

КОЛЛАПС В НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА

Ю. Н. Овчинников*

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
117940, Москва, Россия

И. М. Сигал†

University of Toronto, Department of Mathematics
Toronto, Ontario, Canada M5S 3G3

Поступила в редакцию 11 февраля 1999 г.

Получен новый класс точных решений нелинейного уравнения Шредингера, имеющих особенность при конечном времени (коллапс).

PACS: 03.65.Ge; 02.30.Jr

Нелинейное уравнение Шредингера, в котором нелинейность соответствует эффективному притяжению, возникает в ряде физических задач. По-видимому, впервые такое уравнение было получено при исследовании ленгмюровской турбулентности большой интенсивности [1] и в задаче о самофокусировке волновых пучков [2]. В дальнейшем нелинейное уравнение Шредингера активно исследовалось безотносительно к физической задаче, его порождающей [3]. В безразмерных переменных нелинейное уравнение Шредингера (NLS) обычно записывается в простейшем виде

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta \psi + |\psi|^{2\sigma} \psi = 0, \quad (1)$$

где ψ — скалярная функция в d -мерном пространстве, Δ — оператор Лапласа.

Однородное состояние $\psi = a \exp(ia^{2\sigma} t)$ неустойчиво относительно бесконечно малых возмущений при любом значении $\sigma > 0$ (закон дисперсии $\omega^2 = K^2(K^2 - 2\sigma a^{2\sigma})$, $\psi = (a + \delta\psi) \exp(ia^2 t)$).

В области значений $\sigma d < 2$, по-видимому, реализуются состояния вида

$$\psi_{(r,t)} = \exp(-i\omega t) \tilde{\psi}(\mathbf{r}),$$

где $\tilde{\psi}(\mathbf{r})$ — периодическая функция координат. В области $\sigma d \geq 2$ существуют решения уравнения (1), имеющие особую точку при конечном времени t_0 . В дальнейшем мы будем исследовать именно такие решения. Уравнение (1) сохраняет полное число «частиц» и полную энергию. Для плотности потока «частиц» j_n находим обычное уравнение

$$j_n = i(\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi), \quad \nabla \equiv \text{grad}. \quad (2)$$

*E-mail: ovc@itp.ac.ru

†I. M. Sigal.

Энергия E_V в объеме V дается выражением

$$E_V = \frac{1}{2} \int_V d^d r \left\{ |\nabla \psi|^2 - \frac{1}{1+\sigma} |\psi|^{2(1+\sigma)} \right\}. \quad (3)$$

С помощью уравнений (1), (3) легко находим

$$\frac{\partial E_V}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_S \left(\nabla \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \nabla \psi \right) dS. \quad (4)$$

Уравнения (2), (4) будут использованы ниже для получения сингулярных решений уравнения (1).

Коллапсирующее решение уравнения (1) в d -мерном пространстве будем искать в сферически-симметричном виде:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \hat{\varphi}(\rho, t) \exp(i\chi(\rho, t)), \quad (5)$$

где $\rho = |\mathbf{r}|$, $\hat{\varphi}$ — вещественная функция.

В отличие от работ [1–3], будем искать коллапсирующие решения в виде

$$\hat{\varphi}(\rho, t) = \lambda_{(t)}^{d/2} \varphi(\rho \lambda(t)) \quad (6)$$

и без наложения каких-либо предварительных ограничений на фазу χ .

Пусть $N(\rho_0, t)$ — число «частиц» внутри сферы радиуса ρ_0 . Тогда с помощью формул (2), (5), (6) находим

$$\frac{\partial N(\rho_0, t)}{\partial t} = \alpha \rho_0 \frac{\partial \lambda}{\partial t} (\rho_0 \lambda)^{d-1} \varphi^2(\rho_0 \lambda) = -2\alpha \frac{\partial \chi}{\partial \rho} \lambda^d \rho_0^{d-1} \varphi^2(\rho_0 \lambda), \quad (7)$$

где $\alpha \equiv \alpha(d)$ и определяется из соотношения

$$dV = \alpha d\rho \rho^{d-1}, \quad S(\rho) = \alpha \rho^{d-1}, \quad \alpha = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}. \quad (8)$$

В уравнении (8) $S(\rho)$ — площадь сферы радиуса ρ . Из формулы (7) находим

$$\rho_0 \frac{\partial \lambda}{\partial t} = -2 \frac{\partial \chi}{\partial \rho} \lambda. \quad (9)$$

Общее решение этого уравнения есть

$$\chi(\rho, t) = \chi_0(t) - \frac{\rho^2}{4\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \quad (10)$$

где функции $\chi_0(t)$, $\lambda(t)$ зависят только от времени t .

