

## ЛОРЕНЦЕВА ИОНИЗАЦИЯ АТОМОВ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. С. Попов

*Институт теоретической и экспериментальной физики  
117218, Москва, Россия*

Б. М. Карнаков\*, В. Д. Мур

*Московский государственный инженерно-физический институт  
115409, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 17 ноября 1998 г.

В квазиклассическом приближении рассчитана вероятность  $w_L$  лоренцевой ионизации, возникающей при движении атомов или ионов в сильном магнитном поле. Найден фактор стабилизации  $S$ , учитывающий подавление вероятности ионизационного распада связанного  $s$ -состояния из-за влияния магнитного поля. Даны оценки вероятности  $w_L$  в экспериментах по магнитной кумуляции и в астрофизике. Качественно рассмотрена динамика процесса магнитной кумуляции с учетом конечной проводимости оболочки. Обсуждается парадокс, связанный с использованием квазистационарного решения на стадии расширения оболочки.

В работах [1, 2] развита квазиклассическая теория ионизации атомов и ионов под действием постоянных электрического и магнитного полей. Специальным случаем является расчет вероятности  $w_L$  лоренцевой ионизации (т. е. ионизации при движении частиц в постоянном или квазистатическом магнитном поле), что является предметом настоящей статьи<sup>1)</sup>. Будут приведены оценки вероятности  $w_L$  в опытах по магнитной кумуляции (сжатию аксиального магнитного поля с помощью взрыва), в которых были получены рекордные в лабораторных условиях значения напряженности магнитного поля [4–6], а также в астрофизике (магнитные белые карлики). Дано качественное описание динамики процесса магнитной кумуляции.

Далее используется атомная система единиц  $\hbar = e = m_e = 1$  ( $\mathcal{E}_a = 5.14 \cdot 10^9$  В/см,  $\mathcal{H}_a = 137\mathcal{E}_a = 2.35 \cdot 10^9$  Гс и  $me^4/\hbar^3 = 4.13 \cdot 10^{16}$  с<sup>-1</sup> — атомные единицы напряженности электрического и магнитного полей и вероятности  $w_L$ ) и те же обозначения, что в работах [2, 3].

## 1. ТЕОРИЯ ЛОРЕНЦЕВОЙ ИОНИЗАЦИИ

Когда атом или ион влетает в постоянное магнитное поле  $\mathcal{H}$ , то в его системе покоя  $K_0$  возникает (вследствие преобразования Лоренца) электрическое поле  $\mathcal{E}_0$ , вызывающее ионизацию; такой процесс получил название лоренцевой ионизации. При этом  $\mathcal{E}_0 \perp \mathcal{H}_0$ ,

\*E-mail: karnak@theor.mephi.msk.su

<sup>1)</sup> Часть излагаемых ниже результатов анонсирована в [3].

$$\frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{H}} = \sqrt{\Gamma^2 - 1} \sin \varphi = \sqrt{a}, \quad \frac{\mathcal{H}_0}{\mathcal{H}} = \sqrt{\Gamma^2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 + a}, \quad (1)$$

$\Gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  — лоренц-фактор,  $v$  — скорость атома,  $\varphi$  — угол между  $\mathbf{v}$  и  $\mathcal{H}$ ,

$$\rho \equiv \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{H}_0} = \sqrt{\frac{a}{1+a}}, \quad a = (\Gamma^2 - 1) \sin^2 \varphi. \quad (2)$$

Квазиклассическая теория лоренцевой ионизации следует непосредственно из результатов работ [1, 2]. Введенный там параметр  $\gamma = \omega_c/\omega_t$  ( $\omega_c = e\mathcal{H}_0/m_e c$  — циклотронная частота,  $\omega_t = \mathcal{E}/\hbar$  — частота туннелирования), определяющий характер подбарьерного движения электрона, равен

$$\gamma_L = \frac{\kappa \mathcal{H}_0}{c \mathcal{E}_0} = \frac{\kappa}{v_{\perp}} \sqrt{1 - (1 - \Gamma^{-2}) \cos^2 \varphi}, \quad (3)$$

где  $v_{\perp} = v \sin \varphi$  — поперечная относительно поля  $\mathcal{H}$  компонента скорости атома (причем  $v$  выражена здесь в атомных единицах  $v_a = e^2/\hbar$ ),  $\kappa = \sqrt{2E_i}$ ,  $E_i$  — потенциал ионизации рассматриваемого атома (или иона) и  $c = \alpha^{-1} = 137$ .

Для нерелятивистских частиц  $\rho \ll 1$ , а  $\gamma_L$  может принимать любые значения:

$$\rho = \frac{v_{\perp}}{c}, \quad \gamma_L = \frac{\kappa}{v_{\perp}}, \quad \mathcal{E}_0 = \frac{v_{\perp}}{c} \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) \mathcal{H}. \quad (4)$$

С другой стороны, в случае ультрарелятивистских ( $\Gamma \gg 1$ ) частиц

$$\rho = \begin{cases} 1 - (2\Gamma^2 \sin^2 \varphi)^{-1}, & \varphi \gg \Gamma^{-1}, \\ \varphi/\sqrt{\Gamma^{-2} + \varphi^2}, & 0 < \varphi \ll 1. \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, в системе  $K_0$  возникают скрещенные поля, т.е.  $\mathcal{E}_0$  и  $\mathcal{H}_0$  взаимно перпендикулярны и равны по величине (за исключением частиц, влетающих в узком конусе,  $\varphi \lesssim \Gamma^{-1}$ , вокруг направления магнитного поля). При этом  $\mathcal{E}_0$  может во много раз превышать исходное магнитное поле  $\mathcal{H}$ , а

$$\gamma_L = \frac{\kappa}{137} \left[ 1 + \frac{1}{2\Gamma^2 \sin^2 \varphi} \right] \ll 1.$$

В частности, если  $\mathbf{v} \perp \mathcal{H}$ , то

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{\Gamma^2 - 1} \mathcal{H}, \quad \mathcal{H}_0 = \Gamma \mathcal{H}, \quad \rho = \sqrt{1 - \Gamma^{-2}}, \quad \gamma_L = \frac{\kappa}{v} = \frac{\kappa}{137 \sqrt{1 - \Gamma^{-2}}}. \quad (6)$$

Вероятность лоренцевой ионизации атомного  $s$ -уровня равна (в лабораторной системе  $K$ ):

$$w_L = \Gamma^{-1} \kappa^2 \cdot 2^{2\eta} C_{\kappa}^2 \epsilon^{1-2\eta} P(\gamma_L) [Q(\gamma_L)]^{\eta} \exp \left\{ -\frac{2}{3\epsilon} g(\gamma_L) \right\}. \quad (7)$$

Здесь

$$\epsilon = \mathcal{E}_0/\kappa^3 \mathcal{E}_a = \Gamma \kappa^{-1} v_{\perp} \hbar, \quad h = \mathcal{H}_0/\kappa^2 \mathcal{H}_a, \quad (7')$$

$\epsilon$  и  $h$  — «приведенные» значения полей в системе покоя атома  $K_0$ ,  $\eta = Z/\kappa$  — параметр Зоммерфельда для дискретного спектра (или эффективное главное квантовое число  $n^*$ ),  $Z$  — заряд атомного остова,  $C_\kappa$  — асимптотический коэффициент (на бесконечности) волновой функции свободного атома<sup>2)</sup> и, наконец,  $P(\gamma)$ ,  $Q(\gamma)$  и  $g(\gamma)$  — функции, введенные в [2] и относящиеся к углу  $\theta = \pi/2$  между полями (см. табл. 1). Отметим, что множитель  $\Gamma^{-1}$  в (7) учитывает эффект релятивистского замедления времени при переходе из системы покоя  $K_0$  в лабораторную систему  $K$ .

Вероятность лоренцевой ионизации удобно записать в факторизованном виде:

$$w_L = \Gamma^{-1} S w(\mathcal{E}_0), \quad (8)$$

где  $w(\mathcal{E}_0)$  — вероятность ионизации под действием одного лишь электрического поля  $\mathcal{E}_0$ ; например, в квазиклассическом приближении

$$w_{cl}(\mathcal{E}_0) = \kappa^2 2^{2\eta} |C_\kappa|^2 \epsilon^{1-2\eta} \exp(-2/3\epsilon). \quad (9)$$

Далее, в (8)  $S$  — «фактор стабилизации», определяющий подавление распада связанного состояния магнитным полем:

$$S = P(\gamma_L) [Q(\gamma_L)]^\eta \exp\left\{-\frac{1}{h} f(\gamma_L)\right\}, \quad (10)$$

где

$$f(\gamma) = \frac{2}{3} \gamma [g(\gamma) - 1] = \begin{cases} \frac{1}{45} \gamma^3 \left(1 + \frac{11}{252} \gamma^2 + \dots\right), & \gamma \ll 1, \\ \frac{1}{4} \gamma^2 \left(1 - \frac{8}{3\gamma} + \dots\right), & \gamma \gg 1, \end{cases} \quad (11)$$

$$P(\gamma) [Q(\gamma)]^\eta = \begin{cases} 1 - \frac{1}{6} \left(1 - \frac{4}{3} \eta\right) \gamma^2 + \dots, & \gamma \ll 1, \\ c_0 c_1^\eta \gamma^{1-2\eta} \exp\left\{-\left(\frac{1}{2} \gamma^2 - \pi \eta \gamma\right)\right\}, & \gamma \gg 1, \end{cases} \quad (12)$$

а  $c_0$  и  $c_1$  — численные константы:  $c_0 = 1.716$ ,  $c_1 = 0.0106$ .

