ЖЭТФ, 1999, том 116, вып. 1(7), стр. 78–84

ПРОСТОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ АМПЛИТУД ДЕЛЬБРЮКОВСКОГО РАССЕЯНИЯ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Р. Н. Ли, А. И. Мильштейн, В. М. Страховенко*

Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера
Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 3 февраля 1999 г.

С использованием нового представления для квазиклассической функции Грина уравнения Дирака в кулоновском поле, найдено точное по параметру $Z\alpha$ аналитическое выражение для амплитуд дельбрюковского рассеяния на малые углы фотонов высокой энергии. Значения этих амплитуд согласуются с предыдущими результатами, однако структура полученных выражений существенно проще известных представлений, что значительно облегчает проведение численных расчетов.

PACS: 12.20.Os, 95.30.Cq

В последние годы процесс дельбрюковского рассеяния [1] (когерентного рассеяния фотона в электрическом поле атомов через виртуальные электрон-позитронные пары) интенсивно изучался как теоретически, так и экспериментально [2]. С теоретической точки зрения интерес к изучению этого процесса связан с тем, что в нем велика роль высших порядков теории возмущений по параметру $Z\alpha$ ($Z|e|$ — заряд ядра, $\alpha = e^2 = 1/137$ — постоянная тонкой структуры, e — заряд электрона, $\hbar = c = 1$). Для экспериментального изучения дельбрюковского рассеяния особенно удобной является область больших энергий фотона $\omega \gg m$ (m — масса электрона). Существенный прогресс в повышении точности измерения сечения дельбрюковского рассеяния был достигнут в недавнем эксперименте [3], выполненном в Институте ядерной физики (ИЯФ) им. Г. И. Будкера, для энергий фотонов в диапазоне 140–450 МэВ и углов рассеяния 2.6–16.6 мрад. Точные по $Z\alpha$ амплитуды дельбрюковского рассеяния в кулоновском поле, справедливые при $\omega \gg m$ и малых углах рассеяния, были получены в работах [4–6] посредством суммирования в определенном приближении диаграмм теории возмущений по взаимодействию с внешним полем. В работах [7, 8] эти амплитуды были найдены с помощью квазиклассической функции Грина уравнения Дирака в кулоновском поле. В работах [9, 10] была получена квазиклассическая функция Грина уравнения Дирака в произвольном сферически-симметричном убывающем поле и с ее помощью рассмотрено дельбрюковское рассеяние в экранированном потенциале.

Недавно в ИЯФ им. Г. И. Будкера проведен первый успешный эксперимент по наблюдению другого нелинейного процесса КЭД — расщепления фотона в электрическом поле атома (предварительные результаты опубликованы в [11]). Точные по $Z\alpha$ амплитуды расщепления фотона для $\omega \gg m$ найдены в работах [12–14]. В этих работах получено новое представление для квазиклассической функции Грина, существенно упростившее вычисление амплитуд. В настоящей работе метод вычислений, раз-

*E-mail: A.I.Milshtein@inp.nsk.su

витый в [12–14], используется для нахождения амплитуд дельбрюковского рассеяния при высоких энергиях ($\omega \gg m$) и малых углах рассеяния фотона. Как и должно быть, значения амплитуд, полученные с помощью новых формул, совпадают с известными ранее. Однако новые представления амплитуд являются существенно более простыми для численных расчетов, так как содержат интегрирование меньшей кратности.

Как было показано в [9], амплитуду дельбрюковского рассеяния удобно представить в виде, содержащем функции Грина $D(\mathbf{r},\mathbf{r}'|\,\varepsilon)$ квадрированного уравнения Дирака:

$$D(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2|\,\varepsilon) = \langle \mathbf{r}_1|1/(\hat{\mathscr{P}}^2 - m^2 + i0)|\mathbf{r}_2\rangle,$$

где $\hat{\mathscr{P}} = \gamma^0(\varepsilon + Z\alpha/r) - \gamma\mathbf{p}$, $\mathbf{p} = -i\boldsymbol{\nabla}$.