Еще одно уравнение — равенство потока энергии через поверхность ее изменению внутри объема — возникает из уравнений (3), (4):

$$\begin{aligned}
& y^{d-1} \left\{ \varphi'(y) \left(y\varphi'(y) + \frac{d}{2}\varphi(y) \right) - \frac{y}{2\lambda^2} \varphi(y)^2 \left(\frac{\partial \chi_0}{\partial t} - \frac{y^2}{4\lambda^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) \right) \right\} = \\
& = \frac{1}{2} y^d \left[(\varphi')^2 + \frac{y^2 \varphi^2}{4\lambda^6} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} \right)^2 - \frac{\lambda^{d\sigma-2}}{1+\sigma} \varphi^{2(1+\sigma)} \right] + \\
& + \int_0^y dy y^{d-1} \left\{ (\varphi'(y))^2 + \frac{\varphi^2}{8\lambda} y^2 \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\lambda^4} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} \right)^2 \right) \right] \right\} / \frac{\partial \lambda}{\partial t} - \frac{d\sigma \lambda^{d\sigma-2}}{2(1+\sigma)} \varphi^{2(1+\sigma)}, \quad (11)
\end{aligned}$$

где $y = \rho_0 \lambda$. Предположим, что параметр $\lambda(t)$ есть степенная функция вида

$$\lambda \sim (t_0 - t)^{-\nu}. \quad (12)$$

Тогда из уравнения (11) находим

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda^4} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) & \sim (t_0 - t)^{4\nu-2}, \\
\frac{1}{\lambda^6} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} \right)^2 & \sim (t_0 - t)^{4\nu-2}, \\
\frac{1}{\lambda} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\lambda^4} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} \right)^2 \right) \right] / \frac{\partial \lambda}{\partial t} & \sim (\nu - 1)(t_0 - t)^{4\nu-2}. \quad (13)
\end{aligned}$$

Из уравнения (13) следует, что существуют два значения параметра ν : $\nu = 1$ и $\nu = 1/2$, при которых уравнение (11) может иметь точное решение в случае критической размерности $d\sigma = 2$. Если $d\sigma \neq 2$, то существует одно выделенное значение параметра ν :

$$\nu = \frac{2}{2 + d\sigma}, \quad (14)$$

при котором временная зависимость «старших» членов одинаковая. Обращение суммы этих членов в нуль в области $d\sigma > 2$ дает уравнение для коллапсирующей функции в главном приближении.

В случае критической размерности $d\sigma = 2$, из уравнений (13) следует, что значения параметра ν распадаются на две подобласти, $\nu < 1/2$ и $\nu > 1/2$.

На границе этих областей ($\nu = 1/2$) меняется поведение функции $(t_0 - t)^{4\nu-2}$.

Рассмотрим теперь наиболее интересный случай критической размерности $d\sigma = 2$. Исследуем вначале выделенные значения параметра $\nu = 1, 1/2$, при которых система уравнений (10), (11) имеет точное решение.

а. $\nu = 1$. В этом случае (см. уравнение (13))

$$\lambda = \frac{C}{t_0 - t}. \quad (15)$$

Из уравнения (11) возникает также уравнение для фазы $\chi_0(t)$:

$$\frac{\partial \chi_0}{\partial t} = C_2 \lambda^2, \quad \chi_0(t) = \frac{C_2 C^2}{t_0 - t} + \text{const}. \quad (16)$$

С учетом уравнений (15), (16) уравнение (11) приводится к виду

$$\left(y^{-d/2+1} \frac{\partial}{\partial y} (y^{d/2} \varphi) \right) \left\{ \frac{1}{y^{d-1}} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^{d-1} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - C_2 \varphi + \varphi^{2\sigma+1} \right\} = 0. \quad (17)$$

Простая проверка показывает, что функция

$$\psi(\rho, t) = \lambda_{(t)}^{d/2} \varphi(\rho \lambda(t)) \exp \left\{ \frac{i C_2 C^2}{t_0 - t} - \frac{i \rho^2}{4(t_0 - t)} + i \text{const} \right\} \quad (18)$$

есть точное коллапсирующее решение уравнений (1), где функция $\varphi(\rho)$ есть решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{1}{\rho^{d-1}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{d-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) - C_2 \varphi + \varphi^{2\sigma+1} = 0. \quad (19)$$

Из уравнения (19) следует, что быстро убывающее на бесконечности решение (нормируемое) существует лишь при $C_2 > 0$. Это решение было получено и исследовалось в работах [4–6].

