РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ЖУРНАЛ
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В МАРТЕ 1873 ГОДА
ВЫХОДИТ 12 РАЗ В ГОД
МОСКВА

ТОМ 115, ВЫПУСК 6
ИЮНЬ, 1999
«НАУКА»

ОБ ЭФФЕКТАХ, СВЯЗАННЫХ С ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ПЕНОЙ, В ФИЗИКЕ ЧАСТИЦ

*А. А. Кириллов**

Институт прикладной математики и кибернетики
603005, Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 24 ноября 1998 г.

Показано, что существование пространственно-временной пены приводит к тому, что число фундаментальных квантовых бозонных полей является переменной величиной. Представлено общее рассмотрение теории, допускающей переменное число полей, и оцениваются простейшие вызванные пеной наблюдаемые эффекты. Показано, что в отсутствие процессов, связанных с изменением топологии пространства, можно ввести эффективное поле и восстановить обычную полевую теорию. Однако в полной теории основное состояние характеризуется ненулевой плотностью частиц. С точки зрения эффективного поля данные частицы являются «скрытыми». Предполагается, что эти частицы формируют скрытую массу Вселенной. Обсуждаются свойства скрытой массы, а также возможность измерения квантовых флуктуаций потенциалов поля.

1. ВВЕДЕНИЕ

В теории гравитации предполагается, что пространство-время представляет собой гладкое многообразие только на масштабах, много превосходящих планковскую длину. На планковских же масштабах все геометрические свойства исчезают, а само пространство-время приобретает пенообразную структуру [1]. В пользу подобного поведения имеются два основных указания. Первое связано с тем фактом, что на планковских масштабах вакуумные флуктуации метрики и кривизны имеют такой же порядок, что и соответствующие им средние значения. Это следует уже из простейших оценок,

*E-mail: kirillov@focus.nnov.ru, kirillov@unn.ac.ru

но и подтверждается более строгими вычислениями. В частности, наличие подобных флуктуаций приводит к отсутствию классического фонового пространства в планковский период эволюции ранней Вселенной [2]. Вторым указанием выступает тот факт, что на малых масштабах топология пространства также должна подвергаться квантовым флуктуациям [1]. Исследование возможных наблюдаемых эффектов, связанных с изменением топологии пространства, привлекает все большее внимание. В частности, для описания подобных эффектов в [3] рассматриваются кротовые норы и виртуальные черные дыры. Отметим также работу [4], где предлагается феноменологический метод учета пространственно-временной пены.

Отсутствие фонового пространства на малых масштабах представляет собой серьезную проблему в квантовой теории поля. Возможность ее решения обычно связывают с развитием непертурбативных методов [5], в которых понятие фоновых полей не используется. Однако и в данных теориях существенно используется наличие базового координатного пространства, топология которого фиксируется постановкой задачи и, таким образом, не может являться динамической характеристикой.

В настоящей работе предлагается один из возможных способов построения квантовой теории поля в случае, когда топология и структура физического пространства могут быть переменными. Основная идея данного метода уже предлагалась ранее в [6] для описания квантового рождения ранней Вселенной.

В основе предлагаемого метода лежит следующее наблюдение. С одной стороны, как отмечено выше, изменения топологии пространства могут происходить на тех масштабах, где уже сама по себе концепция гладкого многообразия не работает, по крайней мере, в силу наличия вакуумных флуктуаций. С другой стороны, для описания данной области мы, по-видимому, не имеем другой возможности, кроме экстраполяции на нее пространственных отношений, существующих на более крупных масштабах. Другими словами, все возможные топологии физического пространства следует описывать в терминах некоторого единого базисного координатного пространства. Мы будем называть это пространство базой. Поскольку в квантовой теории фундаментальная роль отводится измерительному прибору [7], который является классическим объектом, можно ожидать, что свойства базы полностью определяются прибором.

Далее, если задать определенное квантовое состояние, соответствующее фиксированной топологии физического пространства, и эта топология будет сильно отличается от топологии базы, то его изображение в терминах базисных координат уже не может быть взаимно однозначным. Точно так же функции, определенные на физическом пространстве и соответствующие различным физическим наблюдаемым, при переносе на базисное пространство будут не однозначными, а многозначными функциями координат. Более того, число образов произвольной физической наблюдаемой представляет собой дополнительную переменную величину, которая, вообще говоря, зависит от положения в пространстве базы.

Таким образом, мы приходим к ситуации, когда число полей, соответствующих некоторой физической наблюдаемой, является переменной величиной. В квантовой теории эта переменная является оператором, собственные значения которого и характеризуют топологическую структуру пространства. Возможная зависимость этой величины от пространственных координат означает, что данная величина является характеристикой или мерой плотности числа степеней свободы поля.

Естественным методом описания систем с переменным числом степеней свободы является метод вторичного квантования. Прежде чем переходить к описанию указанного метода применительно к обсуждаемой проблеме, необходимо сделать следую[illegible] замечание. В стандартном методе вторичного квантования число степеней свободы х[illegible]рактеризует число частиц или элементарных возбуждений (квантов) в системе. [illegible] этом предполагается, что частицы удовлетворяют принципу тождественности или, как говорят, неразличимости. Можно ожидать, что при измерении на малых масштабах различные образы одной и той же физической наблюдаемой также удовлетворяют принципу тождественности. Действительно, возможность различать различные образы физических наблюдаемых означала бы, что само по себе физическое пространство обладает определенной топологией и структурой, что, по предположению, невозможно (по крайней мере, в силу наличия квантовых флуктуаций топологии).