В терминах функций $D(\mathbf{r},\mathbf{r}'|\varepsilon)$ амплитуда процесса имеет вид [9]

$$\begin{aligned} M = i\alpha \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \exp[i(\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1 - \mathbf{k}_2\mathbf{r}_2)] \int d\varepsilon \,\times \\ \times\, \mathrm{Sp}\left[(2\mathbf{e}_2^*\mathbf{p}_2 - \hat{e}_2^*\hat{k}_2)D(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1|\omega-\varepsilon)\right]\left[(2\mathbf{e}_1\mathbf{p}_1 + \hat{e}_1\hat{k}_1)D(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2|-\varepsilon)\right] + \\ + 2i\alpha\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_1 \int d\mathbf{r} \exp[i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\mathbf{r}] \int d\varepsilon\, \mathrm{Sp} D(\mathbf{r},\mathbf{r}|\varepsilon), \end{aligned} \tag{1}$$

где e_1 и k_1 (e_2 и k_2) — поляризация и 4-импульс начального (конечного) фотона, $\mathbf{p}_{1,2} = -i\boldsymbol{\nabla}_{1,2}$. При $\omega \gg m$ основной вклад в сечение процесса дают передачи импульса $\Delta \sim m$, что соответствует малым углам рассеяния фотонов. В этом случае можно пренебречь вкладом в амплитуду последнего члена в формуле (1), так как он зависит только от передачи импульса $\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$, а амплитуда при $\omega \gg \Delta$ пропорциональна ω (см., например, [2]).

Из соотношения неопределенности следует, что время жизни виртуальной электрон-позитронной пары есть $\tau \sim |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \sim \omega/(m^2+\Delta^2)$, а характерные прицельные параметры $\rho \sim 1/\Delta$. Поэтому при $\omega \gg \Delta \gg m^2/\omega$ углы между векторами $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{r}_2$ и $-\mathbf{r}_1$ малы и можно воспользоваться соответствующим разложением. Характерные значения углового момента $l \sim \omega\rho \sim \omega/\Delta \gg 1$, и справедливо квазиклассическое приближение. В случае экранированного кулоновского потенциала влияние экранировки существенно только при $\Delta \sim r_c^{-1} \ll m$, где радиус экранировки в модели Томаса—Ферми $r_c \sim (m\alpha)^{-1}Z^{-1/3}$. В этой работе мы ограничимся областью передач импульса $\Delta \gg m^2/\omega,\, r_c^{-1}$, которая дает главный вклад в полное сечение процесса. Заметим, что это ограничение не требуется для вычисления кулоновских поправок, и выражения, полученные в настоящей работе для этих поправок, справедливы при любых $\Delta \ll \omega$. Модификация борновской амплитуды при $\Delta \sim m^2/\omega$ изучена в [5], подробное обсуждение влияния экранировки см. в [9].

В силу закона сохранения импульса $M(Z=0) \propto \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$, т.е. для рассматриваемого нами случая $\Delta \neq 0$ имеем $M(Z=0) = 0$. Удобно вычесть из подынтегрального выражения для M в (1) его значение при $Z = 0$. Именно для этой разности справедливо сделанное выше утверждение о малости углов между векторами $\mathbf{r}_2$ и $-\mathbf{r}_1$, дающих основной вклад в интеграл.

В работах [12, 13] было получено удобное представление для квазиклассической функции Грина $D(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2|\varepsilon)$ квадрированного уравнения Дирака в кулоновском поле. Для случая малых углов между векторами $-\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, направляя ось z под малым углом к вектору $\mathbf{r}_2$, имеем

