

## СИЛЬНОЕ ТЕПЛОВОЕ САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА В ГАЗАХ И ЖИДКОСТЯХ

*А. Н. Кучеров\**

*Центральный аэрогидродинамический институт им. Н. Е. Жуковского  
140160, Жуковский, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 28 января 1999 г.

Получены решения, приближенно описывающие эффект сильного теплового самовоздействия лазерного пучка в слабопоглощающих нелинейных средах — газах и жидкостях. Рассмотрены теплопроводный режим, поперечный обдув с дозвуковой и сверхзвуковой скоростями, трансзвуковой нелинейный режим, гравитационная конвекция в горизонтальном пучке. В предположении постоянства формы поперечного распределения интенсивности и справедливости аппроксимации волнового фронта полиномом второй степени получены обыкновенные дифференциальные уравнения и решения для средних поперечных размеров пучка. Показано, что приближенные решения удовлетворительно соответствуют точным.

PACS: 47.90.+a; 42.65.Jx; 42.68.Ay

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Распространение интенсивного лазерного пучка в нелинейных поглощающих средах (газах и жидкостях) описывается системой совместных уравнений аэрогидродинамики Навье–Стокса и параболизированного уравнения волновой оптики [1, 2] — нелинейного уравнения Френеля или Шредингера. Задачи аэрооптики возникают на трассах в лаборатории, в атмосфере, в технологических лазерных установках. В оптической части возможны варианты: горизонтальный, вертикальный, сфокусированный, параллельный, расходящийся пучки; трасса с зеркалами, линзами, телескопами и другими устройствами. В газодинамической части проблемы интересны и важны следующие ситуации и эффекты: обдув однородным продольным и поперечным относительно пучка потоками; влияние теплопроводности, вязкости, акустических возмущений (давления); дозвуковой, трансзвуковой, сверхзвуковой и гиперзвуковой режимы; гравитационная конвекция. Теоретическое и экспериментальное исследования многообразия вариантов являются трудоемкими. В случае сильного теплового самовоздействия численное решение в пределе геометрической оптики невозможно из-за больших локальных градиентов.

В случае малых возмущений пучка вследствие нагрева и изменения показателя преломления среды важную роль сыграло линеаризованное решение Гебхардта–Смита уравнений оптики [3] (см. также [4, 5]), полученное для поперечного обдува параллельного пучка без учета вязкости, теплопроводности и акустических возмущений в среде

---

\*E-mail: ank@dept.aerocentr.msk.su

в пределе геометрической оптики. С применением этого решения сформулированы газодинамические режимы эффекта тепловой саморефракции в однородном перпендикулярном пучке потоке газа [6]. Путем обобщения преобразования Таланова [7] поперечных координат для сфокусированных пучков на случай переменного по трассе заданного в вакууме радиуса пучка и использования преобразований подобия в уравнениях газодинамики получены линеаризованные решения уравнений аэрооптики на сложных трассах в различных газодинамических ситуациях [8].

При сильном тепловом самовоздействии в экспериментах [9–11] и численных расчетах [12–15] замечена квазистабильзация (или насыщение) возмущений: пика интенсивности, его смещения, формы поперечного распределения интенсивности. Использование усредненных характеристик (поперечных размеров и углов отклонения, связанных со сглаженным волновым фронтом) и теории размерностей позволило получить приближенные решения в случае чисто конвективного поперечного обдува и в случае гравитационной конвекции в горизонтальном пучке [16]. Аппроксимация фазы волнового фронта пучка при больших числах Френеля полиномом позволила связать средние характеристики с коэффициентами этого полинома и вывести обыкновенные дифференциальные уравнения для средних радиусов и смещений в простейшем чисто конвективном режиме поперечного обдува [17].

В настоящей работе выведены уравнения и получены решения для средних радиусов и смещений при поперечном обдуве пучка со скоростью от нуля до больших по сравнению со скоростью звука, включая трансзвуковой режим, для случая гравитационной конвекции в горизонтальном пучке, а также в покоящейся теплопроводной среде, обобщены и сформулированы предположения и допущения.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ АЭРООПТИКИ

Распространение интенсивного лазерного пучка в нелинейной среде описывается параболизированным волновым уравнением параксиальной (малоугловой) оптики для поперечной компоненты медленно меняющейся амплитуды электрического поля  $E$  [2]. В физических переменных «интенсивность излучения  $I = E^*E$  — угол отклонения  $\vartheta = \nabla_{\perp} \Phi$ » (где  $\Phi$  — фаза волнового фронта пучка,  $\nabla_{\perp} = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y}$ ) получим систему уравнений эйконала и сохранения энергии:

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + \vartheta \nabla_{\perp} \right) \vartheta = N \nabla_{\perp} \rho_1 + \frac{1}{2F^2} \nabla_{\perp} \left\{ \frac{1}{\sqrt{I}} \nabla_{\perp}^2 \sqrt{I} \right\}, \quad (1)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + \vartheta \nabla_{\perp} \right) \ln I + \nabla_{\perp} \vartheta = -N_{\alpha}. \quad (2)$$

Координата  $z$  отнесена к длине трассы  $L$ , поперечные координаты  $x, y$  — к характерному (начальному) радиусу пучка  $r_0$ , угол  $\vartheta$  — к  $r_0/L$ , интенсивность  $I$  — к  $I_0 = P_0/\pi r_0^2$ , где  $P_0$  — полная начальная мощность пучка. Оптическими параметрами подобия являются следующие: число Френеля  $F = 2\pi r_0^2/\lambda L$ , где  $\lambda$  — длина волны излучения; параметр ослабления (поглощения) излучения  $N_{\alpha} = \alpha L$ , где  $\alpha$  — коэффициент поглощения излучения средой; параметр самовоздействия  $N = (L/z_T)^2$ , где  $z_T = r_0/\sqrt{Q(T_0/n_0)(\partial n/\partial T)}$  — длина теплового самовоздействия,  $Q =$