Для частиц существуют два типа статистики — Ферми и Бозе, в зависимости от симметрии волновой функции по отношению к перестановкам частиц. Соответственно, необходимо сделать выбор статистики и при вторичном квантовании степеней свободы полей. Поскольку данное квантование отражает свойства и топологию физического пространства, данный выбор должен быть единым для всех типов полей и физических величин. При этом оказывается, что единственным приемлемым выбором является выбор статистики Ферми—Дирака, поскольку в противном случае при применении к фермионам мы сразу наталкиваемся на нарушение принципа Паули.

На фундаментальном уровне состав материи описывается набором полей и их источников. Источники представляют собой точечные частицы, которые в квантовой теории ведут себя как фермионы. Необходимость вторичного квантования источников возникает уже в релятивистской теории и, таким образом, каких-либо изменений в описании фермионов не появляется. Добавляется лишь новая интерпретация: так, рождению пары соответствует определенное изменение структуры физического пространства (можно сказать, что процессы, связанные с изменением свойств пространства, в изолированных точках происходят значительно легче, чем в целых областях).

При квантовании полей также возникает представление о частицах — квантах поля, но данные частицы удовлетворяют уже статистике Бозе—Эйнштейна. При этом рождению частиц, вообще говоря, не соответствует какое-либо изменение топологии пространства. Здесь уместно вспомнить аналогию с физикой твердого тела, где возбуждение колебаний кристаллической решетки (фононов) не означает изменения истинного числа степеней свободы.

Таким образом, указанное изменение касается в первую очередь бозонных полей.

2. ОБЩАЯ СХЕМА ВТОРИЧНОГО КВАНТОВАНИЯ ПОЛЕЙ

Рассмотрим некоторое множество M, которое в дальнейшем будет играть роль базового многообразия, и зададим на нем произвольное поле φ. Предположим также, что существует прибор, который может проводить полные измерения квантовых состояний поля. Полное измерение всегда можно разложить на совокупность элементарных измерений. Так, для полного измерения состояния поля необходимо определить амплитуду поля в каждой точке $x \in M$ либо, что эквивалентно, измерить число частиц (или амплитуду) в каждой фурье-моде. Таким образом, прибор может быть представлен в виде совокупности элементарных детекторов.

Пусть A — множество возможных показаний элементарного детектора. Структуру множества A можно описать следующим образом. Выберем в A произвольную систему координат ξ. В общем случае существует естественный оператор проекции P ($P^2 = P$), который разбивает координаты ξ на две группы

$$\xi = ((I - P)\,\xi, P\xi) = (\eta, \zeta)\,,$$

где I обозначает единичный оператор. Первая группа ζ относится к многообразию M и описывает положение в пространстве M^*, в котором происходит элементарное измерение (здесь и ниже M^* обозначает либо само пространство M, либо пространство мод). Вторая часть η относится к полю φ и описывает положение в пространстве V. Координата $\eta \in V$ может обозначать либо амплитуду поля, либо число соответствующих полю частиц. Таким образом, множество A приобретает черты расслоенного пространства с базой $P(A) \sim M^*$ и слоем $P^{-1}(\zeta) = V$. Результатом полного измерения поля φ является сечение расслоения, которое представляет собой отображение

$$\varphi : M^* \to A.$$

Важно, что в обычной картине произвольное сечение пересекает каждый слой только один раз, т. е. проекция сечения совпадает с пространством M^* ($P(\varphi) \equiv M^*$), откуда следует, что такие сечения могут быть представлены в виде функций $\eta(\zeta)$ на M^* со значениями в V.

Как уже отмечалось выше, топология и геометрическая структура множества A (и соответственно M^*) отражают макроскопические свойства процесса измерения. Реальное же физическое пространство M_{ph}, как предполагается, может иметь произвольную топологию и структуру. Более того, в случае общего квантового состояния свойства пространства M^*_{ph} вообще не фиксированы. Таким образом, физическое поле следует определять как расширенное сечение вида

$$\widetilde{\varphi} : M^*_{ph} \to A.$$

Здесь произвольное сечение может уже пересекать каждый слой произвольное число раз. Более того, в случае, когда топология пространства M^*_{ph} меняется, меняется и число пересечений. Таким образом, число образов поля $\widetilde{\varphi}$ в пространстве M^* представляет собой переменную величину. Образ пространства M^*_{ph} является некоторым подмножеством в M^* ($P(\widetilde{\varphi}) = M'_{ph} \subset M^*$), которое может быть представлено в виде объединения различных кусков $M'_{ph} = \bigcup \sigma_j$, так что на каждом куске σ_j поле описывается заданным числом функций $\eta_i(\zeta)$, $\zeta \in \sigma_j$ ($i = 1, 2, \ldots, m$, где m — целое число, характеризующее число образов пространства M^*_{ph} в области σ_j). Отметим, что в общем случае размерность кусков σ_j может отличаться от размерности M^*.