$$D(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2|\,\varepsilon) = \frac{i\kappa}{8\pi^2 r_1 r_2}\exp\left[i\kappa(r_1+r_2)\right]\int d\mathbf{q}\,\left[1+Z\alpha\frac{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{q}}{\kappa q^2}\right]\times$$
$$\times\exp\left[i\kappa\frac{q^2(r_1+r_2)}{2r_1r_2}+i\kappa\mathbf{q}\,(\boldsymbol{\theta}_1+\boldsymbol{\theta}_2)\right]\left(\frac{4r_1r_2}{q^2}\right)^{iZ\alpha\lambda}, \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}$, $\kappa^2 = \varepsilon^2 - m^2$, $\lambda = \varepsilon/\kappa$, $\mathbf{q}$, $\boldsymbol{\theta}_1$, $\boldsymbol{\theta}_2$ — двумерные векторы в плоскости xy, $\boldsymbol{\theta}_1 = \mathbf{r}_{1\perp}/r_1$, $\boldsymbol{\theta}_2 = \mathbf{r}_{2\perp}/r_2$. Формула (2) содержит только элементарные функции, а углы $\boldsymbol{\theta}_1$ и $\boldsymbol{\theta}_2$ входят только в виде множителя $\exp[i\mathbf{q}\,(\boldsymbol{\theta}_1+\boldsymbol{\theta}_2)]$. Поэтому представление (2) для функции Грина очень удобно для вычислений.

Выберем ось z вдоль вектора $\mathbf{k}_1$. Заметим, что в малоугловом приближении нет необходимости учитывать поправки к поперечной части вектора поляризации $\mathbf{e}_2$, а продольную часть $\mathbf{e}_2$ можно выразить через поперечную, используя соотношение $\mathbf{e}_2\,\mathbf{k}_2 = 0$: $(\mathbf{e}_2)_z = -\mathbf{e}_2\boldsymbol{\Delta}/\omega$. Таким образом, поперечную часть вектора поляризации конечного фотона с заданной спиральностью можно заменить на вектор поляризации фотона, распространяющегося вдоль оси z и имеющего ту же спиральность. Ниже для этого вектора поляризации в случае положительной спиральности мы используем обозначение $\mathbf{e}$; тогда вектор поляризации с отрицательной спиральностью будет равен $\mathbf{e}^*$. Для описания процесса дельбрюковского рассеяния достаточно найти две спиральные амплитуды: M_{++} и M_{+-}. Остальные (M_{--} и M_{-+}) получаются из них заменой $\mathbf{e}\leftrightarrow\mathbf{e}^*$.

Подставив (2) в (1), проведем разложение амплитуды при малых углах, когда справедливо соотношение $d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \approx r_1^2 r_2^2 dr_1 dr_2 d\boldsymbol{\theta}_1 d\boldsymbol{\theta}_2$. Вычисляя след γ-матриц и беря элементарный интеграл по углам $\boldsymbol{\theta}_1$ и $\boldsymbol{\theta}_2$, получаем

$$M = -\frac{i\alpha}{\omega^2}\int\limits_0^{\omega} d\varepsilon\,\varepsilon\kappa\int\limits_0^{\infty}\frac{dr_1}{r_1}\int\limits_0^{\infty}\frac{dr_2}{r_2}\iint\frac{d\mathbf{q}_1\,d\mathbf{q}_2}{(2\pi)^2}\left[\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^{2iZ\alpha}-1\right]e^{i\Phi}T\,. \qquad (3)$$

Здесь

$$\Phi = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\mathbf{Q}^2+\frac{\varepsilon-\kappa}{\omega}\mathbf{Q}\boldsymbol{\Delta}+\mathbf{q}\boldsymbol{\Delta}-m^2(r_1+r_2)\right], \qquad (4)$$

функция T для разных поляризаций имеет вид

$$T_{++} = \frac{2\mathbf{Q}^2}{r_1r_2}-\frac{\omega^2}{2\varepsilon\kappa}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\left[\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\mathbf{Q}^2-2i\right], \quad T_{+-} = \frac{4}{r_1r_2}(\mathbf{e}\mathbf{Q})^2 \qquad (5)$$

и введены обозначения $\kappa = \omega-\varepsilon$, $\mathbf{Q} = \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2$ и $\mathbf{q} = \mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2$. При получении формулы (3) было проведено интегрирование по частям по $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ так, чтобы вся зависимость от $Z\alpha$ оказалась в множителе $[(q_1/q_2)^{2iZ\alpha}-1]$. Кроме того, сделана замена переменных $r_{1,2}\to(\varepsilon\kappa/\omega)r_{1,2}$. Выражение для T_{++} в (5) можно упростить, если в (3) временно перейти от r_1, r_2 к переменным $R = r_1r_2/(r_1+r_2)$ и $t = r_1/r_2$ и проинтегрировать по частям по R член, пропорциональный $\mathbf{Q}^2$ в квадратных скобках в (5). В результате получаем

$$T_{++} = \frac{2\mathbf{Q}^2}{r_1r_2}+\frac{\omega^2m^2}{2\varepsilon\kappa r_1r_2}(r_1+r_2)^2. \qquad (6)$$