Отметим, что при $C_2 > 0$ на бесконечности возможны асимптотики двух типов: одна из них,

$$\varphi \sim (C_2)^{1/2\sigma} + A \sin \left(\sqrt{2\sigma C_2 \rho} + \text{const} \right) / \rho^{(d-1)/2},$$

возникает на двухпараметрическом семействе решений, другая,

$$\varphi \sim \frac{\text{const}}{\rho^{(d-1)/2}} \exp \left(-\sqrt{C_2 \rho} \right),$$

может быть реализована лишь на однопараметрическом семействе решений.

Рассмотрим теперь второе семейство решений уравнений (10), (11), соответствующее случаю $\nu = 1/2$.

в. $\nu = 1/2$. В этом случае (см. уравнение (13))

$$\lambda^2 = \frac{C}{t_0 - t}, \quad \frac{\partial \chi_0}{\partial t} = C_2 \lambda^2, \quad \chi_0 = -C_2 C \ln(t_0 - t) + \text{const}. \quad (20)$$

С учетом формул (20), уравнение (11) приводится к виду

$$\left\{ y^{-d/2+1} \frac{\partial}{\partial y} (y^{d/2} \varphi) \right\} \left\{ \frac{1}{y^{d-1}} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^{d-1} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - C_2 \varphi + \frac{y^2 \varphi}{16C^2} + \varphi^{2\sigma+1} \right\} = 0. \quad (21)$$

Рассмотрим решение φ уравнения (21), обращающее в нуль вторую скобку:

$$\frac{1}{\rho^{d-1}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{d-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) - C_2 \varphi + \frac{\rho^2 \varphi}{16C^2} + \varphi^{2\sigma+1} = 0. \quad (22)$$

Это уравнение соответствует движению частицы в поле потенциала U , изображенного на рис. 1, к которому следует добавить слагаемое, зависящее от размерности пространства d :

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{(d-1)(d-3)}{4}. \quad (23)$$

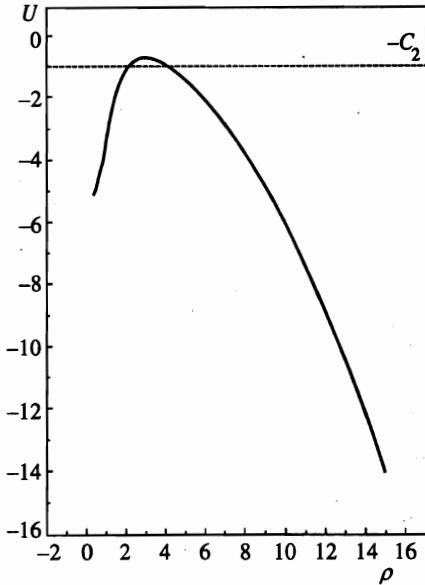


Рис. 1. Форма потенциальной энергии $U = -\varphi^{4/3} - \rho^2/16C^2$ для уравнения (22), $\{A, C, C_2\} = \{3.4, 1, 1\}$, $d = 3$

В области $\rho \ll 1$ из уравнения (21) находим решение, регулярное в нуле:

$$\varphi = A + \frac{\rho^2 A}{2d}(C_2 - A^{2\sigma}) + \frac{\rho^4 A}{4(d+2)} \left[\frac{1}{2d}(C_2 - A^{2\sigma})(C_2 - (2\sigma + 1)A^{2\sigma}) - \frac{1}{16C^2} \right] + \dots,$$

где $A > 0$ — произвольная константа. В области $\rho \gg 1$ асимптотическое поведение φ определяется выражением

$$\varphi \sim \frac{B}{\rho^{d/2}} \sin \left\{ \frac{\rho^2}{8C} - 2CC_2 \ln \rho + \text{const} \right\},$$

где B — некоторая константа, зависящая от $\{A, C, C_2\}$. Легко проверить, что при всяких значениях постоянных $\{A, C, C_2\}$ функция φ не имеет сингулярности при конечных значениях ρ .