Кулоновский фактор  $Q(\gamma_L)$  существенно повышает вероятность лоренцевой ионизации, если  $\gamma_L \gtrsim 1$  и  $\eta > 0$ . В целом, однако, предэкспоненциальный множитель в (7) резко убывает с ростом параметра  $\gamma_L$ , см. (12). Заметим еще, что хотя функции  $P(\gamma)$  и  $Q(\gamma)$  изменяются более резко, чем  $g(\gamma)$  и  $f(\gamma)$ , вероятность  $w_L$  наиболее чувствительна к изменению именно  $g$  и  $f$ , поскольку эти функции входят в (7) и (10) в экспоненте и притом с большими коэффициентами (соответственно  $2/3\epsilon$  и  $1/h$ ).

<sup>2)</sup> Значения  $C_\kappa$  известны из численных расчетов по методу Хартри—Фока, а также из эксперимента. Оценку этих коэффициентов для нейтральных атомов можно провести по простой аналитической формуле [7], вытекающей из разложения эффективного радиуса. Заметим, что  $Z = 1$  при ионизации нейтрального атома,  $Z = \eta = 0$  в случае отрицательного иона.

Таблица 1

$\gamma$	$\tau_0$	$g(\gamma)$	$P(\gamma)$	$Q(\gamma)$	$f(\gamma)$
0.5	0.5071	1.0084	0.9583	1.058	2.81(-3)
0.8	0.8296	1.0219	0.8934	1.160	1.17(-2)
0.9	0.9425	1.0280	0.8651	1.209	1.68(-2)
1.0	1.0590	1.0348	0.8337	1.268	2.32(-2)
1.1	1.1795	1.0425	0.7990	1.339	3.12(-2)
1.2	1.3046	1.0511	0.7614	1.422	4.09(-2)
1.3	1.4349	1.0606	0.7208	1.523	5.25(-2)
1.4	1.5711	1.0710	0.6776	1.643	6.63(-2)
1.5	1.7137	1.0825	0.6319	1.787	8.25(-2)
1.6	1.8636	1.0950	0.5843	1.962	0.101
1.7	2.0214	1.1087	0.5351	2.174	0.123
1.8	2.1878	1.1234	0.4850	2.432	0.148
1.9	2.3635	1.1393	0.4346	2.750	0.176
2.0	2.5490	1.1564	0.3847	3.143	0.209
2.1	2.7450	1.1748	0.3362	3.630	0.245
2.2	2.9517	1.1943	0.2899	4.239	0.285
2.3	3.1694	1.2150	0.2465	5.001	0.330
2.4	3.3983	1.2368	0.2067	5.959	0.379
2.5	3.6383	1.2597	0.1709	7.168	0.433
2.6	3.8894	1.2837	0.1394	8.699	0.492
2.7	4.1515	1.3087	0.1121	1.064(1)	0.556
2.8	4.4244	1.3346	8.905(-2)	1.311(1)	0.625
2.9	4.7078	1.3613	6.981(-2)	1.625(1)	0.699
3.0	5.0018	1.3888	5.406(-2)	2.027(1)	0.778
3.1	5.3061	1.4170	4.136(-2)	2.540(1)	0.862
3.2	5.6207	1.4458	3.127(-2)	3.199(1)	0.951
3.3	5.9454	1.4752	2.338(-2)	4.044(1)	1.045
3.4	6.2802	1.5051	1.728(-2)	5.131(1)	1.145
3.5	6.6251	1.5355	1.263(-2)	6.532(1)	1.250
3.6	6.9801	1.5664	9.126(-3)	8.340(1)	1.359
3.8	7.7200	1.6292	4.613(-3)	1.370(2)	1.594
4.0	8.5000	1.6934	2.233(-3)	2.273(2)	1.849
4.5	1.0625(1)	1.8583	3.019(-4)	8.318(2)	2.575
5.0	1.300(1)	2.0280	3.135(-5)	3.156(3)	3.427
6	1.850(1)	2.3767	1.546(-7)	4.899(4)	5.507
7	2.500(1)	2.7332	2.722(-10)	8.159(5)	8.088
8	3.250(1)	3.0945	1.725(-13)	1.426(7)	1.117(1)
9	4.100(1)	3.4588	3.954(-17)	2.584(8)	1.475(1)
10	5.050(1)	3.8254	3.292(-21)	4.813(9)	1.884(1)
15	1.130(2)	5.6751	3.560(-48)	1.398(16)	4.675(1)

Примечание. В таблице принято обозначение:  $x(y) \equiv x \cdot 10^y$ .

Для медленных частиц фактор стабилизации экспоненциально мал:

$$S \approx \exp \left\{ -\frac{1}{4h} \left( \frac{\kappa}{v_{\perp}} \right)^2 \right\}, \quad v \ll \kappa \quad (10')$$

(при этом  $\gamma_L \gg 1$ ). Однако он быстро увеличивается с ростом скорости атома и приближается к единице при  $v \gg 0.3\kappa h^{-1/3}$  или  $\gamma_L \ll 3.5h^{1/3}$ :

$$S = 1 + \frac{2}{9} \left( \eta - \frac{3}{4} \right) \gamma_L^2 - \frac{1}{45h} \gamma_L^3 + \dots, \quad \gamma_L = \frac{\kappa}{v_{\perp}}. \quad (10'')$$

Отметим, что для отрицательных ионов ( $\eta = 0$ ) фактор стабилизации всегда меньше единицы:

$$S(\gamma) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{6}\gamma^2 - \frac{1}{45h}\gamma^3 - \frac{1}{3240}\gamma^4 - \dots, & \gamma \rightarrow 0, \\ c_0\gamma \exp \left\{ -\frac{1}{h} \left( \frac{1}{4}\gamma^2 - \frac{2}{3}\gamma + \frac{1}{2} \right) \right\}, & \gamma \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (13)$$

Для нейтральных атомов и положительных ионов он может стать и больше единицы, однако это происходит в той области параметров, где приведенное поле  $\epsilon \sim 1$ , в силу чего квазиклассическое приближение уже неприменимо.

Численный расчет дает для  $S$  кривые, показанные на рис. 3 в работе [3]. Из него видно, что  $S \ll 1$  в случае достаточно «слабых» магнитных полей, а также при  $\gamma_L \gtrsim 1$ . Влияние кулоновского взаимодействия на величину  $S$  становится заметным, если  $\gamma_L > 1.5$ , причем учет его повышает численное значение вероятности  $w_L$ .

Статические магнитные поля, полученные в лаборатории, не превышают 1 МГс [8]. Метод магнитной кумуляции (т. е. сжатие магнитного поля, окруженного хорошо проводящей оболочкой, с помощью взрыва), предложенный Сахаровым в 1951 г., позволил достичь рекордных значений  $\mathcal{H} = 25$  МГс в СССР [4–6] и  $\mathcal{H} = 15$  МГс в США [8]. Благодаря дальнейшему прогрессу в этой области можно ожидать достижения полей  $3 \cdot 10^7$ – $10^8$  Гс [9]. Обсуждаются и другие возможности получения сверхсильных магнитных полей, например, обжатие металлической оболочки абляционным давлением мощного лазерного излучения [10].

Исходя из этого мы вычислили фактор стабилизации  $S$  для атома водорода. Из табл. 2 видно, что в рассматриваемой области значений  $\mathcal{H}$  и  $v$  происходит резкий переход от экспоненциального подавления (10') вероятности ионизации к случаю (10''), когда влиянием магнитного поля уже можно пренебречь. Для быстрых ( $v \gtrsim 10\kappa$ , и тем более при  $\Gamma \gg 1$ ) частиц  $S \approx 1$ , т. е. ионизация атомного уровня происходит практически с той же скоростью, что и под действием одного лишь электрического поля  $\mathcal{E}_0$ , действующего в системе покоя атома. Этим лоренцева ионизация в случае  $\Gamma \gg 1$  качественно отличается от известной задачи о рождении пар из вакуума, вероятность которого для скрещенных полей обращается в нуль тождественно [11, 12]. Причина этого различия физически очевидна: в случае ионизации атома имеется выделенная система отсчета  $K_0$ , в то время как вакуум лоренц-инвариантен и всегда можно перейти в такую систему отсчета, где напряженности полей  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$  сколь угодно малы (а в этом случае, очевидно, пары не рождаются).

Таблица 2

Фактор стабилизации  $S$  для атома водорода (основное состояние,  $\kappa = 1$ )

$\mathcal{H}$	$v$								
	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.5	2.0	5	10
1	—	1.6(-33)	2.2(-24)	2.3(-18)	3.1(-14)	1.5(-7)	1.38(-3)	0.659	0.950
2	2.2(-24)	4.2(-17)	1.5(-12)	1.5(-9)	1.8(-7)	3.9(-4)	3.74(-2)	0.813	0.975
5	3.7(-10)	2.9(-7)	1.9(-5)	2.1(-4)	2.05(-3)	4.37(-2)	0.271	0.922	0.990
10	2.0(-5)	5.60(-4)	4.53(-3)	1.80(-2)	4.62(-2)	0.212	0.524	0.961	0.995
15	7.6(-4)	6.96(-3)	2.79(-2)	6.96(-2)	0.130	0.358	0.653	0.975	0.997
25	1.39(-2)	5.22(-2)	0.119	0.206	0.299	0.546	0.779	0.986	0.998
50	0.123	0.236	0.355	0.464	0.558	0.748	0.889	0.994	0.999
100	0.367	0.503	0.613	0.697	0.762	0.876	0.949	0.998	1000
350	0.799	0.863	0.905	0.933	0.952	0.981	0.995	1.000	1000

*Примечание.* Магнитное поле выражено в МГс, скорость атома  $v$  — в атомных единицах  $v_a = e^2/\hbar = 2.19 \cdot 10^8$  см/с. Прочерк означает, что  $S < 10^{-40}$ .