$\alpha P_0 \tau / (\pi r_0^2 \rho_0 C_p T_0)$  — масштаб возмущения температуры и плотности среды,  $\rho_0$ ,  $T_0$ ,  $C_p$  и  $n_0$  — соответственно плотность, температура, теплоемкость при постоянном давлении и показатель преломления в невозмущенной среде,  $\tau$  — время установления процесса нагрева среды. Предполагается линейная связь изменений показателя преломления с изменениями плотности (температуры) среды:

$$\Delta n = \frac{\partial n}{\partial T} \Delta T, \quad \frac{\Delta T}{T_0} = Q T_1 \quad (3a)$$

в случае жидкости и

$$\Delta n = \frac{\partial n}{\partial \rho} \Delta \rho, \quad \frac{\Delta \rho}{\rho_0} = Q \rho_1, \quad n = 1 + \gamma \frac{\rho}{\rho_s} = n_0 + (n_0 - 1) \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \quad (3b)$$

в случае газа, где  $\gamma$  — постоянная Гладстона–Дейла,  $\rho_s$  — плотность при стандартных условиях. В частности, для воздуха  $\rho_s = 1.225 \text{ кг/м}^3$ , а в видимом и инфракрасном диапазонах длин волн имеем  $\gamma = 2.9 \cdot 10^{-4}$ . Функции возмущения плотности  $\rho_1$  и температуры  $T_1$  находятся из уравнений сохранения массы, количества движения, энергии и уравнения состояния среды:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (4)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \operatorname{Eu} \nabla p = - \frac{\mathbf{e}_y}{\operatorname{Fr}} (1 + Q \rho_1) + \frac{1}{\operatorname{Re}} \Delta' \mathbf{V} + \dots, \quad (5)$$

$$\frac{dT_1}{dt} + \frac{\kappa}{(\kappa - 1)Q} \frac{dp}{dt} = I(x, y, z, t) + \frac{1}{\operatorname{Pe}} \Delta' T_1 + \dots, \quad (6)$$

$$p = \rho T, \quad (7)$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla, \quad \Delta' = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{r_0}{L}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\operatorname{Re} = \frac{r_0^2}{\nu \tau}, \quad \operatorname{Pe} = \frac{r_0^2}{\chi \tau}, \quad \operatorname{Pr} = \frac{\nu}{\chi}, \quad \operatorname{Fr} = \frac{V_L^2}{Lg\beta T_0}, \quad \operatorname{Eu} = \frac{p_0}{\rho_0 V_L^2},$$

$\mathbf{V}$  — скорость среды,  $\nu$ ,  $\chi$ ,  $\beta$  и  $\kappa$  — соответственно коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности, теплового расширения (в газе  $\beta T_0 = -(T_0/\rho_0)(\partial \rho/\partial T) \equiv 1$ ) и постоянная адиабаты;  $g$  — ускорение свободного падения. Плотность  $\rho$ , температура  $T$ , давление  $p$  отнесены к постоянным начальным значениям  $\rho_0$ ,  $T_0$ ,  $p_0$ . Рассмотрим следующие ситуации: неподвижная среда — теплоотвод за счет квазистационарной теплопроводности; поперечный обдув с постоянной скоростью  $u_0$  вдоль оси  $x$ ,  $\tau = r_0/u_0$ ; установившаяся гравитационная конвекция в горизонтальном пучке вдоль оси  $y$  с характерной скоростью  $V_L = v_g = (\alpha P_0 g / \pi \rho_0 C_p T_0)^{1/3}$ ,  $\tau = r_0/v_g$ . В случае гравитационной конвекции приравнивание величины  $Q$  числу Фруда  $\operatorname{Fr}$  дает масштабы скорости  $v_g$  и возмущения плотности (температуры):

$$Q_g = (\alpha P_0 / \pi r_0^2 \rho_0 C_p T_0)^{2/3} \left(\frac{r_0}{g}\right)^{1/3}.$$

Масштабы газодинамических параметров подобия (больше, меньше или порядка единицы) — числа Эйлера  $Eu$  ( $Eu = 1/\kappa M^2$  в газах, где  $M = u_0/c$  — число Маха,  $c = \sqrt{\kappa p_0/\rho_0}$  — скорость звука в газе), числа Рейнольдса  $Re$  и числа Пекле  $Pe$  — зависят от конкретной ситуации и задают газодинамический режим самовоздействия. Число Прандтля  $Pr = Pe/Re$ .

### 3. ОСНОВНЫЕ ИДЕИ ПРИБЛИЖЕННОГО МЕТОДА

Слабое самовоздействие имеем при  $N \ll 1$  в пучках близких к параллельным и в расходящихся. Сильное самовоздействие будем иметь при  $N \geq 1$ , а также в сфокусированных пучках при слабой или существенной нелинейности среды. Приближенное описание сильного самовоздействия опирается на следующие основные идеи.

1. Введем средние поперечные размеры (радиусы)  $a_x, a_y$  и смещения  $x_c, y_c$  центра тяжести распределения интенсивности, зависящие только от продольной координаты  $z$ :

$$a_x(z) = \sqrt{\iint_{-\infty}^{\infty} (x - x_c)^2 q dx dy}, \quad x_c(z) = \iint_{-\infty}^{\infty} x q dx dy, \quad (8)$$

$$a_y(z) = \sqrt{\iint_{-\infty}^{\infty} (y - y_c)^2 q dx dy}, \quad y_c(z) = \iint_{-\infty}^{\infty} y q dx dy, \quad (9)$$

где

$$q(x, y, z) = I(x, y, z)/W, \quad W(z) = \iint_{-\infty}^{\infty} I dx dy.$$

Мощность  $W$  для простоты примем постоянной вдоль трассы:  $N_\alpha \ll 1$ . Рассмотрим двумерный (плоский) и трехмерный пучки, в частности осесимметричный, в котором смещения нет. Средний радиус в осесимметричном пучке введем по формуле

$$a(z) = \sqrt{2\pi \int_0^{\infty} r^2 q(r, z) r dr}, \quad W(z) = 2\pi \int_0^{\infty} I r dr. \quad (10)$$

2. Удобно ввести смещенные и сжатые (растянутые) поперечные координаты:

$$\xi = \frac{x - x_c(z)}{a_x(z)}, \quad \eta = \frac{y - y_c(z)}{a_y(z)}. \quad (11)$$

3. В экспериментах [3, 9–11] и в численных расчетах для конвективного [3], сверхзвукового [12] и других [13–15] газодинамических режимов наблюдается насыщение возмущений с ростом  $N$  и  $z$ : стабилизация отклонения от первоначального направления, установление величины пика и формы поперечного распределения интенсивности