Существует область значений параметров C, C_2 и $\varphi(0)$, в которой решение уравнения (22) при выходе из потенциального барьера экспоненциально мало. Пусть

$$\rho^* \equiv \rho^*(C, C_2, \varphi(0)) \tag{24}$$

есть первый нуль функции $\varphi(\rho)$. Положим

$$\tilde{\varphi}(\rho) = \begin{cases} \varphi(\rho) & \text{при } \rho < \rho^*, \\ 0 & \text{при } \rho > \rho^*. \end{cases} \tag{25}$$

Тогда коллапсирующее решение $\psi(\rho, t)$ уравнения (1) дается выражением

$$\psi(\rho, t) = \lambda_{(t)}^{d/2} \tilde{\varphi}(\rho \lambda(t)) \exp \left\{ -iCC_2 \ln(t_0 - t) - \frac{i\rho^2}{8(t_0 - t)} + i\text{const} \right\} + \psi_1(\rho, t), \tag{26}$$

где $\psi_1(\rho, t)$ есть решение линейного неоднородного уравнения

$$\begin{aligned}
 & i \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \Delta \psi_1 + |\psi|^{2\sigma} \psi_1 + \sigma \left[|\psi|^{2\sigma} \psi_1 + |\psi|^{2(\sigma-1)} \psi^2 \psi_1^* \right] - \\
 & - \left(\frac{\partial \varphi(\rho)}{\partial \rho} \right)_{\rho^*} \lambda_{(t)}^{d/2+1} \exp \left\{ -i C C_2 \ln(t_0 - t) - \frac{i \rho^2}{8(t_0 - t)} + \text{const} \right\} \times \\
 & \times \delta \left(\rho - \frac{\rho^*}{\lambda(t)} \right) = 0,
 \end{aligned} \tag{27}$$

$\psi_1(\rho, t^*) = 0$, t^* — время «начала» коллапса.

Отметим, что увеличение величины параметра C ведет к увеличению ширины подбарьерной области и одновременно к резкому уменьшению вероятности образования начальной флуктуации, приводящей к коллапсу. Поэтому наиболее вероятны, по-видимому, такие приводящие к коллапсу флуктуации, для которых $C \sim C_2 \sim 1$ и C_2 проходит вблизи вершины потенциального барьера.

На рис. 2 приведены значения функции φ в трехмерном пространстве ($d = 3$) для двух наборов параметров $\{A, C, C_2\}$ равных $\{3.4, 1, 1\}$ и $\{5.5937, 2, 1.5\}$. Значения ρ^* и $\varphi'(\rho^*)$ соответственно равны $\{\rho^* = 4.815, \varphi'(\rho^*) = -0.082\}$ и $\{\rho^* = 13.13, \varphi'(\rho^*) = -2.63 \cdot 10^{-3}\}$.

с. $\nu > 1/2$. В этом случае

$$\lambda(t) = \frac{C}{(t_0 - t)^\nu}, \quad \frac{\partial \chi_0}{\partial t} = C_2 \lambda^2. \tag{28}$$

При $\nu > 1/2$ можно приравнять нулю лишь «старшие» члены в уравнении (11), растущие наиболее быстро при приближении к особой точке t_0 . С учетом формул (28), (11) получаем следующее уравнение для функции φ :

$$\left\{ y^{-d/2+1} \frac{\partial}{\partial y} (y^{d/2} \varphi) \right\} \left\{ -C_2 \varphi + \varphi^{2\sigma+1} + \frac{1}{y^{d-1}} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^{d-1} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right\} = 0. \tag{29}$$

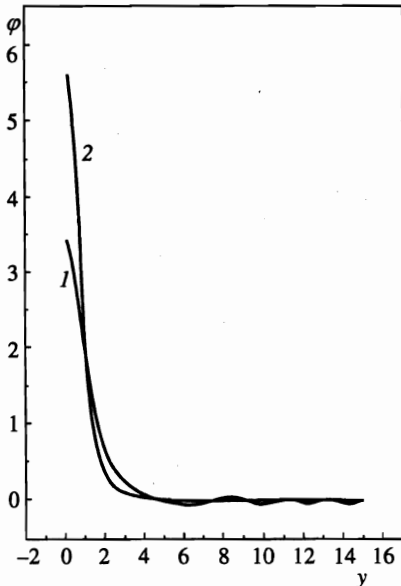


Рис. 2. Функция φ для значений параметров $\{A, C, C_2\}$ равных $\{3.4, 1, 1\}$ (1) и $\{5.5937, 2, 1.5\}$ (2)

