathbf{e}_y \frac{d}{dy}\right) V(y, \mathbf{k}, \omega) = 0, \quad y > 0, \quad (A.3)$$

$$\frac{d^2}{dy^2}V(y, \mathbf{k}, \omega) - k^2V(y, \mathbf{k}, \omega) = 0. \quad (\text{A.4})$$

При этом граничные условия (2.8), (2.9) для компонент векторного потенциала имеют вид

$$\frac{d}{dy}A_x(y, \mathbf{k}, \omega)|_{y=+0} = \frac{1}{2\lambda_e} \left\{ \frac{\phi_0}{2\pi} [\varphi(k_z, \omega) + ik_z\Phi(\mathbf{k}, \omega)] + A_x(y=0, \mathbf{k}, \omega) \right\}, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{d}{dy}A_z(y, \mathbf{k}, \omega)|_{y=+0} = \frac{1}{2\lambda_e} \left\{ \frac{\phi_0}{2\pi} ik_z\Phi(\mathbf{k}, \omega) + A_z(y=0, \mathbf{k}, \omega) \right\}, \quad (\text{A.6})$$

$$A_y(y=0, \mathbf{k}, \omega) = 0, \quad (\text{A.7})$$

где e_x и e_y — единичные векторы вдоль осей x и y , а фурье-компоненты фазы и разности фаз описываются соотношениями

$$\Phi(\mathbf{k}, \omega) = \int_{-\infty}^0 dx\Phi_1(x, k_z, \omega) \exp(-ik_x x) + \int_0^{\infty} dx\Phi_2(x, k_z, \omega) \exp(-ik_x x), \quad (\text{A.8})$$

$$\varphi(k_z, \omega) = \Phi_1(0, k_z, \omega) - \Phi_2(0, k_z, \omega). \quad (\text{A.9})$$

В свою очередь, как видно из (2.6), фурье-компонента скалярного потенциала на поверхности пленки связана с $\Phi(\mathbf{k}, \omega)$ соотношением

$$V(y=0, \mathbf{k}, \omega) = -i\omega \frac{\phi_0}{2\pi c} \Phi(\mathbf{k}, \omega). \quad (\text{A.10})$$

Принимая во внимание связи (A.2), (A.10), решение дифференциальных уравнений (A.3), (A.4) в области $y \geq 0$ представим в виде

$$A_x(y, \mathbf{k}, \omega) = a_x \exp(-\psi y) + \frac{c}{\omega} k_x V(y, \mathbf{k}, \omega), \quad (\text{A.11})$$

$$A_y(y, \mathbf{k}, \omega) = \frac{ika}{\psi} \exp(-\psi y) + i \frac{c}{\omega} k V(y, \mathbf{k}, \omega), \quad (\text{A.12})$$

$$A_z(y, \mathbf{k}, \omega) = a_z \exp(-\psi y) + \frac{c}{\omega} k_z V(y, \mathbf{k}, \omega), \quad (\text{A.13})$$

$$V(y, \mathbf{k}, \omega) = -i\omega \frac{\phi_0}{2\pi c} \Phi(\mathbf{k}, \omega) \exp(-k\psi), \quad (\text{A.14})$$

где функция ψ описывается выражением (2.16). Знак мнимой части функции ψ выбран таким образом, что при $\omega^2 > c^2 k^2$ векторный потенциал \mathbf{A} описывает излучение электромагнитных волн в вакуум. Кроме того, принято, что вдали от пленки скалярный (а при $\omega^2 < c^2 k^2$ и векторный) потенциал стремится к нулю. Подставляя решения (A.11)–(A.14) в граничные условия (A.5)–(A.7), находим

$$a_x = -\frac{\phi_0}{2\pi} \frac{\varphi(k_z, \omega)}{1 + 2\lambda_e \psi} \left(1 + \frac{2\lambda_e}{G} k_x^2 \right), \quad (\text{A.15})$$

$$a_z = -\frac{\phi_0}{2\pi} \frac{\varphi(k_z, \omega)}{1 + 2\lambda_e \psi} \frac{2\lambda_e}{G} k_x k_z, \quad (\text{A.16})$$

$$\Phi(\mathbf{k}, \omega) = i\varphi(k_z, \omega)k_x/kG, \quad (\text{A.17})$$

где использовано обозначение G (2.15). Соотношения (A.11)–(A.17) дают связь электромагнитных потенциалов с разностью фаз на туннельном переходе (см. формулы (2.10)–(2.13)).