$f(\xi, \eta)$ . Увеличение параметра теплового самовоздействия  $N$  эквивалентно увеличению квадрата координаты  $z$ . В однородном потоке газа возможно сохранение постоянными с некоторой погрешностью перечисленных характеристик на протяженных участках трассы, соизмеримых с ее полной длиной  $L$  и с длиной теплового самовоздействия  $z_T$  [12]. Аналогичная квазистабильзация возмущений наблюдается в случае гравитационной конвекции, вызванной нагревом среды в вертикальном [10, 14, 15] и горизонтальном [11, 13] лазерных пучках. Примем, что форма поперечного распределения интенсивности  $f(\xi, \eta)$  вдоль трассы постоянна, а концентрация излучения меняется за счет изменения средних радиусов:

$$I(x, y, z) = \frac{f(\xi, \eta)}{a_x(z)a_y(z)} \quad \text{или} \quad I(r, z) = \frac{f(\xi)}{a^{1+k}(z)}, \quad \xi = \frac{r - x_c^{1-k}(z)}{a(z)}, \quad (12)$$

где  $k = 0$  или  $k = 1$  в плоском или осесимметричном пучке соответственно.

4. В условиях насыщения эффекта теплового самовоздействия аппроксимируем в общем случае фазу волнового фронта  $\Phi$  полиномом второй степени [17]:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) = c_0 + [x - x_c(z)]c_{1x} + [y - y_c(z)]c_{1y} + (x - x_c)^2 \frac{c_{2x}}{2} + \\ + (y - y_c)^2 \frac{c_{2y}}{2} + (x - x_c)(y - y_c)c_{xy} + \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$c_{1x}(z) = \frac{dx_c}{dz}, \quad c_{1y}(z) = \frac{dy_c}{dz}, \quad c_{2x}(z) = \frac{1}{a_x(z)} \frac{da_x}{dz}, \quad c_{2y}(z) = \frac{1}{a_y(z)} \frac{da_y}{dz}, \quad c_{xy} = 0.$$

Для случая осесимметричного пучка имеем

$$\Phi(r, z) = c_0 + r^2 \frac{c_2}{2} + \dots, \quad c_1 = 0,$$

а для плоского пучка —

$$\Phi(x, z) = c_0 + [x - x_c(z)]c_1 + (x - x_c)^2 \frac{c_2}{2} + \dots$$

Предполагается, что в трехмерном случае по одной из координат,  $x$  или  $y$ , есть симметрия, при этом перекрестный коэффициент равен нулю,  $c_{xy} = 0$ .

5. Применяя к уравнениям среды (4)–(7) преобразование координат (11) и преобразование подобия для главных членов возмущения газодинамических величин вида (14)

$$\begin{aligned} \rho_1(x, y, z) = R(\xi, \eta)A(z), \quad T_1 = T(\xi, \eta)B(z), \quad p_1 = P(\xi, \eta)C(z), \\ u_1(x, y, z) = U(\xi, \eta)D(z), \quad v_1 = V(\xi, \eta)E(z), \quad w_1 = W(\xi, \eta)F(z), \end{aligned} \quad (14)$$

получим связи функций  $A, B, C, D, E, F$  со средними радиусами. Для величин  $R, P, T, U, V, W$  сформулируем автономную задачу, не зависящую от  $z$  в координатах  $\xi, \eta$ . Например, для функции  $\rho_1$  ниже получим зависимости вида

$$\rho_1(x, y, z) = \frac{R(\xi, \eta)}{a_x^m a_y^n(z)}. \quad (15)$$

6. Подставим в левую часть уравнения эйконала (1) аппроксимацию угла  $\vartheta$  полиномом (13), а в правую часть — функцию  $\rho_1$  в виде (14) или (15). Проинтегрируем (1) с весом  $q(x, y, z) = I/W$  поперек пучка. С учетом уравнения сохранения энергии (2), в котором интенсивность представлена в виде (12), получим уравнения для смещений  $x_c, y_c$ . Вычислив дивергенцию от каждого члена уравнения (1) и повторив интегрирование с весом  $q$ , получим обыкновенные дифференциальные либо интегродифференциальные уравнения для средних радиусов  $a_x, a_y$  (и для функции  $A(z)$  в общем случае). Поправку на дифракционные эффекты порядка обратного квадрата числа Френеля опустим на первом этапе, чтобы не загромождать изложение. Вблизи фокуса дифракционный член становится главным, и его необходимо учитывать.

Ниже продемонстрируем сформулированный приближенный метод описания самовоздействия лазерного пучка на широком классе задач аэрооптики.

#### 4. КВАЗИУСТАНОВИВШАЯСЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

В неподвижной среде с теплопроводностью, преобладающей над другими механизмами передачи возмущений  $Pe \ll 1$  (а также при поперечном обдуве однородным потоком с малой скоростью  $V_L < \chi/r_0$ ), можно пренебречь левой частью уравнения (6) в квазистационарном пределе  $t \gg r_0^2/\chi$ . В масштабе характерного времени  $\tau = r_0^2/\chi$  число Пекле  $Pe = 1$ . Возмущения давления меньше  $Q$ , акустическими возмущениями можно пренебречь:  $p \approx \text{const}$ . Возмущения плотности и температуры порядка  $Q$  и, как это следует из уравнения состояния (7), различаются только знаком:  $\rho_1 = -T_1$ . Уравнение теплопроводности (6) принимает вид

$$\frac{1}{a^2(z)\xi^k} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi^k \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} = \frac{f(\xi)}{a^{1+k}(z)}, \quad \rho_1 = a^{1-k}(z)R(\xi), \tag{16}$$

где  $k = 0$  и  $1$  соответственно для плоского и осесимметричного случаев. Процедура из п. 3.6 дает

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_c}{dz^2} &= \frac{b_c}{a^k}, & x_c(0) &= x_{c1}, & \frac{dx_c(0)}{dz} &= \theta_{c1}, \\ \frac{d^2 a}{dz^2} &= \frac{b}{a^k(z)}, & a(0) &= a_1, & \frac{da(0)}{dz} &= \theta_1, \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$b_c = \begin{cases} N \left[ \frac{dR(+\infty)}{d\xi} - \frac{W}{2} \right], & k = 0, \\ 0, & k = 1, \end{cases} \quad b = \frac{N}{W} \int_{\xi_0}^{\infty} f^2(\xi)(\pi\xi)^k d\xi > 0,$$

$a_1, x_{c1}, \theta_1, \theta_{c1}$  — начальные (при  $z = z_0 = 0$ ) значения соответственно среднего радиуса, смещения центра тяжести распределения интенсивности, угла расширения пучка и скорости изменения отклонения центра тяжести распределения интенсивности от оси;  $\xi_0 = -\infty, 0$  при  $k = 0, 1$ .