Коллапсирующее решение уравнения (1) при $\nu > 1/2$ имеет вид

$$\psi(\rho, t) = \lambda_{(t)}^{d/2} \varphi(\rho \lambda(t)) \exp \left\{ \frac{iC_2 C^2}{(2\nu - 1)(t_0 - t)^{2\nu - 1}} - \frac{i\rho^2 \nu}{4(t_0 - t)} + i \text{const} \right\} + \psi_1(\rho, t), \quad (30)$$

где $\varphi(\rho)$ есть решение уравнения (19) (обращает в нуль вторую скобку в уравнении (29)), а функция ψ_1 есть решение линеаризованного уравнения (1) с правой частью, возникающей из-за необращения в нуль малых остаточных членов в уравнении (11). Детальное исследование функции ψ_1 будет дано отдельно.

д. $\nu < 1/2$. Обращение в нуль главных членов в уравнении (11) приводит к уравнению

$$\left\{ y^{-d/2+1} \frac{\partial}{\partial y} (d^{d/2} \varphi) \right\} \left\{ -C_2 \varphi + \frac{\nu(1-\nu)}{4} y^2 \varphi \right\} = 0, \quad (31)$$

где

$$\lambda = \frac{C}{(t_0 - t)^\nu}, \quad \frac{\partial \chi_0}{\partial t} = \frac{C_2}{C^2} (t_0 - t)^{2\nu - 2}. \quad (32)$$

Обращение в нуль второй скобки в уравнении (31) не приводит к нетривиальному решению.

е. Рассмотрим теперь случай надкритической размерности $d\sigma > 2$. В этом случае

$$\nu = \frac{2}{2 + d\sigma}, \quad \lambda = \frac{C}{(t_0 - t)^\nu}, \quad \frac{\partial \chi_0}{\partial t} = \frac{C_2}{\lambda^2 (t_0 - t)^2}, \quad \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{\nu}{t_0 - t}. \quad (33)$$

Подставляя выражения (33) в уравнение (11) и приравнявая нулю старшие по параметру $(t_0 - t)^{-1}$ члены, получим уравнение для функции φ :

$$\left\{ y^{-d/2+1} \frac{\partial}{\partial y} (y^{d/2} \varphi) \right\} \left\{ -C_2 \varphi + \frac{\nu(1-\nu)}{4} y^2 \varphi + C^{d\sigma+2} \varphi^{2\sigma+1} \right\} = 0. \quad (34)$$

Из уравнения (34) находим

$$\varphi(y) = \begin{cases} \left[C_2 - \frac{\nu(1-\nu)}{4} y^2 \right]^{1/2\sigma} / C^{d+2/\sigma}, & y < 2 \left(\frac{C_2}{\nu(1-\nu)} \right)^{1/2}, \\ 0, & y > 2 \left(\frac{C_2}{\nu(1-\nu)} \right)^{1/2}. \end{cases} \quad (35)$$

Таким образом, в области значений $d\sigma > 2$ коллапсирующее решение $\psi(\rho, t)$ дается выражением

$$\psi(\rho, t) = \lambda_{(t)}^{d/2} \varphi(\rho \lambda(t)) \exp \left\{ -\frac{i\nu\rho^2}{4(t_0 - t)} + \frac{iC_2}{(1-2\nu)C^2(t_0 - t)^{1-2\nu}} + i \text{const} \right\} + \psi_1(\rho, t), \quad (36)$$

где функция $\varphi(\rho)$ определяется уравнением (35). Как и в случае «с» (уравнение (30)), функция $\psi_1(\rho, t)$ есть решение линеаризованного уравнения (1) с правой частью, возникающей из-за необращения в нуль остаточных членов в уравнении (11). Детальное исследование функции ψ_1 будет дано отдельно.