ПРИЛОЖЕНИЕ В

В общем случае действительная часть фурье-компоненты ядра $Q'(k_z, \omega)$ равна сумме четырех интегралов I_n ($n = 1, 2, 3, 4$):

$$Q'(k_z, \omega) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \quad (\text{B.1})$$

которые имеют вид

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_{\kappa\eta(\kappa^2)}^{\infty} dk_x \frac{k_z^2}{k^2} \frac{\sqrt{k^2 - \omega^2/c^2}}{1 + 2\lambda_e \sqrt{k^2 - \omega^2/c^2}}, \quad (\text{B.2})$$

$$I_2 = \frac{\omega^2}{\pi c^2} \int_{\kappa\eta(\kappa^2)}^{1/2d} dk_x \frac{k_x^2}{k^2} \frac{1}{2\lambda_e \omega^2/c^2 - \sqrt{k^2 - \omega^2/c^2}}, \quad (\text{B.3})$$

$$I_3 = \frac{2}{\pi} \lambda_e k_z^2 \eta(\kappa^2) \int_0^{\kappa} \frac{dk_x}{k^2} \frac{\omega^2/c^2 - k^2}{1 + 4\lambda_e^2(\omega^2/c^2 - k^2)}, \quad (\text{B.4})$$

$$I_4 = \frac{2}{\pi} \lambda_e \frac{\omega^4}{c^2} \eta(\kappa^2) \int_0^{\kappa} dk_x \frac{k_x^2}{k^2} \frac{1}{\omega^2/c^2 - k^2 + 4\lambda_e^4 \omega^4/c^2}, \quad (\text{B.5})$$

где $\kappa^2 \equiv \omega^2/c^2 - k_z^2$. Поскольку в исходных уравнениях считалось, что масштаб изменения поля велик по сравнению с толщиной туннельного перехода $2d$, для устранения логарифмической расходимости в формуле (B.3) верхний предел интегрирования принят равным $1/2d$. Интегралы допускают вычисление в квадратурах, однако ответы имеют громоздкий вид. Ограничимся рассмотрением предельных значений интегралов, необходимых для изложения основного материала, нацеленного на обсуждение условий, в которых параметр $2\lambda_e|\omega|/c$ меньше единицы. Интегралы I_n имеют особенно простой вид в пределе $|\omega| \ll c|k_z|$, когда

$$I_1 \simeq \frac{k_z^2}{\pi} Q(2\lambda_e|k_z|), \quad I_2 \simeq -\frac{\omega^2}{\pi c^2} \ln \frac{1}{d|k_z|}, \quad I_3 = I_4 = 0, \quad (\text{B.6})$$

где функция $Q(x)$ описывается выражением (2.28). В противоположном пределе высоких частот, когда $|\omega| \gg c|k_z|$, из (B.2)–(B.5) находим

$$I_1 \simeq \frac{k_z^2}{\pi} \ln \frac{c}{\lambda_e|\omega|}, \quad I_2 \simeq -\frac{\omega^2}{\pi c^2} \ln \frac{c}{d|\omega|},$$

$$I_3 \simeq \frac{2}{\pi} \lambda_e |k_z| \frac{\omega^2}{c^2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2 k_z^2} - 1},$$

$$I_4 \simeq \frac{2}{\pi} \lambda_e \frac{|\omega|^3}{c^3} \ln \frac{c}{\lambda_e |\omega|} - I_3. \quad (\text{B.7})$$

Соотношения (B.6), (B.7) выписаны с точностью, достаточной для основных расчетов.

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Для вычисления интегралов вида

$$I = \int_0^{\kappa} dk f(k) \exp[iF(k)], \quad (\text{C.1})$$

где функция $F(k)$ описывается выражением

$$F(k) = xk + y\sqrt{\kappa^2 - k^2}, \quad (\text{C.2})$$

воспользуемся методом перевала. Если $y/x = \operatorname{tg} \xi > 0$, то функция $F(k)$ имеет максимум при

$$k_m = \kappa \cos \xi. \quad (\text{C.3})$$

В окрестности максимума справедливо разложение

$$F(k) = \kappa r_{\perp} - \frac{r_{\perp}}{2\kappa \sin^2 \xi} (k - \kappa \cos \xi)^2 + \dots, \quad (\text{C.4})$$

где $r_{\perp} = \sqrt{x^2 + y^2}$ — расстояние от джоузефсоновского перехода до точки наблюдения. При

$$\operatorname{tg}(\xi/2) \gg \sqrt{2/\kappa r_{\perp}}, \quad \operatorname{tg} \xi \ll \sqrt{\kappa r_{\perp}/2}, \quad (\text{C.5})$$