Для плоского пучка ( $k = 0$ ) решение тривиально:

$$a(z) = a_1 + z\theta_1 + \frac{z^2}{2}b, \quad x_c = x_{c1} + z\theta_{c1} + \frac{z^2}{2}b_c. \tag{18}$$

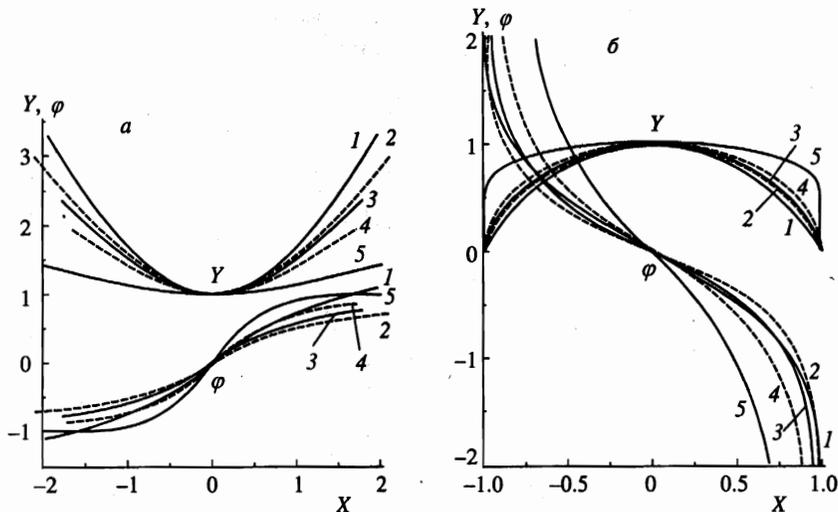


Рис. 1. Нормированное универсальное решение, средние радиусы  $Y$  и углы отклонения  $\varphi = \text{const} \cdot dY/dX$  как функции нормированной продольной по лучу координаты  $X$  в случаях дефокусировки (а) и самофокусировки (б). Показатель степени в уравнении (26) равен  $m = 1$  (кривые 1);  $5/3$  (2);  $2$  (3);  $3$  (4);  $15$  (5)

Для осесимметричного пучка ( $k = 1$ ) универсальное решение более общего уравнения

$$\frac{d^2 a}{dz^2} = \pm \frac{b}{a(z)}$$

в новых независимых переменных  $\varphi, Y$  и  $X$ :

$$\varphi = \frac{\theta}{\sqrt{2b}}, \quad Y = \frac{a}{a_1} \exp(\pm \varphi_1^2), \quad X = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{z \exp(\pm \varphi_1^2)}{a_1} \sqrt{\frac{b}{2}} \pm \int_0^{\varphi_1} \exp(\pm t^2) dt \right],$$

можно записать в виде

$$Y = \exp(\pm \varphi^2), \quad X = \pm \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varphi} \exp(\pm t^2) dt. \tag{19}$$

Нормировки радиуса  $Y$  и угла  $\varphi$  выбраны таким образом, чтобы в решение не входили постоянные  $a_1, \theta_1, b$  и чтобы фокусы располагались при  $X = \pm 1$ . Решение (19) приведено на рис. 1 (кривые 1). Заметим, что строго стационарный теплопроводный режим невозможен как в плоском, так и в осесимметричном случаях.

### 5. ПОПЕРЕЧНЫЙ ОБДУВ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ПУЧКА

Рассмотрим однородный поток с постоянной скоростью  $V_L = u_0 \gg \chi/r_0, \nu/r_0$ , направленной вдоль оси  $x$ . Вязкостью и теплопроводностью можно пренебречь, так как

Re, Pe  $\gg$  1. Характерное время равно  $\tau = r_0/u_0$ . Линеаризация уравнений среды (4)–(7) приводит к следующему уравнению для главного члена возмущений плотности  $\rho_1$ :

$$\left[ M^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \nabla_{\perp}^2 \right] \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \rho_1 = \nabla_{\perp}^2 I. \quad (20)$$

В стационарном пределе  $t \gg \tau$  для плоского пучка это уравнение и его решение имеют вид

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} = \frac{f(\xi)}{M^2 - 1}, \quad \rho_1 = \frac{1}{M^2 - 1} \int_{-\infty}^{\xi} f(\xi_1) d\xi_1 \equiv R(\xi). \quad (21)$$

Для смещения  $x_c$  и среднего радиуса  $a(z)$  из уравнения эйконала (1) находим

$$\frac{d^2 x_c}{dz^2} = \frac{b_c}{a(z)}, \quad b_c = \frac{N}{W(M^2 - 1)} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\xi) d\xi, \quad x_c(0) = x_{c1}, \quad \frac{dx_c(0)}{dz} = \theta_{c1},$$

$$\frac{d^2 a}{dz^2} = \frac{b}{a(z)}, \quad b = 0, \quad a(z) = a_1 + z\theta_1, \quad (22)$$

$$x_c(z) = x_{c1} + z\theta_{c1} + \frac{b_c a_1}{\theta_1^2} \left\{ \left( 1 + \frac{\theta_1 z}{a_1} \right) \left[ \ln \left( 1 + \frac{\theta_1 z}{a_1} \right) - 1 \right] + 1 \right\}.$$

При нулевых начальных условиях ( $x_{c1} = 0$ ,  $\theta_{c1} = 0$ ) в дозвуковом потоке смещение происходит вниз по потоку ( $b_c < 0$ ), в сверхзвуковом — вверх по потоку ( $b_c > 0$ ). Нагретая среда действует как клин или призма, отклоняет пучок, не расширяя его, если он был параллельным,  $\theta_1 = 0$ .