Таблица 3

Фактор стабилизации  $S$  для отрицательного атомарного иона водорода ( $\kappa = 0.236$ )

$\mathcal{H}$	$v$							
	0.15	0.2	0.3	0.4	0.6	0.8	1.0	2.0
0.01	—	—	—	4.3(-27)	1.8(-8)	5.5(-4)	2.15(-2)	0.619
0.1	—	7.1(-23)	4.3(-7)	2.19(-3)	0.164	0.466	0.675	0.951
1.0	—	4.81(-3)	0.209	0.514	0.815	0.914	0.954	0.993
10	9.4(-11)	0.463	0.775	0.887	0.957	0.978	0.987	0.997
25	7.2(-5)	0.628	0.846	0.919	0.967	0.983	0.989	0.998

Результаты расчетов для иона  $H^-$  (энергия сродства к электрону  $E_i = 0.7542$  эВ,  $\kappa = 0.2355$ ) приведены в табл. 3. Как и для других отрицательных ионов с малой энергией связи<sup>3)</sup>, зависимость  $w_L$  от  $\mathcal{H}$  и  $v$  аналогична предыдущей, однако та область, в которой фактор стабилизации  $S \approx 1$ , начинается со значительно меньших значений  $\mathcal{H}$  и  $v$ .

<sup>3)</sup> Например,  $Ca^-$  ( $E_i = 0.0184$  эВ,  $\kappa = 0.037$ ),  $Fe^-$  ( $E_i = 0.151$  эВ,  $\kappa = 0.105$ ),  $Sr^-$  ( $E_i = 0.11$  эВ,  $\kappa = 0.090$ ) и др. [13].

Таблица 4

## Вероятность лоренцевой ионизации атомов водорода

$v$	$\mathcal{H} = 25$ МГц			$v$	$\mathcal{H} = 350$ МГц		
	$\mathcal{E}_0$	$S$	$w_L$		$\mathcal{E}_0$	$S$	$w_L$
0.5	5.32(-3)	3.69(-9)	4.1(-44)	0.167	2.48(-2)	6.6(-19)	7.6(-12)
1.0	1.06(-2)	0.119	1.03(-9)	0.20	2.98(-2)	1.01(-11)	8.05(-3)
1.25	1.33(-2)	0.345	6.41(-4)	0.22	3.28(-2)	7.79(-9)	50.4
1.67	1.77(-2)	0.645	2.40	0.25	3.72(-2)	2.06(-6)	1.06(5)
2.0	2.13(-2)	0.779	1.55(5)	0.3	4.47(-2)	6.73(-4)	5.22(8)
2.5	2.66(-2)	0.882	5.56(7)	0.4	5.96(-2)	6.70(-2)	1.33(12)
3.33	3.55(-2)	0.950	2.14(10)	0.5	7.45(-2)	0.298	3.54(13)
5.0	5.32(-2)	0.984	6.24(12)	1.0	0.149	0.905	2.19(15)
10	0.107	0.998	7.73(14)				

Примечание. Значения  $v$  и  $\mathcal{E}_0$  даны в атомных единицах, вероятность ионизации  $w_L$  — в  $\text{с}^{-1}$ .

## 2. ЧИСЛЕННЫЕ ОЦЕНКИ

При  $\mathcal{H} < 1$  МГц атом, по существу, стабилен, поскольку электрическое поле  $\mathcal{E}_0$  слишком мало ( $\mathcal{E}_0 < 0.01$ , если  $\Gamma < 25$ ). В области  $\mathcal{H} \gtrsim 10$  МГц лоренцева ионизация уже может наблюдаться, если скорость атома не очень мала. Так, при  $\mathcal{H} = 25$  МГц ( $\hbar = 0.0106$ ) получаем значения  $w_L$ , приведенные в табл. 4; там же указаны скорость атома  $v$  (случай  $v \perp \mathcal{H}$ ) и электрическое поле  $\mathcal{E}_0$ , действующее в его системе покоя. В рассмотренном интервале скоростей ситуация меняется от практически полной стабильности атома до ионизации его за время порядка атомного.

Фактор стабилизации  $S$  особенно существен при  $\gamma_L > 1$ . Чтобы значения  $\mathcal{E}_0$  (и, соответственно, вероятности  $w_L$ ) не были при этом чрезмерно малы, необходимо, чтобы  $\kappa \ll 1$ ; тогда  $v = \kappa/\gamma_L \ll 1$ , т. е. осуществляется нерелятивистская ситуация. Аномально малые значения  $\kappa$  достигаются для ридберговских состояний атомов (так, в атоме водорода  $\kappa = 1/n$  для состояний с главным квантовым числом  $n$ ), а также в физике твердого тела — для экситонов Ванье—Мотта [14] в полупроводниках. Например, в кристалле германия эффективная масса электрона  $m_* \approx 0.2m_e$ , диэлектрическая проницаемость  $\epsilon \approx 16$ ,  $\kappa = m_*/\epsilon m_e \approx 1/80$ , поэтому характерные электрические поля, при которых ионизация становится практически мгновенной ( $\epsilon \sim 1$ ), порядка  $\kappa^3 \mathcal{E}_a \sim 10$  кВ/см. Такие поля легко достижимы в эксперименте.

Сверхильные магнитные поля встречаются также в космосе. В этой связи следует упомянуть о магнитных белых карликах — звездах, которые интенсивно изучаются в настоящее время [15–18]. На их поверхности существуют огромные магнитные поля (см., например, таблицу в [18, стр. 35], содержащую около пятидесяти таких объектов с полями от 2 МГц до  $\sim 1000$  МГц). Так, в звезде Ggw+70°08247 поле соответствует магнитному диполю и меняется от максимального значения  $\mathcal{H}_m = 350$  МГц на полюсах звезды до  $0.5\mathcal{H}_m$  на ее экваторе [17] (согласно [18], в этом случае  $\mathcal{H}_m \approx 240$  МГц). Преимуществом белых карликов (по сравнению, например, с нейтронными звездами,

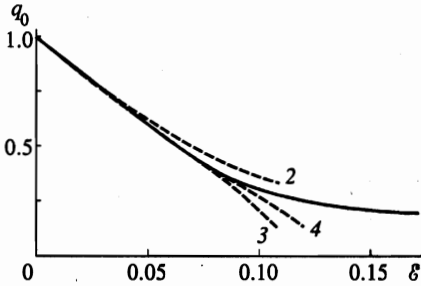


Рис. 1. График функции  $q_0(\mathcal{F}) = w/w_{cl}$  для основного состояния атома водорода. Штриховые кривые 2, 3 и 4 соответствуют учету в (14') членов до  $\mathcal{F}^2$ ,  $\mathcal{F}^3$  и  $\mathcal{F}^4$  включительно

где магнитные поля гораздо выше) является возможность исследования оптических спектров [16, 17], что позволяет изучать влияние полей  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{H}$  на атомные уровни, в первую очередь для атомов водорода и гелия. Процессы лоренцевой ионизации атомов могут происходить, когда такая звезда пролетает сквозь облако нейтрального водорода. Из табл. 4 следует, что вероятность лоренцевой ионизации атомов водорода в поле  $\mathcal{H} = 350$  МГц ( $h = 0.149$ ) достигает заметной величины, если скорость звезды  $v \gtrsim 400$  км/с, причем зависимость  $w_L$  от  $v$  чрезвычайно резкая.

Однако даже и при малой скорости движения звезды относительно облака межзвездного газа лоренцева ионизация его атомов будет происходить вследствие того<sup>4)</sup>, что атомы падают на поверхность звезды со скоростью  $v = \sqrt{2GM/R}$  (в силу разреженности газа столкновениями атомов можно пренебречь). Полагая массу белого карлика  $M \sim M_\odot = 2 \cdot 10^{33}$  г и его радиус  $R \sim 10^4$  км, получаем  $v \simeq (4-5) \cdot 10^3$  км/с. Поскольку вне звезды  $\mathcal{H}(r) \propto \mathcal{H}_m(r/R)^{-3}$ , то лоренцева ионизация атомов водорода происходит на расстояниях порядка нескольких радиусов  $R$ .

Сделаем еще замечание относительно вычисления вероятностей  $w_L$ , приведенных в табл. 4. Квазиклассическая формула (9), будучи асимптотически точной в пределе слабого ( $\mathcal{F} \rightarrow 0$ ) поля, сравнительно рано перестает быть применимой. Это можно увидеть из сравнения ее с точными численными расчетами. Комплексные энергии  $E(\mathcal{F}) = E_r - i\Gamma/2$  штарковских резонансов в атоме водорода рассчитывались многими авторами — см., например, работы [19–27] (вероятность ионизации  $w(\mathcal{F}) \equiv \Gamma(\mathcal{F})$ , если ширина уровня  $\Gamma$  мала). При этом использовались различные численные методы, в том числе суммирование расходящихся рядов теории возмущений [26–30] с помощью метода Паде—Бореля [20] и аппроксимант Паде—Эрмита [21]. Вероятность ионизации  $s$ -уровня запишем в виде

$$w(\mathcal{F}) = q(\mathcal{F}) w_{cl}(\mathcal{F}), \quad (14)$$

где  $w_{cl}$  дается формулой (9), а  $w$  — результат численного расчета. Функция  $q(\mathcal{F})$  приведена на рис. 1 для основного состояния атома водорода ( $q = q_0$ ); при этом были использованы результаты работ [18–23]. В данном случае [31, 25–29]

$$w_{cl}(\mathcal{F}) = 4\mathcal{F}^{-1} \exp\left(-\frac{2}{3\mathcal{F}}\right), \quad q_0(\mathcal{F}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \mathcal{F}^k, \quad (14')$$

<sup>4)</sup> Этим замечанием мы обязаны С. И. Блинникову.



где  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = -107/12$ ,  $c_2 = 7363/288$ ,  $c_3 = -158.75 \pm 0.07$ ,  $c_4 = 469.0 \pm 1.0$ ,  $c_5 = 10250 \pm 150$ , ... (этим разложением можно пользоваться при  $\mathcal{E} < 0.1$ , см. штриховые кривые на рис. 1). Отметим, что квазиклассическая асимптотика  $w_{cl}(\mathcal{E})$  завышает<sup>5)</sup> точное значение вероятности ионизации, причем для  $\mathcal{E} \sim 0.2\mathcal{E}_a \sim 10^9$  В/см численные значения  $w$  оказываются в пять-шесть раз меньше, чем  $w_{cl}$ .