что имеет место на достаточно больших расстояниях, пределы интегрирования в (C.1) можно принять равными $\pm\infty$. Тогда, считая, что функция $f(k)$ слабо изменяется в узком интервале,

$$\kappa \cos \xi - \sqrt{\frac{2\kappa}{r_{\perp}}} \sin \xi \leq k \leq \kappa \cos \xi + \sqrt{\frac{2\kappa}{r_{\perp}}} \sin \xi, \quad (\text{C.6})$$

из (C.1), (C.4) находим

$$I \approx \sqrt{\frac{\pi\kappa}{r_{\perp}}} f(\kappa \cos \xi) \sin \xi \exp(i\kappa r_{\perp})(1 - i). \quad (\text{C.7})$$

В том случае, когда $\operatorname{tg} \xi < 0$, функция $F(k)$ достигает максимума на границах области интегрирования по k . При этом основной вклад в интеграл I возникает от края области интегрирования, а величина самого интеграла убывает $\propto 1/r_{\perp}$. Поправки такого порядка несут существенны при рассмотрении поля излучения на больших расстояниях.

ПРИЛОЖЕНИЕ D

Продемонстрируем, как возникает поток излучения с поверхности сверхпроводника в вакуум в случае однородных крупномасштабных состояний. Полагая разность фаз зависящей только от времени, из выражений для потенциалов (2.10)–(2.14) получаем поле на поверхности пленки при $|x| \geq d$:

$$\mathbf{H}(x, y = +0, t) = -\frac{\phi_0}{(2\pi)^3 c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int d\omega dk_x dt' e^{i\omega(t'-t)} \cos(xk_x) \frac{d\varphi(t')}{dt'} \frac{1}{\psi - 2\lambda_e \omega^2 / c^2} \mathbf{e}_z, \quad (\text{D.1})$$

$$E_x(x, y = 0, t) = \frac{\phi_0}{(2\pi)^3 c} \int d\omega dt' dk_x e^{i\omega(t'-t)} \cos(xk_x) \frac{d\varphi(t')}{dt'} \frac{1}{G} \frac{G + 2\lambda_e k_x^2}{1 + 2\lambda_e \psi}, \quad (\text{D.2})$$

$$E_y(x, y = +0, t) = -\frac{\phi_0}{(2\pi)^3 c} \int d\omega dt' dk_x e^{i\omega(t'-t)} \sin(xk_x) \frac{d\varphi(t')}{dt'} \frac{k_x}{\psi - 2\lambda_e \omega^2 / c^2}, \quad (\text{D.3})$$

где функция ψ определяется выражением (2.16), в котором надо положить $k_z = 0$. Магнитное поле на границе туннельного перехода с вакуумом получается из (D.1) при $x = 0$, а электрическое поле в переходе определяется соотношением Джозефсона:

$$\mathbf{E}(x, y = 0, t) = \frac{\phi_0}{4\pi cd} \frac{d\varphi(t)}{dt} \mathbf{e}_x. \quad (\text{D.4})$$

Для нелинейных состояний (5.10) и (5.19), когда производная разности фаз по времени имеет вид

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \Omega_n t,$$

где $\Omega_n = (2n + 1)\Omega_v$ для решения (5.10) и $\Omega_n = 2n\Omega_r$ для решения (5.19), из (D.1)–(D.3) получаем для полей вне несверхпроводящего слоя:

$$\mathbf{H}(x, y = +0, t) = \frac{\phi_0}{(2\pi c)^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Omega_n \int dk_x \cos(xk_x) \text{Im} \left[\frac{e^{i\Omega_n t}}{\psi_n - 2\lambda_e \Omega_n^2 / c^2} \right] \mathbf{e}_z, \quad (\text{D.5})$$

$$E_x(x, y = 0, t) = \frac{\phi_0}{(2\pi)^2 c} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int dk_x \cos(xk_x) \text{Re} \left[\frac{e^{i\Omega_n t}}{G_n} \frac{G_n + 2\lambda_e k_x^2}{1 + 2\lambda_e \psi_n} \right], \quad (\text{D.6})$$

$$E_y(x, y = +0, t) = -\frac{\phi_0}{(2\pi)^2 c} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int dk_x \sin(xk_x) k_x \text{Re} \left[\frac{e^{i\Omega_n t}}{\psi_n - 2\lambda_e \Omega_n^2 / c^2} \right], \quad (\text{D.7})$$