При $\sigma = 1$ в трехмерном случае решение вида (33), (35) было получено в работе [7].

f. Слабый коллапс.

В надкритической области ($\sigma d > 2$) уравнение (1) может иметь точные коллапсирующие решения вида

$$\psi(\rho, t) = \lambda^{\tilde{\nu}} \varphi(\rho\lambda) \exp(i\chi), \quad (37)$$

где $\lambda = \lambda(t)$, $\chi = \chi(\rho, t)$, $\tilde{\nu}$ — константа. При $\tilde{\nu} \neq d/2$ уравнение (7) для фазы принимает вид

$$-2 \frac{\partial \chi}{\partial \rho} = \frac{\rho}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{2\tilde{\nu} - d}{\varphi^2(y)} \frac{1}{y^{d-1}} \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \int_0^y dy y^{d-1} \varphi^2(y). \quad (38)$$

Из формул (3), (37) находим

$$E_V = \frac{\alpha}{2} \int_0^{\rho} d\rho \rho^{d-1} \left\{ \varphi^2 \lambda^{2\tilde{\nu}} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \rho} \right)^2 + \lambda^{2\tilde{\nu}+2} (\varphi')^2 - \frac{\lambda^{2\tilde{\nu}(1+\sigma)}}{1+\sigma} \varphi^{2(1+\sigma)} \right\},$$

$$\frac{\partial E_V}{\partial t} = \alpha \lambda^{2\tilde{\nu}} \rho^{d-1} \left\{ (\tilde{\nu}\varphi + y\varphi') \varphi' \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial t} \frac{\partial \chi}{\partial \rho} \varphi^2 \right\}. \quad (39)$$

Для того чтобы все члены в уравнениях (38), (39) имели одинаковую зависимость от времени, необходимо выполнение следующих условий:

$$\tilde{\nu}\sigma = 1, \quad \chi(\rho, t) = \chi_0(t) + \tilde{\chi}(\rho\lambda),$$

$$\frac{1}{\lambda^3} \frac{\partial \lambda}{\partial t} = \text{const}, \quad \frac{\partial \chi_0}{\partial t} \sim \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial t}. \quad (40)$$

Из уравнений (40) находим

$$\lambda = \frac{C}{\sqrt{t_0 - t}}, \quad \chi_0(t) = -\frac{C_1}{2} \ln(t_0 - t), \quad \frac{1}{\lambda^3} \frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{1}{2C^2}, \quad \frac{\partial \chi_0}{\partial t} = \frac{C_1 \lambda^2}{2C^2}. \quad (41)$$

Рассмотрим теперь случай $d = 3$, $\sigma = 1$. С учетом формул (41) уравнения (38), (39) для фазы $\tilde{\chi}$ и модуля φ принимают вид

$$\tilde{\chi}' + \frac{1}{4C^2} \left(y - \frac{1}{y^2 \varphi^2} \int_0^y dy y^2 \varphi^2 \right) = 0,$$

$$\frac{1}{y^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \varphi^3 - \frac{\varphi}{2C^2} (C_1 + y\tilde{\chi}') - \varphi (\tilde{\chi}')^2 = 0. \quad (42)$$

Отметим, что всякое решение системы уравнений (42) есть точное решение нелинейного уравнения (1). Положим

$$Z = \int_0^y dy y^2 \varphi^2. \quad (43)$$

Модуль φ и фаза $\tilde{\chi}$ простым образом связаны с функцией Z :

$$\varphi = \frac{\sqrt{Z'}}{y}, \quad \tilde{\chi}' = -\frac{yZ' - Z}{4C^2 Z'}, \quad (44)$$

а сама функция Z есть решение обыкновенного дифференциального уравнения [8]:

$$Z''' - \frac{(Z'')^2}{2Z'} + \frac{2(Z')^2}{y^2} - \frac{1}{C^2} \left(C_1 Z' - \frac{y}{4C^2} (yZ' - Z) \right) - \frac{(yZ' - Z)^2}{8C^4 Z'} = 0. \quad (45)$$

В области $y \ll 1$ из уравнения (45) получаем

$$Z(y) = Ay^3 + \frac{y^5}{15} \left(\frac{3AC_1}{2C^2} - 9A^2 \right) + \dots, \quad (46)$$