В той области значений скорости  $v$ , где происходит резкий рост вероятности  $w_L$ , поправка  $q_0(\mathcal{E})$  является существенной и учитывалась при расчете значений  $w_L$  из табл. 4. Следует отметить, что формула (10) для фактора стабилизации  $S$  имеет более широкую область применимости вплоть до  $\mathcal{H} \sim 0.1$ . Это вытекает из сравнения с численным расчетом [32] для параллельных полей  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$  и с расчетом, недавно проведенным Вайнбергом и Гани [33] для случая взаимно перпендикулярных полей.

### 3. ИОНИЗАЦИЯ В ПРОЦЕССЕ МАГНИТНОЙ КУМУЛЯЦИИ

До сих пор магнитное поле считалось постоянным во времени. Перейдем к случаю переменных полей  $\mathcal{H}(t)$ , возникающих в процессе магнитной кумуляции.

В дальнейшем следуем указаниям, приведенным в работах Сахарова [5, 6]. Металлический цилиндр, обжимающий магнитное поле (его внутренний радиус  $R(t)$ , толщина оболочки  $d \ll R$ , проводимость  $\sigma$ ), в первом приближении можно считать идеальным проводником; тогда

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_0(R_0/R)^2, \quad W(t) = W_0(R_0/R)^2, \quad (15)$$

где  $W = \mathcal{H}^2 R^2 / 8$  — энергия магнитного поля (на единицу длины цилиндра). В безразмерных переменных  $\xi = R/R_0$ ,  $\tau = v_0 t / R_0$  закон сохранения энергии дает

$$\dot{\xi}^2 = 1 + \frac{1}{K} \left( 1 - \frac{1}{\xi^2} \right), \quad \xi(0) = -\dot{\xi}(0) = 1, \quad (16)$$

где  $K = M v_0^2 / 2W_0 = 8\pi \rho_0 v_0^2 d_0 / \mathcal{H}_0^2 R_0$  — отношение кинетической энергии оболочки к заключенной внутри нее магнитной энергии в начальный момент  $t = 0$  (реально на опыте  $K \gg 1$ ),  $\rho_0$  — плотность вещества оболочки, а точкой здесь и далее мы обозначаем производные по  $\tau$ . Решением уравнения (16) является

$$\xi^{(0)}(t) = \sqrt{\xi_m^2 + \frac{K+1}{K}(\tau - \tau_m)^2}, \quad \mathcal{H}^{(0)}(t) = \mathcal{H}_m \left\{ 1 + \frac{(\tau - \tau_m)^2}{(\Delta t)^2} \right\}^{-1}, \quad (17)$$

причем  $\mathcal{H}_m / \mathcal{H}_0 = W_m / W_0 = K + 1$ , значения  $\xi_m = (K + 1)^{-1/2}$  и  $\tau_m = K / (K + 1)$  относятся к моменту максимума магнитного поля,  $2\Delta t = [\sqrt{K} / (K + 1)] T_0$  — время, в течение которого поле близко к своему максимальному значению, и  $T_0 = 2R_0 / v_0$  — характерное время всего процесса ( $\Delta t / T_0 \approx K^{-1/2} \ll 1$ ). С другой стороны, время туннелирования электрона  $T_t \sim \kappa^2 / 2\mathcal{E}_0 \sim (\kappa\epsilon)^{-1} \cdot 10^{-17} \text{ с} \approx (v\hbar)^{-1} \cdot 10^{-15} \text{ с} \ll \Delta t$ , поэтому полную вероятность лоренцевой ионизации можно рассчитывать в адиабатическом приближении<sup>6)</sup>:

<sup>5)</sup> То же имеет место и для возбужденных состояний,  $n \geq 2$ .

<sup>6)</sup> Этим выражением можно пользоваться, пока  $w_t \ll 1$ ; в противном случае его следует заменить на  $1 - \exp(-w_t)$ . См. также формулу (33) ниже.

$$w_t = \int_0^{\infty} w_L(\mathcal{H}(t)) dt = \mu w_L(\mathcal{H}_m) \Delta t, \quad (18)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{\pi h_m}{f(\gamma_L)}} = \kappa^{-1} \sqrt{\frac{\mathcal{H}_m}{\mathcal{H}_a}} \begin{cases} 11.9 \gamma_L^{-3/2}, & \gamma_L \ll 1, \\ 3.5 \gamma_L^{-1}, & \gamma_L \gg 1. \end{cases} \quad (18')$$

При этом предполагалось, что частица находится в области магнитного поля в течение времени  $\gtrsim \Delta t$ . Это выполняется в случае ионов, для которых ларморовский радиус обычно меньше, чем минимальный радиус оболочки  $R_m \equiv R(t_m) = K^{-1/2} R_0$ . Нейтральные атомы не закручиваются магнитным полем, и для них  $\mu = Lv_0/R_m v$ , где  $v_0$  — начальная скорость оболочки,  $v$  — скорость атома,  $L$  — его пробег в магнитном поле ( $L \sim R_m/\sin \varphi$ ). В этом случае  $\mu \sim 10^{-3} \ll 1$ , поэтому вероятность ионизации атомов (в условиях взрывного эксперимента) подавлена по сравнению со случаем отрицательных ионов. Приведенные выше формулы позволяют легко рассчитать  $w_t$ , если известны параметры процесса магнитной кумуляции.

Отметим также, что входящая в (18) величина

$$\mu \Delta t = \kappa^{-1} \sqrt{\frac{\pi}{f(\gamma_L)} \frac{\mathcal{H}_0}{\mathcal{H}_a} \frac{R_0}{v_0}} \quad (18'')$$

выражается через параметры  $R_0$ ,  $v_0$  и  $\mathcal{H}_0$ , относящиеся к начальному ( $t = 0$ ) моменту времени.

В следующем приближении необходимо учесть омические потери из-за конечной проводимости оболочки. Имеем

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} M \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{1}{8} \mathcal{H}^2 R^2 \right\} = -J = -\frac{1}{2} c R \mathcal{E} \mathcal{H}, \quad (19)$$

где  $J$  — поток электромагнитной энергии через стенку радиуса  $R(t)$  в ее системе покоя. Уравнения Максвелла для квазистационарного поля в хорошо проводящей среде [34],

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = D \Delta \mathcal{H}, \quad \mathcal{E} = \frac{c}{4\pi\sigma} \text{rot } \mathcal{H}, \quad D = \frac{c^2}{4\pi\sigma}, \quad (20)$$

имеют решение (ср. с [5])

$$\mathcal{H}(x, t) = \mathcal{H}_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta} + \int_0^t \lambda(t') dt'\right), \quad \mathcal{E} = \sqrt{\frac{\lambda}{4\pi\sigma}} \mathcal{H}, \quad (21)$$

где  $x = r - R(t)$ ,  $\delta = c/\sqrt{4\pi\sigma\lambda}$  — глубина скин-слоя и

$$\lambda = \frac{1}{\mathcal{H}} \frac{d\mathcal{H}}{dt} \approx -\frac{2}{R} \frac{dR}{dt} = -4T_0^{-1} \frac{\xi}{\xi}. \quad (22)$$

Это решение справедливо, если  $\delta/\delta \ll \mathcal{H}/\mathcal{H}$ , или

$$\frac{1}{2} \left| \frac{d}{dt} \frac{1}{\lambda(t)} \right| = \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{\mathcal{H} \ddot{\mathcal{H}}}{\dot{\mathcal{H}}^2} \right| \ll 1, \quad (23)$$

что аналогично условию применимости метода ВКБ в квантовой механике. Следует также отметить, что приближение (21) имеет физический смысл, только если  $\lambda(t) > 0$  (стадия сжатия оболочки), и неприменимо на стадии расширения. Причина этого разъясняется в разд. 5.

Из (20)–(22) получаем

$$J = \frac{1}{2} \lambda \mathcal{H}^2 R \delta = \frac{4cW_0}{(\pi\sigma T_0)^{1/2} R_0} (-\dot{\xi})^{1/2} \xi^{-7/2},$$

где  $W_0 = \mathcal{H}_0^2 R_0^2 / 8$ , и в итоге приходим к уравнению

$$\ddot{\xi} = \frac{1}{K \xi^3} \left( 1 + \frac{2\alpha}{\sqrt{-\xi \dot{\xi}}} \right), \quad 0 < \tau < \tau_m, \quad (24)$$

с теми же начальными условиями, что и в (16). Здесь  $\tau_m$  — точка остановки, в которой  $\dot{\xi}(\tau_m) = 0$ ,  $\alpha$  — безразмерный «коэффициент потерь» [5]:

$$\alpha = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma R_0 v_0}} \approx \frac{40}{\sqrt{\sigma R_0 v_0}} \quad (25)$$

(в последнем выражении проводимость  $\sigma$  измеряется в  $\text{Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$ ,  $R_0$  — в см и  $v_0$  — в км/с).

Приведем для ориентировки некоторые численные значения. При  $R_0 = 1$  см,  $v_0 = 1$  км/с и  $K = 100$  (или  $10^3$ ) получаем  $\alpha = 0.05$  (0.016) для  $\sigma = 6 \cdot 10^5 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$  (что соответствует проводимости меди при комнатной температуре [13]), а при  $\sigma = 4 \cdot 10^4 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$  ( $T = 1500^\circ\text{C}$ ) коэффициент потерь  $\alpha = 0.2$  (0.063). В последнем случае медь находится уже в жидком состоянии ( $T_m = 1085^\circ\text{C}$ ). При  $R_0 = 3$  см,  $v_0 = 10$  км/с и  $K = 1000$  имеем  $\alpha = 0.01$  и 0.037 для приведенных выше значений  $\sigma$ . Таким образом,  $\alpha \ll 1$ . Результаты решения уравнения (24) приведены в табл. 5; некоторые качественные особенности этих решений, а также область применимости этого уравнения обсуждаются в Приложении.