где

$$\psi_n \equiv \sqrt{k_x^2 - \Omega_n^2 / c^2} \eta (c^2 k_x^2 - \Omega_n^2) + i \sqrt{\Omega_n^2 / c^2 - k_x^2} \eta (\Omega_n^2 - c^2 k_x^2),$$

$$G_n \equiv \psi_n - 2\lambda_e \Omega_n^2 / c^2.$$

Примем, как и ранее (см. (3.3)), что длина волны электромагнитного поля в вакууме больше, чем эффективная лондоновская глубина проникновения магнитного поля в пленку,

$$2\lambda_e\Omega_n/c \ll 1. \quad (D.8)$$

Тогда, пренебрегая малыми поправками, содержащими параметр (D.8), для усредненной по основному периоду плотности потока на поверхности пленки вне туннельного перехода получаем из (D.5)–(D.7):

$$\mathbf{S} = \frac{r_{\perp}}{x} \sum_{n=0}^{\infty} S_n \mathbf{e}_x, \quad (D.9)$$

где S_n определяется (5.15) или (5.22). Согласно (D.9) при $|x| \rightarrow \infty$ плотность потока стремится к нулю. Это означает, что в пределе (D.8) потери энергии на излучение с поверхности сверхпроводника пренебрежимо малы. С другой стороны, в условиях (D.8) при учете (D.4) и (D.5) плотность потока энергии из туннельного перехода на границе раздела переход — вакуум можно записать в виде (при $y = +0$)

$$\mathbf{S} = \frac{\pi r_{\perp}}{2d} \sum_{n=0}^{\infty} S_n \mathbf{e}_y.$$

В условиях (D.8) полная энергия, теряемая переходом с единицы длины вдоль оси z в единицу времени, равна

$$4d|\mathbf{S}| = 2\pi r_{\perp} \sum_{n=0}^{\infty} S_n.$$

К такому же результату приводит и интегрирование выражений (5.14) или (5.21) по всем углам ξ (см. (4.18)).

Литература

1. И. О. Кулик, И. К. Янсон, *Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах*, Наука, Москва (1970).
2. К. К. Лихарев, *Введение в динамику джозефсоновских переходов*, Наука, Москва (1985).
3. А. Бароне, Дж. Патерно, *Эффект Джозефсона: физика и применения*, Мир, Москва (1984).
4. K. L. Ngai, *Phys. Rev.* **182**, 555 (1969).
5. М. Б. Минеев, В. В. Шмидт, *ЖЭТФ* **79**, 893 (1980).
6. Yu. S. Kivshar and V. A. Malomed, *Phys. Rev. B* **37**, 9325 (1988).
7. А. А. Голубов, И. Л. Серпученко, А. В. Устинов, *ЖЭТФ* **94**, 297 (1988).
8. В. П. Силин, А. В. Студенов, *Краткие сообщения по физике*, ФИАН, № 1–2 (1996), стр. 71.
9. В. В. Курин, А. В. Юлин, *Изв. ВУЗов, Радиофизика XXXVIII*, 287 (1995).
10. К. Н. Овчинников, В. П. Силин, С. А. Урюпин, *ФММ* **83**, 14 (1997).
11. J. Pearl, *Appl. Phys. Lett.* **5**, 65 (1964).
12. Ю. М. Иванченко, Т. К. Соболева, *Письма в ЖЭТФ* **51**, 100 (1990).
13. Yu. M. Ivanchenko and T. K. Soboleva, *Phys. Lett. A* **147**, 65 (1990).

14. R. G. Mints and I. B. Snapiro, *Phys. Rev. B* **51**, 3054 (1995).
15. V. I. Ivlev and N. B. Kopnin, *Advances in Physics* **33**, 47 (1984).
16. Ю. М. Куприянов, К. К. Лихарев, А. К. Семенов, *ФНТ* **2**, 706 (1976).
17. A. Gurevich, *Phys. Rev. B* **48**, 12857 (1993).
18. В. П. Силин, *ЖЭТФ* **112**, 1396 (1997).
19. Ж. Д. Генчев, В. И. Васькивский, *ЖЭТФ* **113**, 955 (1998).
20. R. G. Mints, *Journal of Low Temperature Physics* **106**, 183 (1997).
21. А. С. Малишевский, В. П. Силин, С. А. Урюпин, *Краткие сообщения по физике*, ФИАН, № 3 (1998), с. 21.
22. А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников, *ЖЭТФ* **53**, 2159 (1967).
23. К. К. Лихарев, В. К. Семенов, А. Б. Зорин, *Новые возможности для сверхпроводниковой электроники*, ВИНТИ, Москва (1988).