где $A > 0$ — произвольная константа. В области $y \gg 1$ решение уравнения (45) есть

$$Z = By - \frac{2BC^2 C_1}{y} + \frac{2BC^4}{y^3} (B - 2C_1^2) + \dots \quad (47)$$

Уравнение (45) допускает существование полюсов вида

$$Z \sim -\frac{2y_0^2}{y_0 - y}. \quad (48)$$

Однако при $A > 0$ войти в такой полюс нельзя. Поскольку при $y \rightarrow \infty$ единственно возможная асимптотика уравнения (45) определяется формулой (47), существует трехпараметрическое семейство решений уравнения (1) вида (37). Эти параметры есть $\{A, C, C_1\}$. Как и в случае «в», область физического коллапса ограничена: моменту начала коллапса t^* соответствует $y < y^*$. При $y > y^*$ следует положить $\varphi(y > y^*) = 0$, что приведет к появлению отходящих волн. Соответствующим выбором параметров A, C, C_1 можно сделать $\varphi(y^*)/\varphi(0) \ll 1$, если даже $y^* \lesssim 1$. Слабый коллапс рассматривался в работах [7, 9]. Мы показали, что задача о слабом коллапсе сводится к решению одного обыкновенного дифференциального уравнения для вещественной функции Z , а решения образуют трехпараметрическое семейство. На рисунках 3, 4 представлены зависимости функций $\varphi(y)$ и $\tilde{\chi}'(y)$ для двух наборов параметров $(A, C, C_1) = 4, 2, 2$ и $(A, C, C_1) = 3, 1, 1$. Отношение $\varphi(0)/\varphi(y^*)$ для параметров на рис. 3 равно $\varphi(0)/\varphi(y^*) = 71.3$, $y^* = 2.26$.

г. Слабый коллапс при произвольных $\{d, \sigma\}$. Как и прежде (уравнение (43)), положим

$$Z = \int_0^y dy y^{d-1} \varphi^2(y), \quad \varphi(y) = \frac{\sqrt{Z'}}{y^{(d-1)/2}}. \quad (49)$$

Уравнение для фазы (38) принимает вид

$$\tilde{\chi}' = -\frac{yZ' + (2/\sigma - d)Z}{4C^2 Z'}. \quad (50)$$

Уравнение для модуля $\varphi(y)$ легко может быть получено из уравнений (1), (37):

$$\frac{1}{y^{d-1}} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^{d-1} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - \varphi \left[\frac{C_1}{2C^2} + \frac{y}{2C^2} \tilde{\chi}' \right] - \varphi (\tilde{\chi}')^2 + \varphi^{2\sigma+1} = 0. \quad (51)$$

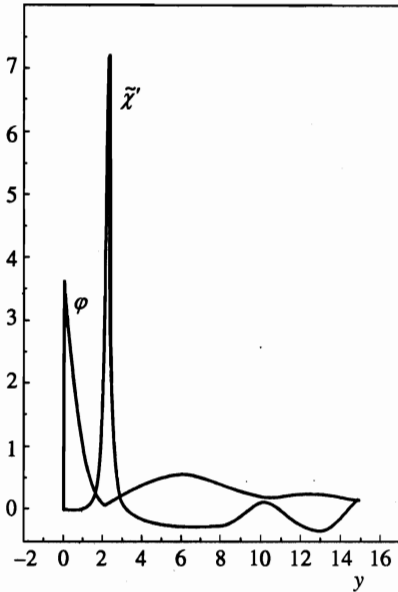


Рис. 3

Рис. 3. Зависимости $\varphi, \tilde{\chi}'$ для значений параметров $\{A, C, C_1\} = \{4, 2, 2\}$

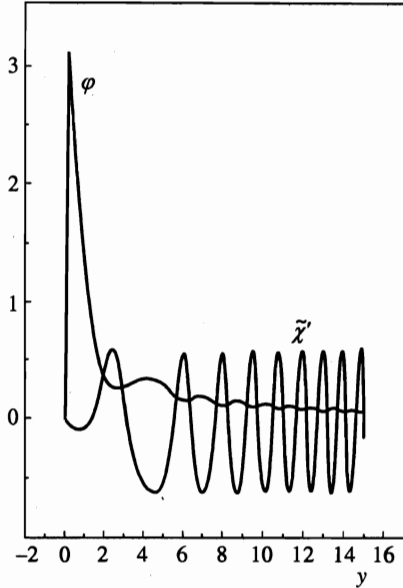


Рис. 4

Рис. 4. Зависимости $\varphi, \tilde{\chi}'$ для значений параметров $\{A, C, C_1\} = \{3, 1, 1\}$