При выводе уравнений (16) и (24) предполагалось, что магнитный поток  $\Phi = \pi R^2 \mathcal{H}$ , заключенный внутри проводящей оболочки, сохраняется. Оценим теперь потери потока в процессе кумуляции. Вихревое электрическое поле, возникающее в оболочке, равно

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2\pi c R} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \sqrt{\frac{\lambda}{4\pi\sigma}} \mathcal{H},$$

откуда

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{c}{R} \sqrt{\frac{\lambda}{\pi\sigma}} \Phi = -\frac{4\alpha}{T_0} \sqrt{-\frac{\dot{\xi}}{\xi^3}} R^2 \mathcal{H}.$$

Переходя к безразмерному времени  $\tau = 2t/T_0$ , получаем

Таблица 5

## Результаты численного счета

$\alpha$	$K = 100$			$K = 1000$			$K = 10^4$		
	$\beta$	$\xi_m$	$\tau_m$	$\beta$	$\xi_m$	$\tau_m$	$\beta$	$\xi_m$	$\tau_m$
0	0	0.100	0.990	0	0.0316	0.999	0	0.0100	1.000
0.05	0.158	0.114	0.971	0.281	0.0392	0.990	0.5	0.0138	0.996
		0.115	0.968		0.0400	0.988		0.0144	0.995
0.1	0.316	0.126	0.960	0.562	0.0445	0.986	1.0	0.0162	0.994
		0.129	0.953		0.0469	0.982		0.0178	0.992
0.15	0.474	0.135	0.951	0.844	0.0490	0.983	1.5	0.0181	0.993
		0.141	0.941		0.0531	0.977		0.0207	0.990
0.2	0.632	0.144	0.945	1.125	0.0528	0.980	2.0	0.0198	0.992
		0.153	0.931		0.0587	0.973		0.0234	0.988
0.3	0.947	0.158	0.933	1.687	0.0593	0.976	3.0	0.0225	0.991
		0.173	0.913		0.0688	0.965		0.0282	0.984

*Примечание.*  $\xi_m$  и  $\tau_m$  относятся к точке остановки,  $\beta = K^{1/4}\alpha$  — параметр неупругости. При данных  $\alpha > 0$  и  $K$  первая и вторая строки соответствуют плоской и цилиндрической геометриям (соответственно уравнения (24) и (31)).

$$\frac{\dot{H}}{H} = -2 \left( \frac{\dot{\xi}}{\xi} + \alpha \sqrt{-\frac{\dot{\xi}}{\xi^3}} \right), \quad (26)$$

где  $\dot{H} = dH/d\tau$ , и т.д. Это уравнение применимо при условии, что полное изменение магнитного потока невелико. С учетом этого приходим к следующей оценке (в момент наибольшего сжатия оболочки)

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{H}_m}{\mathcal{H}_0} &= \xi_m^{-2} \exp \left\{ -2\alpha \int_0^{\tau_m} \sqrt{-\frac{\dot{\xi}}{\xi^3}} d\tau \right\} \approx \\ &\approx (K+1) \left\{ 1 + 2\alpha \int_0^{\tau_m} \left( 1 + \frac{2}{K\xi^2} \right) \sqrt{-\frac{\dot{\xi}}{\xi^3}} d\tau \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (27)$$

Отношение  $\rho_m = \xi_m/\xi_m^{(0)} = \sqrt{K+1} \xi_m$  показывает, насколько возрастает минимальный радиус оболочки вследствие потерь. Как показано в следующем разделе,  $\rho_m$  зависит не от  $K$  и  $\alpha$  по отдельности, а от параметра  $\beta = K^{1/4}\alpha$ , что подтверждается численным расчетом (рис. 2). При данном  $K$  значения коэффициента потерь (в порядке возрастания  $\beta$  на рис. 2) равны  $\alpha = 0.05, 0.1, 0.2$  и  $0.3$  (последнее — только для  $K = 10$  и  $100$ ).

Учет потерь в процессе кумуляции изменяет также величину  $\tau_m$ . Однако при рассматриваемых нами значениях  $K$  и  $\alpha$  это изменение не превышает нескольких процентов (см. табл. 5) и быстро уменьшается с ростом  $K$ . Уменьшение максимально до-

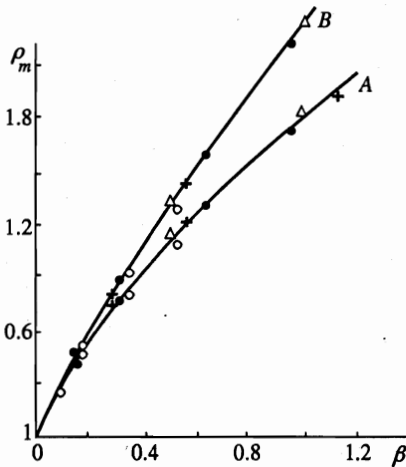


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость отношения  $\xi_m/\xi_m^{(0)}$  от  $\beta = K^{1/4}\alpha$ ; точки — результаты численных расчетов по (24) при  $K = 10$  (o), 100 (•), 1000 (+), 10000 ( $\Delta$ ). При данном  $K$  эти точки соответствуют (в порядке возрастания параметра  $\beta$ ) коэффициенту потерь  $\alpha = 0.05, 0.10, 0.20$  и  $0.30$ . Кривые A и B отвечают плоской и цилиндрической геометриям

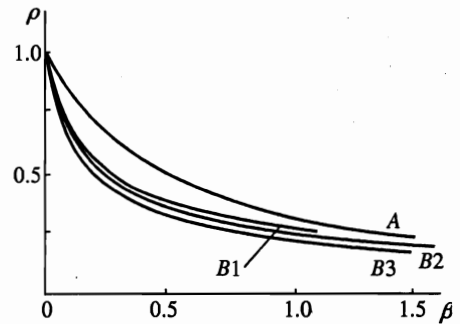


Рис. 3

Рис. 3. Потери магнитного поля в процессе кумуляции,  $\rho = \mathcal{H}_m/\mathcal{H}_m^{(0)}$ . Кривая A получена в приближении сохранения магнитного потока  $\Phi$ , кривые B1, B2 и B3 — с учетом уменьшения  $\Phi$

стижимого магнитного поля  $\mathcal{H}_m^{(0)} = (K + 1)\mathcal{H}_0$  (идеальный случай, отсутствие потерь) показано на рис. 3, где кривая A отвечает сохранению магнитного потока ( $\Phi(t) \approx \text{const}$ ,  $\mathcal{H}_m \propto \xi_m^{-2}$ ), а кривые B1, B2 и B3 рассчитаны по уравнению (27), т. е. с учетом уменьшения  $\Phi(t)$ , соответственно для  $K = 100, 10^3$  и  $10^8$ . Последнее значение  $K$  соответствует использованию для сжатия оболочки уже не заряда ВВ, а подземного ядерного взрыва относительно небольшой мощности (см. [6, стр. 85]). При изменении  $K$  в  $10^6$  раз кривые рис. 3 изменяются незначительно, что подтверждает вывод о том, что параметром задачи является  $\beta = K^{1/4}\alpha$ .

Таким образом, при  $K \sim 1000$  и  $\alpha \sim 0.05$  магнитный поток уменьшается в 1.5–2 раза, а максимальное магнитное поле — в 2–3 раза по сравнению с идеальным ( $\alpha = 0$ ) случаем. Эта оценка соответствует кратким замечаниям, приведенным в работе [5].

#### 4. ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИИ

До сих пор мы пренебрегали кривизной оболочки, просто умножая результаты, полученные для плоской (одномерной) задачи, на  $2\pi R$ . Реальному эксперименту отвечает, однако, не плоская, а цилиндрическая геометрия, что приводит к некоторому изменению формул.

Полагая  $\mathcal{H} \propto \exp(\lambda t)$  с  $\lambda > 0$ , получаем следующее решение уравнений (20):

$$\mathcal{H}_z = \mathcal{H}(R) \frac{K_0(r/\delta)}{K_0(R/\delta)}, \quad \mathcal{E}_\varphi = \sqrt{\frac{\lambda}{4\pi\sigma}} \mathcal{H}(R) \frac{K_1(r/\delta)}{K_0(R/\delta)}, \quad (28)$$

где  $r \geq R$ ,  $K_\nu(z)$  — функции Макдональда,  $\delta = c/\sqrt{4\pi\sigma\lambda}$ , а остальные компоненты полей  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{E}$  равны нулю. Поток электромагнитной энергии  $J$ , втекающий в оболочку, и мощность выделяемого в ней джоулева тепла  $Q$  равны

$$J = 2\pi R \frac{c}{4\pi} \mathcal{E}_\varphi \mathcal{H}_z \Big|_{r=R} = J_0 f_1(z), \quad Q = \int_R^\infty \sigma \mathcal{E}_\varphi^2 \cdot 2\pi r \, dr = \frac{1}{2} J_0 f_2(z), \quad (29)$$

где  $z = R/\delta$ ,

$$f_1(z) = \frac{K_1(z)}{K_0(z)}, \quad f_2(z) = z \left\{ \frac{K_2(z)}{K_0(z)} - \left[ \frac{K_1(z)}{K_0(z)} \right]^2 \right\}, \quad (29')$$

а значение  $J_0$  соответствует плоской геометрии:

$$J_0 = \frac{1}{2} \lambda \mathcal{H}_0^2 R \delta = \frac{1}{4} c \sqrt{\frac{\lambda}{\pi\sigma}} \mathcal{H}_0^2 R.$$

Из асимптотического разложения

$$\frac{K_\mu(z)}{K_\nu(z)} = 1 + \frac{\mu^2 - \nu^2}{2z} + \frac{(\mu^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2 - 2)}{8z^2} + \dots$$

вытекает, что<sup>7)</sup>

$$f_1(z) = 1 + \frac{1}{2z} + \dots, \quad f_2(z) = 1 + \frac{1}{z} + \dots, \quad z \rightarrow \infty. \quad (30)$$

Учитывая в выражении для потока  $J$  поправку  $\propto 1/z = \delta/R$ , получаем уравнение движения оболочки в виде

$$\ddot{\xi} = \frac{1}{K\xi^3} \left( 1 + \frac{\alpha}{\sqrt{-\xi\xi}} \right)^2, \quad (31)$$

что отличается от (24) лишь в порядке  $\alpha^2$ . На первый взгляд, этим различием следует пренебречь. Покажем, однако, что характерным параметром задачи является  $\beta = K^{1/4}\alpha$ , который уже может быть сравним с единицей (см. табл. 5).