Таким образом, если топология физического пространства представляет собой дополнительную степень свободы, то результатом полного измерения состояния поля будет являться определенный набор функций $\{\eta_J(\zeta)\}$, ($J = (i, \sigma)$, $\zeta \in \sigma$). Формальную классификацию подобных состояний можно осуществить следующим образом.

---

[1] Множество A можно назвать элементарной системой квантовых чисел.

[2] Говоря о топологии физического пространства, мы далее подразумеваем либо топологию самого пространства M_{ph}, либо топологию связанного с ним M^*_{ph}, в зависимости от измеряемых величин. Отметим, однако, что соотношение между ними является нетривиальным.

Введем набор операторов $C^+(\xi)$ и $C(\xi)$ — операторов рождения и уничтожения отдельного элемента множества A. Для простоты полагаем, что мера каждой отдельной точки $\xi \in A$ конечна (это так в случае, когда координаты ξ принимают дискретные значения). Потребуем, чтобы эти операторы удовлетворяли соотношениям антикоммутации

$$\left\{C(\xi)\, C^+(\xi')\right\} = C(\xi)\, C^+(\xi') + C^+(\xi')\, C(\xi) = \delta_{\xi\xi'}. \tag{1}$$

Определим вакуумное состояние $|0\rangle$ соотношением $C(\xi)|0\rangle = 0$ и построим фоковское пространство F, в котором базис образован векторами ($n = 1, 2, \ldots$)

$$|\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\rangle = \prod_{i=1}^{n} C^+(\xi_i)\,|0\rangle. \tag{2}$$

Вакуумное состояние соответствует полному отсутствию поля и, соответственно, всех связанных с полем наблюдаемых. Состояние $|\xi\rangle$ описывает поле φ, содержащее всего одну степень свободы. Это может быть либо поле, сосредоточенное в одной точке, либо поле, содержащее всего одну моду, а величина $\xi \in A$ описывает как интенсивность (число квантов), так и положение поля в M^*. Состояния, описываемые однозначными функциями, строятся следующим образом:

$$|\eta(\zeta)\rangle = \prod_{\zeta\in M^*} C^+(\eta(\zeta), \zeta)\,|0\rangle, \tag{3}$$

где прямое произведение берется по всему пространству M^* и использовано разбиение координат ξ на две группы $\xi = (\eta, \zeta)$. В общем случае подобные состояния уже не принадлежат фоковскому пространству. Более того, в случае, когда координаты $\zeta \in M^*$ пробегают непрерывные значения, это выражение требует доопределения и, следовательно, его можно понимать лишь формально. Однако в тех случаях, когда изменения физических величин в реальных процессах затрагивают лишь конечную часть множества M^*, можно и не выходить за пределы фоковского пространства.

Рассмотрим теперь произвольную область $\sigma \in M^*$ и определим следующий набор операторов:

$$D^+(\eta(\zeta), \sigma) = \prod_{\zeta\in\sigma} C^+(\eta(\zeta), \zeta), \tag{4}$$

где область определения функции $\eta(\zeta)$ ограничивается множеством σ. Тогда состояния с произвольным числом полей записываются следующим образом:

$$|\eta_1, \eta_2 \cdots, \eta_n\rangle = \prod_{i=1}^{n} D^+(\eta_i(\zeta), \sigma_i)\,|0\rangle. \tag{5}$$

Интерпретация данных состояний очевидна. Пусть все функции $\eta_i(\zeta)$ заданы на одном множестве σ, тогда в данной области полное измерение покажет присутствие набора из n различных полей $\eta_1(\zeta)$, $\eta_2(\zeta)$, ..., $\eta_n(\zeta)$. Удобно ввести оператор плотности числа полей следующим образом:

$$N(\zeta) = \sum_{\eta\in V} C^+(\eta, \zeta)\, C(\eta, \zeta). \tag{6}$$

Тогда при $\zeta \in \sigma$ состояния (5) будут представлять собственные состояния оператора $N(\zeta)$ с собственными значениями

$$N(\zeta)\,|\eta_1, \eta_2 \cdots, \eta_n\rangle = n\,|\eta_1, \eta_2 \cdots, \eta_n\rangle\,. \qquad (7)$$

Ясно, что состояния с фиксированным числом полей соответствуют некоторой фиксированной топологии пространства M^*_{ph}. Тогда при выполнении определенных условий (необходимая гладкость функций $\eta_i(\zeta)$ в местах разрезов) вместо набора функций $\eta_i(\zeta)$ можно ввести однозначную функцию $\eta(\zeta)$ и тем самым восстановить структуру множества M^*_{ph}. И наоборот, любое пространство M^*_{ph} можно спроектировать на базу M^*, совершая необходимое число склеек, так что вектор состояния поля будет иметь вид (5).

Пространство H, образуемое векторами (5) и их суперпозицией составляет основу для построения гильбертова пространства теории. Произвольный связанный с полем оператор $\widehat{O}(\xi)$ (симметризованный по числу полей) может быть выражен стандартным способом через набор базисных операторов C и C^+:

$$\widehat{O} = \sum D^+_I O_{IJ} D_J$$

(где $I, J = (\eta_i(\zeta), \sigma)$, а σ — произвольная область в M^*), тем самым определяется его действие в H. Конкретное же построение гильбертова пространства определяется характером рассматриваемой физической задачи.

3. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ВТОРИЧНОГО КВАНТОВАНИЯ

В предыдущем разделе излагалась общая схема вторичного квантования безотносительно к динамике поля. Ниже в качестве примера мы рассмотрим вещественное скалярное поле φ (обобщение на случай произвольных полей является очевидным), а в качестве базового пространства мы будем рассматривать обычное плоское пространство Минковского.

В теории элементарных частиц наиболее важным является представление, в котором квантовые состояния поля классифицируются в терминах физических частиц. Поскольку в общем случае квантовые состояния поля могут содержать произвольное число одинаковых мод, определение частиц и их связь с полевыми операторами требуют некоторой модификации. В дальнейшем нам будет удобнее работать с дискретными индексами. Для этого будем предполагать, что поле заключено в кубе со стороной L и потребуем выполнения периодических граничных условий. При необходимости переход от сумм к интегралам при $L \to \infty$ можно осуществить заменой

$$\sum \to \int (L/2\pi)^3\, d^3k.$$

Рассмотрим разложение оператора поля φ по плоским волнам:

$$\varphi(x) = \sum_k \left(2\omega_k L^3\right)^{-1/2} \left(a_k e^{ikx} + a^+_k e^{-ikx}\right), \qquad (8)$$

где $\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$, $k = 2\pi n/L$, $n = (n_x, n_y, n_z)$. Общее выражение для оператора Гамильтона имеет вид

$$H = H_0 + V, \tag{9}$$

где H_0 описывает свободные частицы:

$$H_0 = \sum_k \omega_k a_k^+ a_k \ + e_k, \tag{10}$$

а потенциальный член V отвечает за взаимодействие и может быть представлен в нормальной форме следующим образом:

$$V = \sum_{n,\{m\},\{m'\}} V^n_{\{m\},\{m'\}}, \tag{11}$$

$$V^n{}_{\{m\},\{m'\}} = \sum_{k_1,\ldots k_n}' V^n_{\{m\},\{m'\}}(k_1,\ldots k_n) \prod_{i=1}^n \left(a^+_{k_i}\right)^{m_i} \left(a_{k_i}\right)^{m'_i}. \tag{12}$$

Здесь мы предполагаем, что при суммировании по волновым числам k_i уже нет членов с одинаковыми индексами, т. е. $k_i \neq k_j$ для любой пары индексов i и j (сумма берется по различным модам), и учтен тот факт, что при различных волновых числах операторы a_{k_i} и $a^+_{k_j}$ коммутативны.

Величина e_k в (10) есть энергия основного состояния k-моды. В плоском пространстве в отсутствие частиц энергия должна быть нулевой, и везде ниже мы будем полагать $e_k = 0$. Однако, как будет показано в следующих разделах, в общем случае нетривиальность топологии пространства приводит к некоторому отличному от нуля значению величины e_k. Отметим, что зависимость нулевой энергии от топологии пространства известна как эффект Казимира [8] и может считаться экспериментально установленным фактом [9].

В случае, когда число мод является переменной величиной, набор полевых операторов $\{a_k, a_k^+\}$ заменяется некоторым расширенным набором $\{a_k(j), a_k^+(j)\}$, где $j \in [1, \ldots N_k]$, а N_k — число мод при заданном значении волнового числа k. Для свободного поля энергия должна быть аддитивной величиной и может быть представлена следующим образом:

$$H_0 = \sum_k \sum_{j=1}^{N_k} \omega_k a_k^+(j)\, a_k(j). \tag{13}$$

Оператор взаимодействия в силу неразличимости мод имеет следующее очевидное обобщение:

$$V^n_{\{m\},\{m'\}} = \sum_{k_1,\ldots k_n}' \sum_{j_1,\ldots j_n,} V^n_{\{m\}\{m'\}}(k_1,\ldots k_n) \prod_{i=1}^n \left(a^+_{k_i}(j_i)\right)^{m_i} \left(a_{k_i}(j_i)\right)^{m'_i}, \tag{14}$$

где индексы j_i пробегают соответствующие интервалы $j_i \in [1, \ldots N(k_i)]$. Удобно ввести следующие обозначения:

$$A_{m,n}(k) = \sum_{j=1}^{N(k)} \left(a_k^+(j)\right)^m \left(a_k(j)\right)^n. \tag{15}$$

Тогда выражение для оператора Гамильтона поля примет вид

$$H=\sum_k \omega_k A_{1,1}(k)+\sum_{n,\{m\},\{m'\}}\sum_{k_1,\dots k_n}^{\prime} V_{\{m\},\{m'\}}(k_1,\dots k_n)\prod_{i=1}^{n} A_{m_i,m'_i}(k_i)\,. \tag{16}$$