Дальнейшие преобразования состоят в следующем. Перейдем от переменных $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ к переменным $\mathbf{q}$ и $\mathbf{Q}$. Тогда интеграл по $\mathbf{q}$ будет иметь вид

$$J = \int \frac{d\mathbf{q}}{\mathbf{Q}^2} \left[\left(\frac{|\mathbf{q}+\mathbf{Q}|}{|\mathbf{q}-\mathbf{Q}|} \right)^{2iZ\alpha} - 1 \right] \exp\left(-\frac{i}{2}\mathbf{q}\boldsymbol{\Delta} \right). \tag{7}$$

Как было показано в [12], этот интеграл можно преобразовать к виду

$$J = \int \frac{d\mathbf{q}}{\boldsymbol{\Delta}^2} \left[\left(\frac{|\mathbf{q}+\boldsymbol{\Delta}|}{|\mathbf{q}-\boldsymbol{\Delta}|} \right)^{2iZ\alpha} - 1 \right] \exp\left(-\frac{i}{2}\mathbf{q}\mathbf{Q} \right). \tag{8}$$

Используя это представление, а также параметризацию

$$\exp\left(i\frac{\mathbf{Q}^2}{2r_1} \right) = ir_1 \int \frac{d\mathbf{x}}{2\pi} \exp\left(-i\frac{r_1\mathbf{x}^2}{2} - i\mathbf{Q}\mathbf{x} \right), \tag{9}$$

где $\mathbf{x}$ — двумерный вектор, лежащий в той же плоскости, что и $\mathbf{Q}$, легко взять интегралы в (3) сначала по r_1, затем по $\mathbf{Q}$ и, наконец, по r_2. В результате получаем

$$\left\{ \begin{matrix} M_{++} \\ M_{+-} \end{matrix} \right\} = -\frac{i\alpha m^2}{\pi^2\Delta^2\omega^2} \int\limits_0^\omega d\varepsilon \int d\mathbf{q} \left[\left(\frac{q_+}{q_-} \right)^{2iZ\alpha} - 1 \right] \times$$
$$\times \int \frac{d\mathbf{x}}{(\mathbf{x}^2+m^2)^2(\mathbf{v}^2+m^2)^2} \left\{ \begin{matrix} m^2(\varepsilon^2+\kappa^2)+\omega^2\mathbf{x}\mathbf{v} \\ 4\varepsilon\kappa(\mathbf{e}\mathbf{v})^2 \end{matrix} \right\}, \tag{10}$$

где $q_\pm = |\mathbf{q}_\pm|$, $\mathbf{q}_\pm = \mathbf{q} \pm \boldsymbol{\Delta}$, $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{q}/2 + \boldsymbol{\Delta}(\varepsilon-\kappa)/2\omega$.

Для дальнейшего интегрирования удобно переписать выражение (10) в другом виде. Используя тождества

$$\frac{m^2}{(\mathbf{v}^2+m^2)^2} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{v} \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{v}^2+m^2} = \boldsymbol{\nabla}_\mathbf{q} \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{v}^2+m^2},$$
$$\frac{\mathbf{v}}{(\mathbf{v}^2+m^2)^2} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{v} \frac{1}{\mathbf{v}^2+m^2} = -\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{q} \frac{1}{\mathbf{v}^2+m^2}$$

и интегрируя по частям по $\mathbf{q}$, находим

$$\left\{ \begin{matrix} M_{++} \\ M_{+-} \end{matrix} \right\} = \frac{2\alpha(Z\alpha)m^2}{\pi^2\Delta^2\omega^2} \int\limits_0^\omega d\varepsilon \int d\mathbf{q} \left(\frac{q_+}{q_-} \right)^{2iZ\alpha} \int \frac{d\mathbf{x}}{(\mathbf{x}^2+m^2)^2(\mathbf{v}^2+m^2)} \times$$
$$\times \left(\frac{\mathbf{q}_+}{q_+^2} - \frac{\mathbf{q}_-}{q_-^2} \right) \left\{ \begin{matrix} \omega^2\mathbf{x} - (\varepsilon^2+\kappa^2)\mathbf{v} \\ 4\varepsilon\kappa(\mathbf{e}\mathbf{v})\mathbf{e} \end{matrix} \right\}. \tag{11}$$