Умножая (31) на  $\xi$ , интегрируя от нуля до точки остановки  $\tau_m$  и учитывая граничные условия, приходим к соотношению

$$\xi_m^{-2} = \left( \frac{R_0}{R_m} \right)^2 = K + 1 - 2 \int_0^{\tau_m} \left( \alpha^2 + 2\alpha\sqrt{-\xi\xi} \right) \xi^{-4} d\tau, \quad (32)$$

<sup>7)</sup> Это приближение имеет хорошую точность вплоть до значений  $z \sim 1$ . Например, по таблицам функций Бесселя находим:  $f_1(1) = 1.4296$ ,  $f_1(3) = 1.1560$  и  $f_1(10) = 1.0489$ , что отличается от (30) соответственно на 4,9, 0,9 и 0,1%.

из которого с учетом формул (П.6), (П.7) вытекает, что  $\xi_m = (K + 1)^{-1/2} (1 + c_1\beta + c_2\beta^2 + \dots)$ . Коэффициенты  $c_1$ ,  $c_2$  и т.д. нетрудно вычислить с помощью (П.7); более важно, однако, указание на то, что отношение  $\rho_m = \xi_m/\xi_m^{(0)}$ , определяющее влияние неупругости процесса, зависит только от  $\beta$ . Этот вывод подтверждается численным расчетом — см. рис. 2, на котором кривые  $A$  и  $B$  относятся к случаям плоской и цилиндрической геометрий (соответственно уравнения (24) и (31)). Сравнение кривых  $A$  и  $B$  показывает, что влияние геометрического фактора на процесс магнитной кумуляции хотя и существенно, но не приводит к качественному изменению результатов.

Теперь мы можем вернуться к вопросу о вероятности ионизации атомов в условиях взрывного эксперимента (с учетом потерь). При  $\alpha = 0$  была получена формула (18) для полной вероятности  $w_t$ . В приближении  $\Phi(t) = \text{const}$ , которое уже использовалось при выводе уравнения (31), имеем  $\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_m(\xi/\xi_m)^{-2}$ . Используя (10) и адиабатическое приближение, приходим к выражению (18) с дополнительным множителем  $A$  в предэкспоненте:

$$A = \frac{2(K+1)}{\mu\sqrt{K}} \int_0^{\tau_m} \exp \left\{ -\frac{\pi}{\mu^2} \left[ \left( \frac{\xi(\tau)}{\xi_m} \right)^2 - 1 \right] \right\} d\tau, \quad (33)$$

где  $\mu$  определено в (18'), а  $\xi(\tau)$  — решение уравнения (31). При  $\alpha = 0$  имеем  $(\xi^{(0)}/\xi_m)^2 = 1 + K^{-1}(K+1)^2(\tau - \tau_m)^2$  и  $A \equiv 1$ . Если  $\alpha > 0$ , то интеграл в (33) берется численно. Такой расчет (при  $K = 10^3$ , см. табл. 5) показывает, что фактор  $A$  возрастает вместе со скоростью атома  $v$  и может достигать значений 1.5–2, т.е. при учете потерь вероятность  $w$  несколько увеличивается (с другой стороны, при скоростях  $v < 2 \cdot 10^8$  см/с, как правило,  $A < 1$ ; подробнее см. табл. 6).

Из табл. 3 и 5 вытекает, что  $w_t = Aw_L\mu\Delta t \geq 1$  при  $v \gtrsim 4 \cdot 10^8$  см/с. Это значит, что в данном случае происходит практически 100-процентная ионизация атомов водорода.

Приведем численный пример. Полагая  $\mathcal{H} = 25$  МГц,  $K = 10^3$ ,  $\alpha = 0.1$  и  $\Delta t = K^{-1/2}R_0/v_0 = 10^{-7}$  с, для полной вероятности лоренцевой ионизации атомов водорода в процессе магнитной кумуляции,  $w_t = A\mu\Delta t \cdot w_L(\mathcal{H}_m)$ , получаем следующие оценки:  $w_t \approx 8 \cdot 10^{-7}$ ,  $9.8 \cdot 10^{-3}$ ,  $0.067$ ,  $0.37$ ,  $0.64$  и  $1.00$  соответственно при  $v = 5/3$ ,  $1.9$ ,  $2.0$ ,  $2.1$ ,  $2.2$  и  $2.5$ . Налицо очень резкое («пороговое») поведение вероятности  $w_t$  в зависимости от скорости атома  $v$ . С другой стороны, при фиксированном значении  $\mathcal{H}_m$  зависимость  $w_t$  от коэффициента потерь  $\alpha$  довольно вялая.

## 5. ОБ УСЛОВИЯХ ПРИМЕНИМОСТИ КВАЗИКЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Выше уже отмечалось, что при  $\lambda < 0$  (т.е. на стадии расширения оболочки) приближение (21) теряет физический смысл, поскольку согласно (21) поле  $\mathcal{H}(x, t)$  не затухает в глубь металла, а осциллирует при  $x \rightarrow \infty$ . При этом  $\delta$  становится мнимой, а вычисление джоулева тепла  $Q$  приводит к бесконечности.

Для разъяснения возникающего парадокса рассмотрим нестационарную задачу для уравнения теплопроводности (диффузии) на полуоси  $x > 0$ :

$$u_t = D u_{xx}, \quad u(x, t_0) = 0, \quad u(0, t) = f(t) \quad \text{при } t > t_0, \quad (34)$$

Таблица 6

Параметры процесса магнитной кумуляции

v	f(γ <sub>L</sub> )	μ	A		
			α = 0.05	0.1	0.2
0.5	0.209	0.400	0.852	0.887	0.995
0.667	8.25(-2)	0.636	0.922	0.977	1.114
0.833	4.09(-2)	0.904	0.973	1.046	1.208
1.0	2.32(-2)	1.20	1.012	1.101	1.283
1.250	1.17(-2)	1.69	1.057	1.164	1.373
1.667	4.88(-3)	2.62	1.11	1.24	1.48
2.0	2.81(-3)	3.45	1.14	1.28	1.54
2.5	1.43(-3)	4.83	1.17	1.33	1.61
5.0	1.79(-4)	13.67	1.22	1.42	1.75

Примечание. В таблице приведены значения фактора A из (33) при K = 1000 и ℳ<sub>m</sub> = 25 МГц (κ = 1, γ<sub>L</sub> = 1/v).

решение которой<sup>8)</sup>

$$u(x, t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi D}} \int_{t_0}^t f(t') \exp\left[-\frac{x^2}{4D(t-t')}\right] \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}} \tag{35}$$

определяет влияние переменной температуры (или магнитного поля) f(t), заданной на границе среды x = 0. Если f(t) = e<sup>λt</sup> и λ > 0, то в (36) можно перейти к пределу t<sub>0</sub> → -∞ (адиабатическое включение поля). Учитывая значение интеграла [36]

$$\int_0^\infty \exp\left\{-\left(\frac{a}{\tau} + b\tau\right)\right\} \tau^{-3/2} d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp(-2\sqrt{ab})$$

(a, b > 0), получаем

$$u(x, t) = \exp(\lambda t - x/\delta), \quad \rho = x/\delta, \quad \delta = \sqrt{D/\lambda}, \tag{36}$$

что в точности совпадает с (21) при λ = const. Если же λ < 0, то в (36) уже нельзя положить t<sub>0</sub> = -∞, а формальное решение

$$u(x, t) = \exp(\lambda t) \cos \rho, \quad \rho = x\sqrt{|\lambda|/D} \tag{37}$$

соответствует нефизическим начальному (t = 0) и граничному (x → ∞) условиям и не может описывать магнитное поле на стадии расширения оболочки.

<sup>8)</sup> См., например [35]. Интеграл Дюамеля (35) можно преобразовать к виду, более удобному для численного счета.