Выразим теперь основные величины в терминах фундаментальных операторов $C^+(\xi)$ и $C(\xi)$. Для операторов a и a^+ удобно использовать представление Фока—Баргмана, в котором данные операторы действуют в пространстве целых аналитических функций со скалярным произведением вида

$$(f,g)=\int f^*(a)\,g(a^*)\,e^{-a^*a}\frac{da^*da}{2\pi i}, \tag{17}$$

а их действие определено согласно

$$a^+f(a^*)=a^*f(a^*)\,,\quad af(a^*)=\frac{d}{da^*}f(a^*)\,. \tag{18}$$

Тогда в качестве нормальных координат поля можно принять комплексные величины a^*; таким образом, множество A образовано парами величин $\xi=(a^*,k)$. Для фундаментальных операторов $C^+(\xi)$ и $C(\xi)$ удобно использовать следующее представление:

$$C(a^*,k)=\sum_{n=0}^{\infty}C(n,k)\frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}},\quad C^+(a,k)=\sum_{n=0}^{\infty}C^+(n,k)\frac{a^n}{\sqrt{n!}}. \tag{19}$$

Тогда коммутационные соотношения (1) принимают вид

$$\left\{C(n,k)\,,C^+\left(m,k'\right)\right\}=\delta_{n,m}\delta_{k,k'}\,. \tag{20}$$

Физический смысл операторов $C(n,k)$ и $C^+(n,k)$ состоит в том, что они рождают или уничтожают моды с заданным числом частиц.

Теперь, чтобы выразить оператор Гамильтона (16) через $C(n,k)$ и $C^+(n,k)$, достаточно получить соответствующие выражения для операторов (15). В представлении вторичного квантования выражения для данных операторов определяются следующим образом:

$$\widehat{A}_{m,n}(k)=\int e^{-a^*a}\frac{da^*da}{2\pi i}C^+(a,k)\,(a^*)^m\left(\frac{d}{da^*}\right)^n C(a^*,k)\,, \tag{21}$$

или, с учетом (19), имеем

$$\widehat{A}_{m_1,m_2}(k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{(n+m_1)!\,(n+m_2)!}}{n!}C^+(n+m_1,k)\,C(n+m_2,k)\,. \tag{22}$$

Выражение для гамильтониана через операторы $C^+(\xi)$ и $C(\xi)$ дается теперь простой подстановкой (22) в (16). Для свободного поля собственные значения оператора Гамильтона принимают вид

$$\widehat{H}_0=\sum_k \omega_k\widehat{A}_{1,1}(k)=\sum_{n,k} n\omega_k N_{n,k}\,, \tag{23}$$

где $N_{n,k}$ — число мод при фиксированных значениях волнового числа k и числа частиц n ($N_{n,k} = C^+(n,k)\, C(n,k)$).

Таким образом, вектор состояния поля Φ является функцией чисел заполнения, $\Phi\left(N_{k,n}, t\right)$, а его эволюция описывается уравнением Шредингера

$$i\partial_t \Phi = H\Phi. \tag{24}$$

Рассмотрим оператор (6)

$$N_k = \sum_{n=0}^{\infty} C^+(n,k)\, C(n,k)\,. \tag{25}$$

Физический смысл данного оператора состоит в том, что он характеризует полное число мод при некотором фиксированном значении волнового числа k. Нетрудно проверить, что для гамильтониана (16) величина N_k представляет собой интеграл движения

$$[N_k, H] = 0, \tag{26}$$

и, таким образом, гамильтонианы вида (16) сохраняют топологическую структуру поля. В процессе эволюции число мод для каждого k остается неизменным.

Рассмотрим теперь вопрос о представлении в данном формализме операторов рождения и уничтожения частиц. Поскольку индивидуальность мод ограничена, роль набора операторов $\{a_k(j)\,, a_k^+(j)\}$ играют операторы вида (22). Среди них можно выделить те, которые изменяют число частиц в системе на единицу:

$$b_m(k) = \widehat{A}_{m,m+1}(k)\,, \quad b_m^+(k) = \widehat{A}_{m+1,m}(k)\,, \tag{27}$$

$$\left[\widehat{n}, b_m^{(+)}(k)\right] = \pm b_m^{(+)}(k)\,, \quad \left[H_0, b_m^{(+)}(k)\right] = \pm\omega_k b_m^{(+)}(k)\,, \tag{28}$$

где

$$\widehat{n} = \sum_k \widehat{n}_k = \sum_{n,k} n N_{n,k}. \tag{29}$$

Тогда основное состояние поля Φ_0 можно определить как вектор, удовлетворяющий соотношениям ($m = 0, 1, \ldots$)

$$b_m(k)\,\Phi_0 = 0 \tag{30}$$

и отвечающий минимальному значению энергии при фиксированном распределении мод N_k. Отметим, что в отличие от стандартной теории в общем случае основное состояние характеризуется уже ненулевой плотностью частиц $\widehat{n}\Phi_0 = n_0\Phi_0$. Используя вектор Φ_0, можно построить пространство Фока F, в котором базис образован векторами, полученными циклическим действием на Φ_0 операторов $b_m^+(k)$.

4. ЭФФЕКТИВНОЕ ПОЛЕ

В отсутствие процессов, связанных с изменением топологии пространства, и когда распределение мод имеет вид $N_k = 1$ (имеется всего одна мода при каждом значении волнового числа k), восстанавливается стандартная полевая теория. Кроме того, существует достаточно общий случай, когда можно ввести понятие эффективного поля таким образом, что будет восстановлена стандартная картина.