Используя фейнмановскую параметризацию знаменателей, берем интеграл по $\mathbf{x}$ и переходим в интеграле по ε к переменной $s = 2\varepsilon/\omega - 1$. В результате

$$\left\{ \begin{matrix} M_{++} \\ M_{+-} \end{matrix} \right\} = \frac{4\alpha(Z\alpha)m^2\omega}{\pi\Delta^2} \int\limits_{-1}^{1} ds \int d\mathbf{q} \left(\frac{q_+}{q_-} \right)^{2iZ\alpha} \int\limits_0^1 \frac{t\,dt}{[t(1-t)(\mathbf{q}+s\boldsymbol{\Delta})^2+4m^2]^2} \times$$
$$\times \left(\frac{\mathbf{q}_+}{q_+^2} - \frac{\mathbf{q}_-}{q_-^2} \right) \left\{ \begin{matrix} [t(1-s^2)-2](\mathbf{q}+s\boldsymbol{\Delta}) \\ 2t(1-s^2)(\mathbf{e}, \mathbf{q}+s\boldsymbol{\Delta})\mathbf{e} \end{matrix} \right\}. \tag{12}$$

Интегрирование по $\mathbf{q}$ проводим при помощи приема, использованного в работах [13, 14]. Умножим подынтегральное выражение в (12) на

$$
\begin{aligned}
1 &\equiv \int_{-1}^{1} dy\, \delta\left(y - \frac{2\mathbf{q}\boldsymbol{\Delta}}{\mathbf{q}^2 + \boldsymbol{\Delta}^2}\right) = \\
&= (\mathbf{q}^2 + \boldsymbol{\Delta}^2) \int_{-1}^{1} \frac{dy}{|y|} \delta\left(\left(\mathbf{q} - \frac{\boldsymbol{\Delta}}{y}\right)^2 - \boldsymbol{\Delta}^2\left(\frac{1}{y^2} - 1\right)\right),
\end{aligned} \tag{13}
$$

поменяем порядок интегрирования по $\mathbf{q}$ и y и сделаем сдвиг $\mathbf{q} \to \mathbf{q} + \boldsymbol{\Delta}/y$. После этого интеграл по вектору $\mathbf{q}$ легко берется. Делая затем замену переменных $y = \mathrm{th}(\tau - \tau_0)$, где

$$
\tau_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{B + (1+s)^2}{B + (1-s)^2}, \quad B = \frac{4m^2}{\Delta^2 t(1-t)}, \tag{14}
$$

получаем, что интегрирование по τ сводится к вычислению двух интегралов (тех же, что и в [14]), выражающихся через производную функции Лежандра $P'_\nu(x)$:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}_1 &= a^2 \int_0^\infty d\tau \frac{\mathrm{ch}\,\tau \cos(2Z\alpha\tau)}{\left(\mathrm{sh}^2\tau + a^2\right)^{3/2}} = \frac{2\pi a^2}{\mathrm{sh}(\pi Z\alpha)} \mathrm{Im}\, P'_{iZ\alpha}(2a^2 - 1), \\
\mathscr{F}_2 &= a^2 \int_0^\infty d\tau \frac{\mathrm{sh}\,\tau \sin(2Z\alpha\tau)}{\left(\mathrm{sh}^2\tau + a^2\right)^{3/2}} = -\frac{2\pi a^2}{\mathrm{sh}(\pi Z\alpha)} \mathrm{Re}\, P'_{iZ\alpha}(2a^2 - 1),
\end{aligned} \tag{15}
$$

где $a^2 = 4B/[(B + (1+s)^2)(B + (1-s)^2)]$. Заметим, что $a^2 \le 1$ при любых s и $B > 0$.