В случае трехмерного пучка в стационарном конвективном режиме, который реализуется при малых числах Маха  $M^2 \ll 1$ , получим следующие решения для функции возмущения плотности:

$$\rho_1 = \frac{R(\xi, \eta)}{a_y(z)}, \quad R(\xi, \eta) = - \int_{-\infty}^{\xi} f(\xi_1, \eta) d\xi_1,$$

и соответствующие уравнения для  $x_c$ ,  $a_x$ ,  $a_y$  (величина  $y_c = 0$ ):

$$\frac{d^2 x_c}{dz^2} = \frac{b_c}{a_x a_y(z)},$$

$$\frac{d^2 a_x}{dz^2} = \frac{b_x}{a_x a_y(z)}, \quad a_x(z) = a_{x1} + z\theta_{x1}, \quad (23)$$

$$\frac{d^2 a_y}{dz^2} = \frac{b_y}{a_y^2(z)}, \quad a_y(0) = a_{y1}, \quad \frac{da_y(0)}{dz} = \theta_{y1}, \quad (24)$$

где

$$b_c = -\frac{N}{W} \iint_{-\infty}^{\infty} f^2(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad b_x = 0,$$

$$b_y = -\frac{N}{W} \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} d\xi_1 d\xi d\eta > 0.$$

Уравнение (24) есть уравнение свободного падения [18, п. 6.188]. При нулевых начальных условиях ( $x_c = 0, \theta_c = 0, \theta_{x1} = 0, \theta_{y1} = 0$ ) пучок отклоняется навстречу потоку, сохраняет размер в продольном по потоку направлении и расширяется в поперечном направлении. Универсальное решение уравнения (24) для поперечного относительно потока среднего радиуса  $a_y$  и угла  $\theta_y$  (включаем случай самофокусировки, знак «-»,  $b_y \rightarrow \pm|b_y| \equiv \pm b$ ) в новых переменных

$$\varphi = \frac{\theta_y}{\sqrt{C_1}}, \quad C_1 = \left| \theta_{y1}^2 \pm \frac{2b}{a_{y1}} \right|, \quad Y = a_y \frac{C_1}{2b},$$

$$X = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{z C_1^{3/2}}{2b} \pm \frac{\varphi_1}{1 \mp \varphi_1^2} + \left\{ \begin{array}{l} \text{arth } \varphi_1 \\ -\text{arctg } \varphi_1 \end{array} \right\} \right], \quad \varphi_1 = \frac{\theta_{y1}}{\sqrt{C_1}}$$

имеет вид [16]

$$Y = \frac{1}{1 \mp \varphi^2}, \quad X = \frac{2}{\pi} \left[ \pm \frac{\varphi}{1 \mp \varphi^2} + \left\{ \begin{array}{l} \text{arth } \varphi \\ -\text{arctg } \varphi \end{array} \right\} \right]. \quad (25)$$

В потоке, движущемся со скоростью порядка скорости звука,  $M > 1, M < 1$  (трансзвуковой поток рассмотрим отдельно) существенны акустические возмущения давления. Преобразование подобия типа (14) возможно только при дополнительном условии  $a_y = \text{const} \cdot a_x$ , которое в общем случае несправедливо, так как нарушается при  $M^2 \rightarrow 0$  (см. (23), (24)). В частных случаях, когда оно справедливо, решение для  $a_x(z)$  аналогично (25).

## 6. ОБЩИЙ ВИД ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СРЕДНИХ РАДИУСОВ

Рассмотренные примеры показывают, что средние радиусы (или один из них, максимальный, поперечный к потоку) описываются уравнениями типа

$$\frac{d^2 a}{dz^2} = \pm \frac{b}{a^m(z)}, \quad b > 0, \quad m > 0, \quad (26)$$

$$a(0) = a_1, \quad \theta(0) = \frac{da}{dz} = \theta_1.$$

Показатель степени  $m$  и вид преобразования подобия искомых функций и независимой продольной по пучку координаты, исключаяющие из универсального решения параметры подобия  $a_1, \theta_1, b$  (см. (19), (25)), зависят от конкретного газодинамического

режима. Знак «+» соответствует дефокусирующей среде ( $d\theta/dz > 0$ , угол расширения нарастает), знак «-» — фокусирующей среде ( $d\theta/dz < 0$ , угол убывает). Напомним, что начальные величины — средний радиус  $a_1$  и угол  $\theta_1$  отнесены к характерным значениям  $r_0$  и  $r_0/L$ . Пусть  $m > 1$  (варианты  $m = 0, 1$  рассмотрены выше). Умножив (26) на  $2da/dz$ , получим первый интеграл

$$\theta^2 \equiv \left(\frac{da}{dz}\right)^2 = \frac{\pm 2b}{(-m+1)a^{m-1}} + C_1, \quad C_1 = \theta_1^2 \mp \frac{2b}{(-m+1)a_1^{m-1}}. \quad (27)$$

Из уравнений (27) и (26) находим

$$a(z) = \left[ \frac{\pm 2b}{(m-1)(C_1 - \theta^2)} \right]^{1/(m-1)}, \quad a(z) = \left( \frac{\pm b}{d\theta/dz} \right)^{1/m}. \quad (28)$$

Явные зависимости получаются, как увидим далее, только в частном случае  $m = 3$  и в пределе больших значений  $m \gg 1$ . Неявные связи можно получить в виде  $z(a)$ ,  $\theta(a)$ , но удобнее вид  $z(\theta)$ ,  $a(\theta)$ , в частности из-за того что знак производной  $d\theta/dz$  в уравнении первого порядка во всем пространстве  $-\infty < z < \infty$  остается постоянным как в случае дефокусировки, так и в случае фокусировки. Используя (28), из уравнения (27) получим

$$\left[ \frac{\pm 2b}{(m-1)(C_1 - \theta^2)} \right]^{m/(m-1)} d\theta = \pm b dz. \quad (29)$$

Выше, в разд. 4 и 5, приведены решения уравнения (26) при  $m = 0, 1, 2$ , см. выражения (18), (19), (25). В нелинейной оптике часто используют в качестве примера вариант кубичной по полю  $E$  нелинейности, при этом нелинейная добавка к диэлектрической проницаемости среды (функция  $\rho_1$  в (1)) пропорциональна интенсивности  $I$ , см. [19, с. 280]. Предположим квазиустановление формы поперечного распределения интенсивности и применим процедуру из п. 3.6. к уравнению эйконала, в котором примем

$$\rho_1 = \text{const} \cdot I(r, z) = \frac{f(\xi)}{a^{1+k}(z)}, \quad \xi = \frac{r - x_c^{1-k}(z)}{a(z)}. \quad (30)$$

Для плоского пучка ( $k = 0$ ) постоянная  $b_c = 0$ , смещение отсутствует при нулевых начальных условиях ( $x_{c1} = 0, \theta_{c1} = 0$ ). Средний радиус описывается уравнением (26) с показателем степени  $m = 2$ , решение которого есть (25).