Действительно, рассмотрим случай, когда оператор взаимодействия в (16) выражается только через набор операторов $b_0(k)$ и $b_0^+(k)$. Тогда вместо полного фоковского пространства F можно ограничиться его подпространством $F' \subset F$, образованным циклическим действием операторов $b_0^+(k)$ на основное состояние поля Φ_0. При этом справедливо утверждение, что если начальный вектор состояния Φ принадлежит F', то в процессе эволюции $\Phi(t) \in F'$ при любом t (по крайней мере до тех пор, пока число возбуждаемых частиц остается конечным).

Определим следующий набор операторов:

$$a_k = N_k^{-1/2} b_0(k), \quad a_k^+ = N_k^{-1/2} b_0^+(k), \tag{31}$$

где N_k — оператор, определенный в (25), который при ограничении на фоковское пространство F' является обычной числовой функцией. Из (20) и (22) получим, что коммутационные соотношения для a_k и a_k^+ имеют стандартный вид

$$\left[a_k, a_{k'}^+\right] = \delta_{kk'}. \tag{32}$$

Таким образом, если основными наблюдаемыми объектами являются частицы, оказывается возможным вернутся к обычной картине, в которой частицы являются квантами некоторого эффективного поля $\widetilde{\varphi}$ вида (8). Отметим, что если измеряемыми величинами являются сами потенциалы поля $\varphi(x)$, то истинное выражение для оператора поля будет иметь тот же вид (8), где вместо операторов a_k и a_k^+ следует подставить $b_0(k)$ и $b_0^+(k)$. Выражение для оператора энергии эффективного поля имеет вид (9), где уже величину энергии основного состояния в k-ой моде e_k нельзя считать равной нулю. Эта величина определяется исходя из полной теории.

Поскольку операторы a_k и a_k^+ отражают лишь часть информации о состоянии системы, здесь обнаруживается вспомогательный характер эффективного поля. Действительно, единственными связанными с данным полем наблюдаемыми являются частицы, причем не все частицы, а только та часть из них, которая превышает число частиц в основном состоянии. Для оператора числа частиц в F' имеем

$$a_k^+ a_k = \delta\widehat{n}_k = \widehat{n}_k - \overline{n}_k, \tag{33}$$

где оператор $\widehat{n}_k$ определен в (29), а $\overline{n}_k$ находится из соотношения $\widehat{n}_k\Phi_0 = \overline{n}_k\Phi_0$. Тем самым, свойства основного состояния Φ_0 остаются за пределами эффективного поля.

5. СВОЙСТВА ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ ПОЛЯ

Как следует из соотношений (20) и (22), истинное вакуумное состояние обладает тем свойством, что все полевые моды, а следовательно, и все связанные с полем наблюдаемые отсутствуют. В состоянии истинного вакуума нет ни частиц, ни связанных с ними нулевых колебаний. Данная ситуация вполне аналогична ситуации в физике твердого тела, где в отсутствие кристалла нет ни фононов, ни нулевых колебаний решетки. Поскольку свойства физического пространства определяются свойствами материальных полей, можно заключить, что в состоянии истинного вакуума физическое пространство тоже отсутствует. Очевидно, что в реальных ситуациях подобное состояние недостижимо.

На первый взгляд в теории частиц наиболее распространенной является ситуация, когда физическое пространство является обычным плоским пространством Минковского, а нетривиальность топологии начинает сказываться лишь на планковских масштабах (именно подобная точки зрения и является общепринятой [1], см. также [4]). Но поскольку планковские масштабы требуют недостижимых на современных ускорителях энергий и, кроме того, требуют серьезного рассмотрения квантовогравитационных эффектов, представляется невозможным получение каких-либо непосредственно проверяемых предсказаний данной теории.

В действительности ситуация несколько иная. Во-первых, стабильность пространства Минковского означает, что, по-видимому, даже на планковских масштабах топологию пространства можно считать простой (т.е. $N_k = 1$ и при $k \geq k_{pl}$), по крайней мере, до тех пор, пока не рассматриваются процессы с возбуждением реальных частиц планковских энергий (разумеется, виртуальные процессы не могут приводить к реальным изменениям топологии пространства).

Во-вторых, необходимо вспомнить о том, что в процессе эволюции наша Вселенная прошла через квантовый этап, когда могли происходить реальные процессы с изменением топологии пространства. После квантового периода процессы с изменением топологии подавляются, можно говорить, что происходит закалка топологической структуры пространства, и в процессе дальнейшего расширения Вселенной сформированная структура пространства сохраняется. Таким образом, следует ожидать, что в современную эпоху нетривиальность топологии пространства должна сказываться, скорее всего, на космологически значимых масштабах.