Окончательно для амплитуд дельбрюковского рассеяния получаем

$$
\begin{aligned}
M_{++} &= i\frac{\alpha(Z\alpha)\omega}{8m^2} \int_0^1 ds \int_0^1 dt\, a^2 t[2 - t(1 - s^2)] \times \\
&\times \left[4sB \sin(2Z\alpha\tau_0)\mathscr{F}_1 + [B^2 - (s^2 - 1)^2] \cos(2Z\alpha\tau_0)\mathscr{F}_2\right], \\
M_{+-} &= i\frac{\alpha(Z\alpha)\omega(\mathbf{e}\boldsymbol{\Delta})^2}{4m^2\Delta^2} \int_0^1 ds \int_0^1 dt\, a^2 t(s^2 - 1) \Big[4sB(1-t)\sin(2Z\alpha\tau_0)\mathscr{F}_1 + \\
&+ [B^2(2 - 3t) + 2B(s^2 + 1)(1 - 2t) - (s^2 - 1)^2 t] \cos(2Z\alpha\tau_0)\mathscr{F}_2\Big].
\end{aligned} \tag{16}
$$

Обсудим теперь получение из (16) асимптотик амплитуд дельбрюковского рассеяния при $\Delta \ll m$ и $\Delta \gg m$. Особенно простым в этом представлении является вычисление асимптотики при $\Delta \ll m$, когда $B \sim m^2/\Delta^2 \gg 1$, $a^2 \approx 4/B \ll 1$ и функции $\mathscr{F}_{1,2}$ имеют вид

$$
\mathscr{F}_1 \approx 1, \quad \mathscr{F}_2 = -2Z\alpha\, a^2[\ln a + C + \mathrm{Re}\,\psi(1 + iZ\alpha)],
$$

где $C = 0.577\ldots$ — постоянная Эйлера, $\psi(x) = d\ln\Gamma(x)/dx$. Кроме того, $\tau_0 \sim 1/B \ll 1$. Подставляя асимптотики функций $\mathscr{F}_{1,2}$ в (16), находим

$$\left\{ \begin{array}{c} M_{++} \\ M_{+-} \end{array} \right\} = i\frac{4\alpha(Z\alpha)^2\omega}{m^2}\int\limits_0^1 ds \int\limits_0^1 t\,dt \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{m^2}{t(1-t)\Delta^2}\right) - C - \mathrm{Re}\,\psi(1+iZ\alpha)\right] \times$$
$$\times \left\{ \begin{array}{c} [2-t(1-s^2)] \\ 2(1-s^2)(3t-2)(\mathbf{e\Delta})^2/\Delta^2 \end{array} \right\}. \qquad (17)$$

Вычисляя элементарные интегралы, при $m^2/\omega \ll \Delta \ll m$ имеем

$$M_{++} = i\frac{28\alpha(Z\alpha)^2\omega}{9m^2}\left[\ln\left(\frac{m}{\Delta}\right) + \frac{41}{42} - C - \mathrm{Re}\,\psi(1+iZ\alpha)\right],$$
$$M_{+-} = i\frac{4\alpha(Z\alpha)^2\omega(\mathbf{e\Delta})^2}{9m^2\Delta^2}. \qquad (18)$$

При получении асимптотики при $\Delta \gg m$ удобно исходить из (12). Основной вклад в интеграл дает область $1-t \sim m^2/\Delta^2 \ll 1$. Взяв в (12) в этом приближении интеграл по t, имеем

$$\left\{ \begin{array}{c} M_{++} \\ M_{+-} \end{array} \right\} = \frac{\alpha(Z\alpha)\omega}{\pi\Delta^2}\int\limits_{-1}^1 ds \int \frac{d\mathbf{q}}{(\mathbf{q}+s\mathbf{\Delta})^2}\left(\frac{q_+}{q_-}\right)^{2iZ\alpha} \times$$
$$\times \left(\frac{\mathbf{q}_+}{q_+^2} - \frac{\mathbf{q}_-}{q_-^2}\right) \left\{ \begin{array}{c} -(1+s^2)(\mathbf{q}+s\mathbf{\Delta}) \\ 2(1-s^2)(\mathbf{e}, \mathbf{q}+s\mathbf{\Delta})\mathbf{e} \end{array} \right\}. \qquad (19)$$