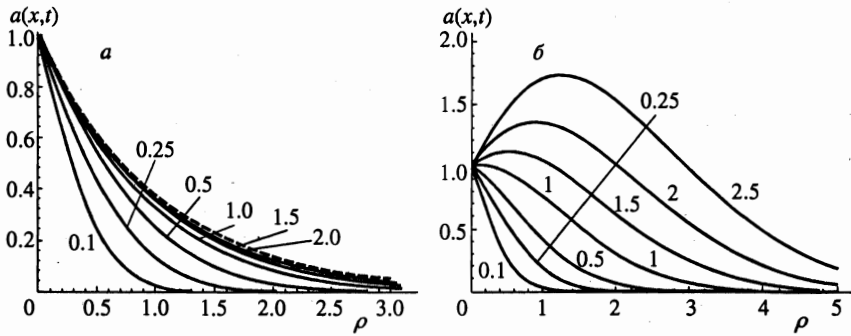


Рис. 4. Профиль тепловой волны при  $\lambda > 0$  (а) и  $\lambda < 0$  (б); у кривых указаны значения  $|\lambda|t$ . Штриховая кривая соответствует установившемуся режиму (37)

Приведем результаты численного решения краевой задачи (34). На рис. 4а и б, соответствующих случаям  $\lambda > 0$  и  $\lambda < 0$  (начальный момент  $t_0 = 0$ ) показана функция

$$a(x, t) = u(x, t)/u(0, t), \tag{38}$$

определяющая профиль тепловой волны в среде. Из рис. 4а видно, что в случае  $\lambda > 0$  тепловая волна от границы  $x = 0$  с ростом  $t$  продвигается в глубь оболочки, в которой устанавливается (при  $x \lesssim \sqrt{4D\lambda t}$ ) распределение (36). Можно показать, что

$$a(x, t) = 1 - a_1\rho + \frac{1}{2}\rho^2 + \dots, \quad \rho \rightarrow 0. \tag{39}$$

При малых временах коэффициент  $a_1 = a_1(t)$  возрастает независимо от знака  $\lambda$ :

$$a_1 = (\pi|\lambda|t)^{-1/2}(1 + \lambda t + \dots), \quad |\lambda|t \ll 1, \tag{40}$$

поэтому функция  $a(x, t)$  убывает с ростом  $\rho$  гораздо быстрее, чем (36). При  $\lambda t \gg 1$

$$a_1 = 1 + O(e^{-\lambda t}(\lambda t)^{-3/2}), \quad \lambda > 0, \tag{40'}$$

и  $a(x, t)$  экспоненциально близка к  $\exp(-\rho)$ . Таким образом, квазиклассическое решение (21), (36) — это асимптотика, которая устанавливается при  $\lambda t \gg 1$  и  $x < x_* = \sqrt{4D\lambda t}$ .

Если  $\lambda < 0$ , то  $a_1$  обращается в нуль при  $\lambda t = -0.854$  и затем меняет знак:

$$a_1(t) \approx -\exp(|\lambda|t)/2\sqrt{\pi}|\lambda|t, \quad t \rightarrow \infty \tag{40''}$$

(см. рис. 4б). Фактически, функция профиля  $a(x, t)$  теряет здесь физический смысл: поле  $u(x, t)$  внутри проводящей среды определяется не граничным значением  $f(t)$ , а значениями  $f(t')$  в предшествующие моменты времени,  $0 < t' \lesssim |\lambda|^{-1}$ . При  $x \ll x_*$  и  $|\lambda|t \gg 1$  получаем

$$u(x, t) \approx \frac{\xi}{\sqrt{\pi}|\lambda|t} \exp(-\xi^2), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \tag{41}$$

(максимум  $u$  при  $\xi = \xi_0 = 2^{-1/2}$ , или  $x = x_0 = \sqrt{2Dt} \ll x_*$ ). С течением времени это распределение расплывается  $\propto \sqrt{t}$  (что обычно для диффузии), а выделяемая тепловая мощность  $Q$  убывает  $\propto t^{-3/2}$ .

Аналогичные результаты получаются для зависимости

$$f(t) = (1 + \tau^2)^{-1}, \quad \tau = (t - t_m)/\Delta t, \quad (42)$$

отвечающей изменению магнитного поля  $\mathcal{H}(0, t)$  в процессе кумуляции (без учета потерь). В этом случае функция профиля (38) есть

$$a = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-y^2)}{1 + Ay^{-2} + By^{-4}} dy, \quad A = -\frac{2\rho^2\tau}{1 + \tau^2}, \quad B = \frac{\rho^4}{1 + \tau^2}, \quad (43)$$

в частности,  $a(0, t) \equiv 1$ . При  $\rho = x/\sqrt{4D\Delta t} \rightarrow 0$ , т.е. вблизи внутренней поверхности оболочки, для  $a(x, t)$  имеет место разложение типа (39), в котором

$$a_1 = \left[ \frac{\pi}{2} (\sqrt{1 + \tau^2} + \tau) \right]^{1/2} \left( 1 - \frac{2\tau}{\sqrt{1 + \tau^2}} \right), \quad (44)$$

причем

$$a_1(\tau) = \begin{cases} 1.5\sqrt{-\pi/\tau}, & \tau \rightarrow -\infty, \\ \sqrt{\pi/2} \left( 1 - \frac{3}{2}\tau + \dots \right), & \tau \rightarrow 0, \\ 0, & \tau = 3^{-1/2} = 0.577, \\ -\sqrt{\pi\tau}, & \tau \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (44')$$

Таким образом, имеется существенное различие между случаями нарастания и убывания магнитного поля на границе: в первом случае расчет магнитного поля внутри проводящей оболочки и омических потерь можно проводить в рамках квазистационарного приближения (21), во втором случае требуется точное решение уравнения диффузии магнитного поля. При этом уравнение движения оболочки значительно усложняется, однако в таком рассмотрении нет особой нужды, если интересоваться только максимально достижимым магнитным полем  $\mathcal{H}_m$ , а не (специально) стадией разлета оболочки.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сделаем несколько замечаний.

1) Показано, что вероятность лоренцевой ионизации нейтральных атомов достигает заметной величины в области магнитных полей порядка десятков мегагаусс, если скорость атома  $v \sim 10^8$  см/с. При этом  $w_L$  резко меняется в узком интервале изменения параметров  $\mathcal{H}$  и  $v$  (что вообще характерно для туннельных процессов, см., например, [37]). Для отрицательных ионов (типа  $H^-$ ,  $Li^-$  и т.д., когда  $\kappa \ll 1$ ) «пороговые»

значения  $\mathcal{H}$  и  $v$  существенно меньше. Следует отметить, что значения магнитного поля, при которых происходит переход от практически полной стабильности атома до его ионизации за время порядка атомного, встречаются в астрофизике, а также могут быть реализованы в лаборатории (магнитная кумуляция, экситоны в полупроводниках).

2) Мы предполагали локальную связь  $j = \sigma \mathcal{E}$  между током и полем, со статическим значением проводимости  $\sigma$ . Это справедливо и для переменных полей, если [34]

$$\omega \ll (\sigma, 1/\tau), \quad \delta \gg l, \quad (45)$$

где  $l$  и  $\tau$  — длина и время свободного пробега электронов проводимости. Для импульсного поля (42) фурье-спектр обрезается на частотах  $\omega \sim 1/\Delta t \sim K^{1/2} v_0/R_0 \sim 10^7-10^8 \text{ с}^{-1}$ . Учитывая, что для металлов  $\sigma \sim 10^{17} \text{ с}^{-1}$ ,  $1/\tau = ne^2/m\sigma$  и  $l = v_F \tau$  ( $v_F \sim 10^8 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$  — скорость, отвечающая границе Ферми), приходим к оценкам:  $1/\tau \sim 10^{13}-10^{14} \text{ с}^{-1}$ ,  $l \sim 10^{-6}-10^{-5} \text{ см}$ ,  $\delta \sim c\sqrt{\Delta t/4\pi\sigma} \sim 0.05 \text{ см}$ . Отсюда видно, что условия (45) выполняются с запасом.

3) Уравнения (24), (31) предполагают, что  $\dot{\xi}(\tau) < 0$ , и применимы только на стадии сжатия оболочки. Расчет потерь на стадии расширения, по-видимому, не может быть выполнен в рамках квазистационарного приближения.

4) Поток энергии  $J$  в (19) складывается из двух частей:  $J = Q + J_H$ , где  $Q$  — мощность, выделяемая в виде джоулева тепла, а  $J_H$  — скорость изменения энергии магнитного поля, заключенного в проводящей оболочке:

$$Q = 2\pi R \int_0^\infty \sigma \mathcal{E}^2(x) dx = \frac{1}{4} \lambda \mathcal{H}^2 R \delta, \quad J_H = 2\pi R \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{16\pi} \mathcal{H}^2 \delta \right). \quad (46)$$

Интересно отметить, что в квазистационарном приближении, когда  $\delta \approx \text{const}$ ,  $Q = J_H = J/2$  независимо от величины проводимости  $\sigma$  и временной постоянной  $\lambda$ . С учетом кривизны оболочки

$$\frac{Q}{J} = \frac{z}{2} \left\{ \frac{K_2(z)}{K_1(z)} - \frac{K_1(z)}{K_0(z)} \right\} = \frac{1}{2} + \frac{\delta}{4R} - \frac{11}{64} \left( \frac{\delta}{R} \right)^2 + \dots \quad (47)$$

Таким образом, равенство  $J = 2Q$  является спецификой плоской геометрии.

Поскольку электрическое поле быстро затухает в глубь оболочки, то полный магнитный поток  $\Phi_{\text{tot}}$  сохраняется. Однако приближение  $\Phi_{\text{tot}} = (\pi R^2 + 2\pi R\delta) \mathcal{H}$  при  $\delta \sim R$  перестает быть применимым, и для расчета изменения потока  $\Phi(t) = \pi R^2 \mathcal{H}$  в течение всего процесса кумуляции следует использовать более точные выражения (29), в которых не предполагается, что  $\delta \ll R$ .

Авторы благодарны С. И. Блинникову, В. С. Имшеннику, П. В. Сасорову и А. С. Чернову за интересные обсуждения, В. П. Крайнову за обсуждение результатов работы, а также В. Л. Моргунову, С. Г. Позднякову и А. В. Сергееву за помощь в проведении численных расчетов. Работа частично поддерживалась Российским фондом фундаментальных исследований (грант 98-02-17007).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Обсудим свойства решений уравнений (24) и (31), а также вычисление некоторых интегралов.