В изложенной выше теории структура пространства определяется плотностью полевых мод. Последние же в свою очередь удовлетворяют статистике Ферми, т.е. ведут себя как фермионный газ. Для простоты ниже мы будем рассматривать случай свободных полей, поскольку последовательный учет взаимодействия полей требует отдельного рассмотрения. Будем предполагать, что в планковский период эволюции Вселенной распределение по полевым модам носило тепловой характер. В ходе расширения Вселенной температура падает и происходит вырождение газа, а поле садится в основное состояние. Таким образом, основное состояние поля Φ_0 можно характеризовать числами заполнения вида

$$N_{k,n} = \theta\left(\mu_k - n\omega_k\right), \tag{34}$$

где $\theta(x)$ — ступенчатая функция, а μ_k — химический потенциал. Отметим, что при адиабатичном расширении следует положить $\mu_k = \mu$. При наличии инфляционного периода в эволюции Вселенной [10, 11] условие адиабатичности может нарушаться, что в общем случае приведет к дополнительной зависимости химического потенциала от волнового числа. Для спектральной плотности мод получим выражение

$$N_k = \sum_{n=0}^{\infty} \theta\left(\mu_k - n\omega_k\right) = 1 + \left[\frac{\mu_k}{\omega_k}\right], \tag{35}$$

где $[x]$ обозначает целую часть числа x. Из (35), в частности, видно, что в области $\omega_k > \mu_k$ имеем $N_k = 1$, т. е. структура поля соответствует плоскому пространству Минковского, и, таким образом, область волновых чисел $\omega_k < \mu_k$ является той областью, где следует ожидать проявления нетривиальности свойств поля.

Нетрудно проверить, что с точки зрения эффективного поля основное состояние Φ_0 является вакуумом, т. е. $a_k\Phi_0 = 0$. С другой стороны, данное состояние характеризуется ненулевой плотностью частиц. Действительно, при каждом значении волнового числа имеем

$$\overline{n}_k = \sum_{n=0}^{\infty} n\theta\left(\mu_k - n\omega_k\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \left[\frac{\mu_k}{\omega_k}\right]\right)\left[\frac{\mu_k}{\omega_k}\right] \tag{36}$$

и, таким образом, для спектральной плотности энергии основного состояния получим выражение

$$e_k = \omega_k \overline{n}_k = \frac{\omega_k}{2}\left(1 + \left[\frac{\mu_k}{\omega_k}\right]\right)\left[\frac{\mu_k}{\omega_k}\right]. \tag{37}$$

Поскольку данные частицы соответствуют основному состоянию поля, ясно, что в обычных процессах (без изменения топологии пространства) данные частицы явным образом себя не проявляют (неявным образом они должны приводить к перенормировке параметров наблюдаемых частиц, при этом следует отметить, что, в отличие от вакуумных флуктуаций, вклад данных частиц будет, разумеется, конечным). Отметим также, что, несмотря на то что сами частицы являются бозонами, в основном состоянии они ведут себя как фермионы.

Одним из явных проявлений существования некоторой остаточной плотности частиц в основном состоянии может служить скрытая масса. Как известно из наблюдений, в нашей Вселенной скрытая масса составляет до 90% видимого вещества, причем это вещество имеет не барионное происхождение (см., например, [12]). Ее существование обычно связывают с наличием различных гипотетических частиц (хиггсовские частицы, аксионы и др.), которые в силу ряда причин практически перестают взаимодействовать с обычным веществом. Если же приписать эту массу основному состоянию, то, во-первых, становится очевидно, что эта масса является действительно скрытой, а во-вторых, можно, по-видимому, обойтись минимальным набором только известных в настоящее время частиц.

Для описания свойств скрытой массы рассмотрим сначала случай массивных бозонов ($m \neq 0$). Для оценок мы будем пренебрегать возможной зависимостью параметра μ от волнового числа k. В этом случае, чтобы не получить слишком большое значение для скрытой массы, нужно потребовать выполнения неравенства

$$\mu^2 - m^2 = z^2 \ll m^2. \tag{38}$$

Тогда основное состояние будет содержать по одной частице на каждую моду в области волновых чисел $k^2 \leq z^2$, где $N_k = 2$. Другими словами, массивные бозоны, присутствующие в основном состоянии, ведут себя как обычный вырожденный ферми-газ, и для плотности энергии и плотности частиц мы получим выражения

$$\varepsilon = \frac{1}{L^3}\sum_{n,k} n\omega_k N(k,n) = \frac{g}{2\pi^2}\left(\frac{z^3\mu}{4} + \frac{m^2}{8}\left(z\mu - m^2 \ln\left(\frac{z+\mu}{m}\right)\right)\right), \tag{39}$$

$$n = \frac{1}{L^3}\sum_{n,k} nN(k,n) = \frac{g}{6\pi^2}z^3. \tag{40}$$

Здесь g — число состояний поляризации. В пределе $z \ll m$ данное выражение сводится к известному нерелятивистскому соотношению

$$\varepsilon = nm + \frac{3}{2}p, \quad p = \frac{g}{30\pi^2}\frac{z^5}{m}, \tag{41}$$

где p — давление газа. Основной вклад в плотность энергии основного состояния дают массы покоя частиц, т. е. в главном порядке этот вклад представляет собой пыль. Отметим, однако, что давление частиц отлично от нуля и дает малую поправку порядка $p/\varepsilon \sim z^2/m^2 \sim n^{2/3}/m^2$.