Подставляя в уравнение (51) явные выражения для функций $\varphi, \tilde{\chi}$ (уравнения (49), (50)), получаем одно уравнение для вещественной функции Z :

$$Z''' - \frac{(Z'')^2}{2Z'} - \frac{(d-1)(d-3)}{2y^2} Z' - \frac{1}{C^2} \left[C_1 Z' - \frac{y(yZ' + (2/\sigma - d)Z)}{4C^2} \right] - \frac{(yZ' + (2/\sigma - d)Z)^2}{8C^4 Z'} + \frac{2(Z')^{\sigma+1}}{y^{(d-1)\sigma}} = 0. \tag{52}$$

Уравнение (52) является обобщением уравнения (45) на случай произвольных значений $\{d, \sigma\}$. Существует три значения параметра $\tilde{\nu} > 0$, таких что при $y \rightarrow 0$ функция Z разлагается в ряд

$$Z(y) = Ay^{\tilde{\nu}} + A_2 y^{\tilde{\nu}+2} + \dots \tag{53}$$

1. Значение $\tilde{\nu} = d - 2/\sigma > 0$ может быть реализовано лишь при условии $d > 2(1 + 1/\sigma)$. Коэффициент A в этом случае есть однозначная функция $\tilde{\nu}$

$$A \equiv A_{(\tilde{\nu})} = \frac{(d - \tilde{\nu})(\tilde{\nu} + d - 4)}{4\tilde{\nu}}. \tag{54}$$

2. Значение $\tilde{\nu} = d$ реализуется при произвольной размерности и произвольных значениях $A > 0$.

3. Значение $\tilde{\nu} = 4 - d$ реализуется лишь при условии $d < 2$. При этом значение коэффициента $A > 0$ произвольно. Асимптотика всех решений при $y \rightarrow \infty$ имеет один и тот же вид

$$Z = y^{d-2/\sigma} \left(B - \frac{B_1}{y^2} + \dots \right). \quad (55)$$

Как и в случае $\{d = 3, \sigma = 1\}$ при произвольных значениях $\{d, \sigma\}$ следует производить обрезку φ при $y > y^*$. Наиболее подходящей точкой для этого является положение глубокого минимума функции φ . По-видимому, реализоваться могут только такие значения параметров $\{A, C, C_1\}$, при которых такой минимум существует.

В случае критической размерности $d\sigma = 2$ получены точные решения нелинейного уравнения Шредингера, имеющие сингулярность при конечном значении времени t_0 . Эти решения соответствуют значениям параметра $\nu = 1, 1/2$. Показано, что коллапсирующие решения существуют также при значениях параметра $\nu > 1/2$.

Получены точные решения NLS в надкритической области $\sigma d > 2$, описывающие слабый коллапс. Решения образуют трехпараметрическое семейство $\{A, C, C_1\}$.

Коллапсирующее решение возникает в ограниченной области пространства, и для возникновения сингулярности необходимо создать начальное распределение специального вида. При численном моделировании или в реальных физических объектах коллапс будет возникать от таких флуктуаций, приводящих к коллапсу, вероятность появления которых близка к максимальной.

Работа Ю. Н. Овчинникова поддержана грантом CRDF RP1-194.

Литература

1. В. Е. Захаров, ЖЭТФ **62**, 1746 (1972); Sov. Phys. JETP **35**, 908 (1972).
2. В. Е. Захаров, В. С. Сынах, ЖЭТФ **68**, 940 (1975); Sov. Phys. JETP **41**, 464 (1976).
3. В. J. LeMesurier et al., Physica D **32**, 210 (1988).
4. В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ **11**, 303 (1971).
5. К. Rypdal, I. Rasmussen, and K. Thomsen, Physica D **16**, 339 (1985).
6. Г. М. Фрайман, ЖЭТФ **88**, 390 (1985).
7. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, ЖЭТФ **91**, 1310 (1986).
8. Ю. Н. Овчинников, Письма в ЖЭТФ **69**, 387 (1999).
9. В. Е. Захаров, Л. Н. Шур, ЖЭТФ **81**, 2019 (1981).