а) Непосредственно из (24) вытекает, что

$$\xi(\tau) = \begin{cases} 1 - \tau + \frac{c_2}{2K}\tau^2 + \dots, & \tau \rightarrow 0, \\ \xi_m + a(\tau_m - \tau)^{5/3} + b(\tau_m - \tau)^2 + \dots, & \tau \rightarrow \tau_m \end{cases} \quad (\text{П.1})$$

( $\tau_m$  — точка остановки, в которой  $\xi(\tau_m) = 0$ ). При этом

$$c_2 = 1 + 2\alpha, \quad a = a_1\alpha^{2/3}K^{-2/3}\xi_m^{-7/3}, \quad b = b_1K^{-1}\xi_m^{-3}, \quad (\text{П.2})$$

где  $a_1 = 3^{5/3} \cdot 5^{-1} = 1.248$ ,  $b_1 = 3/8$ , если  $\alpha > 0$ , и  $b_1 = 1/2$  при  $\alpha = 0$ . Таким образом, решение  $\xi(\tau)$  имеет в точке  $\tau = \tau_m$  слабую особенность, причем  $a/b \sim \alpha^{2/3} \ll 1$ . Скачок коэффициента  $b_1$  при  $\alpha = 0$  связан с нелинейностью уравнения (24) и указывает на то, что зависимость  $\xi(\tau)$  от параметра  $\alpha$  существенна даже при  $\alpha \ll 1$ .

Интересно отметить, что уравнения (24), (31) сами себя «закрывают» в точке остановки: решение  $\xi(\tau)$  не продолжается на область  $\tau > \tau_m$ , поскольку это привело бы к комплексным значениям радиуса  $R(t)$ . Заметим, что глубина скин-слоя  $\delta \propto (-\xi)^{-1/2} \rightarrow \infty$  при  $\tau \rightarrow \tau_m$  и условие  $\delta \ll d$  здесь нарушается. При этом мы попадаем в область, где диссипация энергии [34]  $Q \sim \lambda^2 \rightarrow 0$  (а не  $Q \sim \lambda^{1/2}$ , как выше), что, однако, сказывается на поведении  $\xi(\tau)$  лишь при  $\tau$ , очень близких к  $\tau_m$ . Действительно, из условий  $\delta \ll R$  и  $\delta \lesssim d$  находим соответственно

$$-\dot{\xi}\xi \gg \frac{1}{4}\alpha^2 \quad \text{и} \quad -\frac{\dot{\xi}}{\xi^3} \gtrsim \frac{1}{4}\alpha^2 \left(\frac{R_0}{d_0}\right)^2, \quad (\text{П.3})$$

где  $R$  и  $d$  — радиус проводящей оболочки и ее толщина,  $\alpha$  — коэффициент потерь (25). При получении этих неравенств было использовано, что

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{4\pi\sigma\lambda}} = \frac{1}{2}\alpha R_0 \sqrt{-\frac{\xi}{\dot{\xi}}}, \quad \frac{\delta}{R} = \frac{\alpha}{2} \frac{1}{-\dot{\xi}\xi}, \quad d = \frac{d_0}{\xi} \quad (\text{П.4})$$

( $Rd = R_0d_0$ , т.е. вещество оболочки считается несжимаемым). Подставляя в (П.3) в нулевом приближении  $\xi^2(\tau) = K^{-1} + (\tau_m - \tau)^2$ , получаем, что эти условия нарушаются (при  $K \gg 1$ ) только вблизи точки остановки. Условие применимости уравнения (24) имеет вид

$$\tau_m - \tau \gg \max \left\{ \frac{1}{4}\alpha^2, \frac{\alpha^2}{4K^2} \left(\frac{R_0}{d_0}\right)^2 \right\}. \quad (\text{П.5})$$

Полагая здесь  $\sigma = 5 \cdot 10^{17} \text{ с}^{-1}$ , что соответствует проводимости меди, а также  $d_0/R_0 \sim 0.1$ ,  $K \sim 10^2 - 10^3$  и  $\alpha = 0.05 - 0.1$ , имеем  $\tau_m - \tau \gg 10^{-4} - 10^{-3}$ . Поскольку  $\tau_m \approx 1$  (при  $K \gg 1$ , см. (17)), то уравнение движения (24) можно использовать практически на всей стадии процесса сжатия оболочки.

При переходе от (24) к (31) коэффициент  $c_2$  в (П.1) практически не меняется,  $c_2 = (1 + \alpha)^2$ . Изменение параметров в точке остановки проиллюстрируем на типичном

примере: при  $K = 10^3$  и  $\alpha = 0.1$  из уравнения (24) получаем  $\xi_m = 0.0445$  и  $\tau_m = 0.986$ , а из (31) имеем  $\xi_m = 0.0469$  и  $\tau_m = 0.982$ .

б) Рассмотрим интеграл

$$J_{\mu\nu} = \int_0^{\tau_m} \xi^{-\mu} (-\xi)^\nu d\tau, \quad \mu > 1, \quad \nu > -1. \quad (\text{П.6})$$

Поскольку  $\alpha \ll 1$ , подставим сюда  $\xi(\tau) \approx \xi^{(0)}(\tau) = \sqrt{\xi_m^2 + (\tau - \tau_m)^2}$ , где  $\xi_m \approx K^{-1/2}$  и  $\tau_m \approx 1$ . В этом приближении  $\xi\xi' = -\sqrt{\xi^2 - \xi_m^2}$ ; переходя в (П.6) к интегрированию по  $\xi$ , получаем при  $K \gg 1$

$$J_{\mu\nu} = c_{\mu\nu} K^{(\mu-1)/2}, \quad c_{\mu\nu} = \Gamma\left(\frac{\mu-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) / 2 \Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right) \quad (\text{П.7})$$

(однако при  $K = 10^3$  и  $\alpha \gtrsim 0.1$  эта асимптотика имеет еще недостаточную точность). С ростом коэффициента потерь  $\alpha$  значение  $J_{\mu\nu}$  уменьшается, что связано с соответствующим возрастанием  $\xi_m$ . Так, при  $K = 1000$  численный расчет дает  $J_{3/2,1/2} = 8.87, 7.96, 7.32$  и  $6.45$  соответственно для  $\alpha = 0.05, 0.1, 0.15$  и  $0.25$  (для случая цилиндрической геометрии).

## Литература

1. В. С. Попов, А. В. Сергеев, Письма в ЖЭТФ **63**, 398 (1996).
2. V. S. Popov, B. M. Karnakov, and V. D. Mur, Phys. Lett. A **229**, 306 (1997); В. С. Попов, Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, ЖЭТФ **113**, 1579 (1998).
3. Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, В. С. Попов, Письма в ЖЭТФ **65**, 391 (1997).
4. А. Д. Сахаров, Р. З. Людаев, Е. Н. Смирнов и др. ДАН СССР **165**, 65 (1965).
5. А. Д. Сахаров, УФН **88**, 725 (1966).
6. А. Д. Сахаров, *Научные труды*, Центрком, Москва (1995).
7. В. Д. Мур, В. С. Попов, Б. М. Карнаков, ЖЭТФ **115**, 521 (1999).
8. F. Bitter, Sci. American **213**, 64 (1965) (перевод УФН **88**, 735 (1966)).
9. А. И. Павловский, в сб. [6], стр. 85.
10. Г. А. Аскаръян, в сб. *Он между нами жил .... Воспоминания о Сахарове*, Практика, Москва (1996), с. 125.
11. J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
12. E. Brezin and C. Itzykson, Phys. Rev. D **2**, 1191 (1970).
13. *Handbook of Chemistry and Physics*, ed. by D. R. Lide, CRC Press, London (1994).
14. А. С. Давыдов, *Теория твердого тела*, Наука, Москва (1976).
15. D. T. Wickramasinghe and L. Ferrario, Astrophys. J. **327**, 222 (1988).
16. I. Seipp, K. T. Taylor, and W. Schweizer, J. Phys. **29**, 1 (1996).
17. I. Seipp and W. Schweizer, Astron. Astrophys. **318**, 990 (1997).
18. С. Н. Фабрика, Г. Г. Валявин, Препринт 129, Специальная астрофизическая обсерватория РАН, Нижний Архыз (1998).
19. M. Hehenberger, H. V. McIntosh, and E. Brändas, Phys. Rev. **10**, 1494 (1974).
20. V. Franceschini, V. Grecchi, and H. J. Silverstone, Phys. Rev. A **32**, 1338 (1985).
21. V. S. Popov, V. D. Mur, A. V. Sergeev et al., Phys. Lett. A **124**, 77 (1987); **149**, 418 (1990).

22. V. S. Popov, Phys. Lett. A **173**, 63 (1993).
23. V. D. Mur and V. S. Popov, Laser Phys. **3**, 462 (1993).
24. F. M. Fernandez, Phys. Rev. A **54**, 1206 (1996).
25. R. J. Damburg and V. V. Kolosov, J. Phys. B **11**, 1921 (1978).
26. I. W. Herbst and B. Simon, Phys. Rev. Lett. **41**, 67, 1759 (1978).
27. L. Benassi, V. Grecchi, E. Harrell, and B. Simon, Phys. Rev. Lett. **42**, 704, 1430 (1979).
28. H. J. Silverstone, B. G. Adams, J. Cizek, and P. Otto, Phys. Rev. Lett. **43**, 1498 (1979).
29. В. Л. Елецкий, В. С. Попов, ДАН СССР **250**, 74 (1980).
30. S. P. Alliluev, V. L. Eletsky, and V. S. Popov, Phys. Lett. A **73**, 103 (1979); **78**, 43 (1980).
31. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Физматгиз, Москва (1963).
32. B. R. Johnson, K. F. Scheibner, and D. Farrelly, Phys. Rev. Lett. **51**, 2280 (1963).
33. В. М. Вайнберг, В. А. Гани, в *Тезисы докладов XVI конф. «Фундаментальная атомная спектроскопия»*, Научный совет РАН по спектроскопии, Москва (1998), с. 130.
34. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
35. H. S. Carslaw, *Introduction to the Mathematical Theory of the Conduction of Heat in Solids*, Dover Publ., New York (1945) (перевод: Г. С. Карслоу, *Теория теплопроводности*, Гостехиздат, Москва-Ленинград (1947)).
36. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, Москва (1962).
37. Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, УФН **168**, 531 (1998).