В осесимметричном пучке ( $k = 1$ ) средний радиус  $a(z)$  и угол  $\theta(z)$  описываются уравнением (26) при  $m=3$ . Универсальное решение в переменных  $\varphi, Y, X$ :

$$\varphi = \frac{\theta}{\sqrt{C_1}}, \quad C_1 = \left| \theta_1^2 \pm \frac{b}{a_1^2} \right|, \quad Y = a_1 \sqrt{\frac{C_1}{b}}, \quad X = \frac{C_1}{\sqrt{b}} \left[ z \pm \frac{a_1 \theta_1}{C_1} \right],$$

$$b = -\text{const} \cdot \frac{\pi N}{W} \int_0^\infty \xi [f'(\xi)]^2 d\xi,$$

получается из (29) в явном виде:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{1 \mp \varphi^2}} = \sqrt{1 \pm X^2}, \quad \varphi = \frac{\pm X}{\sqrt{1 \pm X^2}}. \quad (31)$$

Аналогичное решение приведено в [19, с. 286] для приосевого приближенного описания пучков, волновые фронты которых в среде с кубической нелинейностью остаются сферическими или цилиндрическими.

В среде с нелинейностью пятого порядка имеем

$$\rho_1 = \text{const} \cdot I^2(r, z) = \frac{f^2(\xi)}{a^{2(1+k)}(z)}. \quad (32)$$

В случае плоского ( $k = 0$ ) пучка  $b_c = 0$ . Смещения нет при нулевых начальных условиях ( $x_{c1} = 0, \theta_{c1} = 0$ ). Для среднего радиуса из (1), следуя процедуре из п. 3.6, получаем уравнение (26) с показателем степени  $m = 3$ , решение которого есть (31).

В случае осесимметричного ( $k = 1$ ) пучка из уравнения эйконала (1) находим для  $a(z)$

$$\frac{d^2 a}{dz^2} = \frac{b}{a^5(z)}, \quad b = \text{const} \cdot \frac{\pi N}{W} \int_0^\infty f \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{d}{d\xi} f^2 \right) d\xi. \quad (33)$$

В случае фокусировки ( $b < 0$ ) универсальное решение в переменных  $\varphi, Y, X$ :

$$\varphi = \frac{\theta}{\sqrt{C_1}}, \quad C_1 = \left| \theta_1^2 - \frac{b}{2a_1^4} \right|, \quad Y = a \left( \frac{2C_1}{b} \right)^{1/4},$$

$$X = \frac{\sqrt{2}}{\beta} \left[ \left( \frac{2^3 C_1^3}{b} \right)^{1/4} z + F \left( \alpha_1, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 2E \left( \alpha_1, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right],$$

имеет вид (приняли  $b = |b|$ )

$$Y = \frac{1}{(1 + \varphi^2)^{1/4}}, \quad X = \frac{\sqrt{2}}{\beta} \left[ F \left( \alpha, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 2E \left( \alpha, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right], \quad (34)$$

где

$$\alpha = \arccos \frac{1}{(1 + \varphi^2)^{1/4}}, \quad \alpha_1 = \arccos \frac{1}{(1 + \varphi^2)^{1/4}},$$

$$\beta = \sqrt{2} \left[ 2E \left( \frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - F \left( \frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] \simeq 1.198,$$

$F(\alpha, k)$  и  $E(\alpha, k)$  — эллиптические интегралы первого и второго рода [20, п. 1.2.79].

## 7. ТРАНСЗВУКОВОЙ УСТАНОВИВШИЙСЯ РЕЖИМ

Особенности течения, качественно отличающие этот нелинейный с точки зрения газодинамики режим от соседних линейных дозвукового и сверхзвукового режимов [21], проявляются при малых значениях трансзвукового параметра подобия  $K = (1 - M^2)/Q^{2/3}$ , таких что  $|K| \ll 0.29$ , как показало строгое численное решение [22]. Этот факт косвенно подтверждают эксперименты [23], выполненные в трансзвуковой

трубе, работающей на смеси воздуха и шестифтористой серы SF<sub>6</sub> с коэффициентом поглощения  $\alpha = 20 \text{ м}^{-1}$ . Луч CO<sub>2</sub>-лазера ( $\lambda = 10.6 \text{ мкм}$ ) имел мощность  $P_0 = 500 \text{ Вт}$ , диаметр  $2r_0 = 1.5 \text{ мм}$ . Параметр  $|K| > 2$ . Ударные волны не обнаружены.

Предлагаемый метод средних радиусов позволяет получить универсальное решение именно при  $|K| \ll 1$ . Рассмотрим трехмерный пучок, симметричный по координате  $y$ . В трансзвуковом потоке акустические возмущения, которые распространяются вверх по потоку, сносятся потоком со скоростью, близкой к скорости звука. Происходит накопление возмущений в области, занятой излучением, увеличение области возмущений в поперечном направлении в  $Q^{-1/3}$  раз и увеличение масштаба возмущений газодинамических параметров, в частности плотности, до  $Q^{2/3}$  [22]. Задача разделяется на внутреннюю в масштабе  $x, y \sim r_0$  и внешнюю в более широкой области  $x \sim r_0, \tilde{y} \sim yQ^{1/3} \sim r_0$ . Решения сращиваются. В масштабе радиуса  $r_0$  возмущения плотности не зависят от поперечной координаты  $y$ . Расширение и смещение пучка вследствие эффекта теплового самовоздействия будет происходить только в продольном по потоку направлении  $x$ . Интенсивность излучения при квазиустановлении формы распределения можно записать в виде

$$I(x, y, z) = \frac{f(\xi, y)}{a(z)}, \quad \xi = \frac{x - x_c(z)}{a(z)}.$$

Найдем вид функциональной зависимости для главного члена возмущения плотности  $\rho_1 = R(\xi)/a^i(z)$ ,  $i = \text{const}$ . Для внутренней задачи имеем следующие разложения искомых величин:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\rho_0} &= 1 + Q^{2/3}\rho_1 + Q\rho_2 + \dots, & \frac{p}{p_0} &= 1 + Q^{2/3}p_1 + Qp_2 + \dots, \\ \frac{u}{u_0} &= 1 + Q^{2/3}u_1 + Qu_2 + \dots, & \frac{v}{v_0} &= Qv_1 + Q^{4/3}v_2 + \dots \end{aligned}$$