Используя тождество (13), берем элементарные интегралы по $\mathbf{q}$, а затем и по s. После этого делаем замену переменных $y = \mathrm{th}\,\tau$ и при $\Delta \gg m$ получаем

$$M_{++} = i\frac{4\alpha(Z\alpha)\omega}{3\Delta^2}\int\limits_0^\infty d\tau\, \sin(2Z\alpha\tau)\left(4 - 3\,\mathrm{th}\,\frac{\tau}{2} - \mathrm{th}^3\,\frac{\tau}{2}\right) =$$
$$= i\frac{8\alpha\omega}{3\Delta^2}\left\{1 - \frac{2\pi Z\alpha}{\mathrm{sh}(2\pi Z\alpha)}[1-(Z\alpha)^2]\right\},$$
$$M_{+-} = i\frac{16\alpha(Z\alpha)\omega(\mathbf{e\Delta})^2}{\Delta^4}\int\limits_0^\infty \frac{d\tau\,\sin(2Z\alpha\tau)}{\mathrm{sh}^2\,\tau}(\tau\,\mathrm{cth}\,\tau - 1) =$$
$$= i\frac{16\alpha(Z\alpha)^2\omega(\mathbf{e\Delta})^2}{\Delta^4}\left[1 - Z\alpha\,\mathrm{Im}\,\psi'(1-iZ\alpha)\right]. \qquad (20)$$

Асимптотики (18) и (20) совпадают с результатами работ [6, 8]. Мы также проверили, что численные значения амплитуд (16), как и должно быть, совпадают с результатами работ [6–8] при произвольных передачах импульса и параметрах $Z\alpha$.

Выражение для амплитуд (16) представляет собой двукратный интеграл и является существенно более простым, чем полученные ранее [6–8] результаты, в которых кратность интегралов выше. Поэтому формулы (16) очень удобны для табулирования. Таким образом, в этой работе на примере вычисления амплитуд дельбрюковского рассеяния продемонстрировано, что техника вычислений, развитая нами при решении задачи о расщеплении фотона, может быть успешно применена при решении разнообразных задач КЭД в кулоновском поле при высоких энергиях.

Литература

1. L. Meitner, H. Kösters (and M. Delbrück), Z. Phys. **84**, 137 (1933).
2. A. I. Milstein and M. Schumacher, Phys. Rep. **243**, 183 (1994).
3. Sh. Zh. Akhmadaliev, G. Ya. Kezerashvili, S. G. Klimenko et al., Phys. Rev. C **58**, 2844 (1998).
4. M. Cheng and T. T. Wu, Phys. Rev. **182**, 1873 (1969).
5. M. Cheng and T. T. Wu, Phys. Rev. D **2**, 2444 (1970).
6. M. Cheng and T. T. Wu, Phys. Rev. D **5**, 3077 (1972).
7. A. I. Milstein and V. M. Strakhovenko, Phys. Lett. A **95**, 135 (1983).
8. А. И. Мильштейн, В. М. Страховенко, ЖЭТФ **85**, 14 (1983).
9. R. N. Lee and A. I. Milstein, Phys. Lett. A **198**, 217 (1995).
10. Р. Н. Ли, А. И. Мильштейн, ЖЭТФ **107**, 1393 (1995).
11. Sh. Zh. Akhmadaliev, G. Ya. Kezerashvili, S. G. Klimenko et al., in *Proceedings of the Interational Conference PHOTON'97*, Egmond-aan Zee, the Netherlands, ed. by A. Buijs and F. C. Erne, World Scientific, Singapore (1997), p. 246.
12. Р. Н. Ли, А. И. Мильштейн, В. М. Страховенко, ЖЭТФ **112**, 1921 (1997).
13. R. N. Lee, A. I. Milstein, and V. M. Strakhovenko, Phys. Rev. A **57**, 2325 (1998).
14. R. N. Lee, A. I. Milstein, and V. M. Strakhovenko, Phys. Rev. A **58**, 1757 (1998).