Рассмотрим теперь случай частиц с массой покоя равной нулю (примером таких частиц являются фотоны и гравитоны). Тогда для плотности энергии основного состояния получим выражение

$$\varepsilon = \frac{g}{2\pi^2}\frac{\mu^4}{4}\xi(3). \tag{42}$$

Плотность вакуумных частиц определяется следующим образом:

$$n = \frac{g}{2\pi^2}\frac{\mu^3}{3}\xi(2), \tag{43}$$

где

$$\xi(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

Уравнение состояния в этом случае является ультрарелятивистским ($\varepsilon = 3p$).

Случай безмассовых частиц представляет особый интерес, поскольку в этом случае можно также измерять интенсивность квантовых флуктуаций потенциалов поля, которые для основного состояния (34) имеют вид

$$\langle\varphi(x)\varphi(x+r)\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty}\frac{dk}{k}\frac{\sin(kr)}{kr}\Phi^2(k), \tag{44}$$

где

$$\Phi^2(k) = k^2 N_k = k^2\left(1 + \left[\frac{\mu}{k}\right]\right).$$

В области больших длин волн $k \ll \mu$ должно наблюдаться значительное увеличение уровня квантовых флуктуаций по сравнению с чисто вакуумным шумом ($\mu = 0$).

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Таким образом, введенная Уилером концепция пространственно-временной пены должна приводить к целому ряду наблюдаемых эффектов в теории частиц. Простейшими из них являются появление скрытой массы и повышение интенсивности квантового шума в потенциалах поля. Для вычисления подобных эффектов в предыдущем разделе мы предполагали, что поле находится в основном состоянии. Однако данные результаты легко обобщаются и на тот случай, когда состояние полей характеризуется некоторым ненулевым значением температуры T^*. Поскольку в ранней Вселенной процессы, связанные с изменениями топологии пространства, прекращаются в первую очередь, следует ожидать, что $T^* \ll T_\gamma$ (T_γ — температура реликтового излучения). С другой стороны, из (42) для величины μ можно получить верхний предел $\mu^* \sim 60T_\gamma$. Таким образом, следует ожидать, что $T^* \ll \mu$ и все температурные поправки к основному состоянию (34) будут малы. Отметим, однако, что характер флуктуаций потенциалов поля в (44) при наличии температуры может существенно измениться [6].

Кроме указанных эффектов, существует, по-видимому, еще целый ряд явлений, которые, однако, требуют дополнительного исследования. Укажем лишь некоторые из возможностей. Так, при наличии самодействия может происходить перестройка основного состояния (34), что может привести к появлению скалярных хиггсовских полей (по аналогии с известным эффектом Купера в теории сверхпроводимости). Последние, в свою очередь, необходимы для генерации масс частиц в теориях Великого объединения. Укажем, что в случае полей с самодействием наличие в основном состоянии ненулевой плотности частиц уже само по себе приводит к появлению массивных возбуждений, однако верхнее ограничение на массы, которые можно получить исходя из космологических ограничений на величину μ, на много порядков меньше соответствующих наблюдаемых в теории частиц значений. Другая возможность состоит в том, что при измерении силы Казимира [8, 9] следует ожидать аномальной зависимости от расстояния на масштабах, превышающих значение μ.

Я благодарен Д. Тураеву за полезные обсуждения работы на всех этапах ее выполнения, а также М. Райнеру за приглашение в Потсдамский университет, где была выполнена существенная часть данной работы. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-02-16273) и DFG (грант № 436 RUS 113/236/0(R)).

Литература

1. J. A. Wheeler, in: *Relativity Groups and Topology*, ed. by B. S. and C. M. DeWitt, Gordan and Breach, New York (1964); S. W. Hawking, Nuclear Phys. B **114**, 349 (1978).
2. A. A. Kirillov, Phys. Lett. B **399**, 201 (1997); A. A. Kirillov and G. Montani, Письма ЖЭТФ **66**, 449 (1997).
3. S. W. Hawking, Phys. Rev. D **37**, 904 (1988); Nucl. Phys. B **335**, 155 (1990); S. Gidings and A. Strominger, Nucl. Phys. B **307**, 854 (1988); G. V. Lavrelashvili, V. A. Rubakov, and P. G. Tinyakov, Nucl. Phys. B **299**, 757 (1988); S. Coleman, Nucl. Phys. B **310**, 643 (1988); T. Banks, *ibid* B **309**, 493 (1988).
4. L. J. Garay, Phys. Rev. Lett. **80**, 2508 (1998).
5. K. Wilson, Phys. Rev. D **10**, 2445 (1974); V. Jones, Ann. Math. **126**, 59 (1987); E. Witten, Comm. Math. Phys. **121**, 351 (1989); C. Rovelli and L. Smolin, Nucl. Phys. B **331**, (1990).
6. A. A. Kirillov, Gravitation and Cosmology **2**(5), 123 (1996); Astron. and Astrophys. Trans. **10**, 95 (1996).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1975).
8. H. B. G. Casimir, Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet. **51**, 793 (1948).
9. M. J. Sparnaay, Physica **24**, 751 (1958).
10. A. A. Starobinsky, Phys. Lett. B **91**, 100 (1980); A. H. Guth, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981); A. A. Linde, Phys. Lett. B **108**, 389 (1982).
11. А. Д. Линде, *Физика элементарных частиц и инфляционная космология*, Наука, Москва (1990).
12. G. Borner, *The Early Universe, Facts and Fiction*, Springer-Verlag, Berlin (1992).