Из (4)–(7) в первом приближении получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho_1 + u_1) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi}(\kappa u_1 + p_1) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi}(p_1 - \kappa \rho_1) = 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial y} = 0, \\ \rho_1 = -u_1 = p_1(\xi, z)/\kappa. \end{aligned} \tag{35}$$

Во втором приближении уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho_2 + u_2) = -a(z)\frac{\partial v_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi}\left(u_2 + \frac{p_2}{\kappa}\right) = 0, \\ \frac{\kappa}{a(z)}\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial p_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{p_2}{\kappa} - \rho_2\right) = f(\xi, y), \end{aligned}$$

а их решения —

$$\begin{aligned} v_1(x, y, z) &= \frac{1}{a(z)} \int_0^y f(\xi, y') dy', \\ p_2 = -\kappa u_2 &= -\frac{\kappa}{a(z)} \int_0^y \frac{\partial v_1(\xi, y')}{\partial \xi} dy', \quad \rho_2 = \frac{p_2}{\kappa} - \int_{-\infty}^{\xi} f(\xi', y) d\xi'. \end{aligned} \tag{36}$$

Функция  $p_1$  не зависит от  $y$  и определяется из решения внешней задачи, как и связанные с ней соотношением (35) функции  $\rho_1$  и  $u_1$ . Второе приближение потребовалось, чтобы замкнуть задачу первого приближения.

Для внешней задачи введем сжатую координату:  $\bar{y} = yQ^{1/3}a^j(z)$ ,  $\bar{y} \sim 1$  при  $y \gg 1$ , где  $j$  — некоторое число. Разложения искомых величин в ряд по малому параметру до третьего приближения включительно имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\rho_0} &= 1 + Q^{2/3}\rho_1 + Q\rho_2 + Q^{4/3}\rho_3 \dots, & \frac{p}{p_0} &= 1 + Q^{2/3}p_1 + Qp_2 + Q^{4/3}p_3 \dots, \\ \frac{u}{u_0} &= 1 + Q^{2/3}u_1 + Qu_2 + Q^{4/3}u_3 \dots, & \frac{v}{u_0} &= Q \frac{V_1(\xi, \bar{y})}{a(z)} + Q^{4/3}v_2 + Q^{5/3}v_3 \dots \end{aligned} \quad (37)$$

Мы учли, что функция  $V_1$  при  $\bar{y} \rightarrow 0$  должна сращиваться с решением  $v_1$  внутренней задачи при  $y \rightarrow \infty$ . Подстановка разложений (37) в исходные уравнения газодинамики (4)–(7) дает следующие системы уравнений (до третьего порядка включительно), необходимых для замыкания задачи главного приближения: в первом приближении

$$\rho_1 = -u_1 = \frac{p_1(\xi, \bar{y}, z)}{\kappa}, \quad \frac{\partial V_1}{\partial \xi} + a^{j+2}(z) \frac{\partial \rho_1}{\partial \bar{y}} = 0, \quad (38)$$

во втором —

$$\rho_2 = -u_2 = \frac{p_2(\xi, \bar{y}, z)}{\kappa}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + a^{j+1}(z) \frac{\partial \rho_2}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (39)$$

и в третьем —

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho_3 + u_3) &= 2\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} - a^j(z) \frac{\partial V_1}{\partial \bar{y}}, & \frac{\partial}{\partial \xi}(\kappa u_3 + p_3) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{p_3}{\kappa} - \rho_3 \right) &= (\kappa - 1)\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi}, & \kappa \frac{\partial v_3}{\partial \xi} + a^{j+1}(z) \frac{\partial p_3}{\partial \bar{y}} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что трансзвуковой параметр подобия  $K$  равен нулю. Из первых трех уравнений находим

$$(\kappa + 1)\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} - a^j(z) \frac{\partial V_1}{\partial \bar{y}} = 0. \quad (40)$$

Уравнения (40) и (38) замыкают задачу главного приближения для функций  $\rho_1$  и  $V_1$ . Аффинное преобразование

$$\rho_1(x, y, z) = \frac{R_1(\xi, \eta)}{(\kappa + 1)^{1/3} a^{2/3}}, \quad \eta = (\kappa + 1)^{1/3} \bar{y} \equiv [(\kappa + 1)Q]^{1/3} \frac{y}{a^{4/3}}, \quad j = -\frac{4}{3} \quad (41)$$

приводит задачу первого приближения к универсальному виду, не зависящему от параметров подобия и от продольной по пучку координаты  $z$ :

$$\begin{aligned} R_1 \frac{\partial R_1}{\partial \xi} - \frac{\partial V_1}{\partial \eta} &= 0, & R_1, V_1 \Big|_{\xi \rightarrow -\infty; \eta \rightarrow +\infty} &\rightarrow 0, \\ \frac{\partial R_1}{\partial \eta} + \frac{\partial V_1}{\partial \xi} &= 0, & V_1(\xi, 0) &= \int_0^\infty f(\xi, y) dy. \end{aligned} \quad (42)$$

Газодинамическая задача сводится к решению нелинейного уравнения второго порядка типа уравнения Трикоми [24]. Известны численные методы ее решения [22].

Таким образом, получен важный для оптической части задачи теплового самовоздействия лазерного пучка результат: функция возмущения плотности в масштабе поперечного размера  $r_0$ , согласно (41), имеет вид

$$\rho_1(x, z) = \frac{R(\xi)}{a^{2/3}(z)}, \quad R(\xi) = \frac{R_1(\xi, \eta = 0)}{(\kappa + 1)^{1/3}}. \quad (43)$$

Для первоначально коллимированного пучка нет смещения и расширения в поперечном относительно потока направлении. Из уравнения эйконала (1) получим для смещения  $x_c(z)$  и среднего радиуса  $a(z)$  в продольном по потоку направлении следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_c}{dz^2} &= \frac{b_c}{a^{5/3}(z)}, & x_c(0) &= x_{c1}, & \frac{dx_c(0)}{dz} &= \theta_{c1}, \\ \frac{d^2 a}{dz^2} &= \frac{b}{a^{5/3}(z)}, & a(0) &= a_1, & \frac{da(0)}{dz} &= \theta_1, \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$b_c = \frac{N}{W} \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, y) \frac{dR(\xi)}{d\xi} d\xi dy, \quad b = \frac{N}{W} \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, y) \frac{d^2 R(\xi)}{d\xi^2} d\xi dy.$$

Преобразование подобия и интегрирование уравнения (29) при  $m = 5/3$  в переменных  $\varphi, Y, X, b \rightarrow \pm|b| \rightarrow \pm b$ :

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\theta}{\sqrt{C_1}}, & C_1 &= \left| \theta_1^2 \pm \frac{3b}{a_1^{2/3}} \right|, & Y &= a \left( \frac{C_1}{3b} \right)^{3/2}, \\ X &= \frac{zC_1^2}{2(3b)^{3/2}} \pm \frac{\varphi_1(3 \mp 2\varphi_1^2)}{2(1 \mp \varphi_1^2)^{3/2}}, & \varphi_1 &= \frac{\theta_1}{\sqrt{C_1}}, \end{aligned}$$

дает следующее универсальное решение:

$$Y = \frac{1}{(1 \mp \varphi^2)^{3/2}}, \quad X = \pm \frac{\varphi(3 \mp 2\varphi^2)}{2(1 \mp \varphi^2)^{3/2}}. \quad (45)$$

Смещение  $x_c$  легко получить, подставив в правую часть соответствующего ему уравнения (44) выражение  $b_c a''/b$  и проинтегрировав это уравнение дважды с учетом начальных условий:

$$x_c(z) = \frac{b_c}{b} [a(z) - a_1 - \theta_1 z] + x_{c1} + \theta_{c1} z. \quad (46)$$

Смещение отличается от приращения среднего радиуса на линейную функцию и на постоянный множитель  $b_c/b$ . Этот результат справедлив и для других режимов, в которых  $b_c \neq 0$  и  $b \neq 0$ .

В околосвуковой области при числах Маха  $Q^{2/3} \ll |M^2 - 1| \ll 1$  возмущение плотности описывается линеаризованным уравнением (20), в котором можно пренебречь

градиентами в поперечном относительно потока направлении, т. е. справедливы уравнение и решение (21). Постоянные  $b_x = b_y = 0$ . Средние радиусы изменяются по линейному закону:

$$a_x(z) = a_{x1} + z\theta_{x1}, \quad a_y(z) = a_{y1} + z\theta_{y1}.$$

Смещение  $x_c$  (напомним, что  $y_c = 0$  в силу симметрии  $I(x, y, z) = I(x, -y, z)$ ) в общем случае описывается уравнением

$$\frac{d^2 x_c}{dz^2} = \frac{b_c}{(a_{x1} + z\theta_{x1})(a_{y1} + z\theta_{y1})}, \quad b_c = -\frac{N}{(M^2 - 1)W} \iint_{-\infty}^{\infty} f^2(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

решение которого несложно получить в явном виде. В частном случае, когда  $\theta_{y1} = 0$ , смещение  $x_c$  описывается соответствующим выражением из (22). На практике величина  $b_x \neq 0$ , так как предположение о постоянстве формы распределения интенсивности выполнено с некоторой погрешностью. Для  $a_x$  в этом случае справедливо решение (25).

## 8. РАЗВИТАЯ УСТАНОВИВШАЯСЯ ГРАВИТАЦИОННАЯ КОНВЕКЦИЯ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ПУЧКЕ

Характерной скоростью  $V_L$  является скорость гравитационной конвекции [13, 25, 26]  $V_L = v_g = (\alpha P_0 g / \pi \rho_0 C_p T_0)^{1/3}$ , временем установления — величина  $\tau = r_0 / v_g$ . Вязкость и теплопроводность пренебрежимо малы,  $Re, Re \gg 1$ . Примем, что пучок симметричен в перпендикулярном к вертикали  $y$  направлении:  $I(x, y, z) = I(-x, y, z)$ . Линеаризованные уравнения (4)–(7) для среды имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \quad u, v|_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0, \quad v|_{y \rightarrow -\infty} \rightarrow 0, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p_1}{\partial y} &= -\rho_1, \quad p_1, \rho_1|_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0, \\ u \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + v \frac{\partial \rho_1}{\partial y} &= -\frac{f(\xi, \eta)}{a_x(z)a_y(z)}. \end{aligned} \quad (47)$$

Преобразование подобия

$$u = \left(\frac{a_x}{a_y}\right)^{2/3} U(\xi, \eta), \quad v = \left(\frac{a_y}{a_x}\right)^{1/3} V(\xi, \eta), \quad \rho_1 = \frac{R(\xi, \eta)}{a_x^{2/3} a_y^{1/3}}, \quad p_1 = \left(\frac{a_y}{a_x}\right)^{2/3} P(\xi, \eta)$$

позволяет свести систему к автономному виду, не зависящему от координаты  $z$ :

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0, \quad U \frac{\partial V}{\partial \xi} + V \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial P}{\partial \eta} = -R, \quad U \frac{\partial R}{\partial \xi} + V \frac{\partial R}{\partial \eta} = -f(\xi, \eta).$$

Из уравнений оптики получаем следующую систему для средних радиусов и смещения  $y_c(z)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_x}{dz^2} &= \frac{b_x}{a_x^{5/3} a_y^{1/3}(z)}, & a_x(0) &= a_{x1}, & \frac{da_x(0)}{dz} &= \theta_{x1}, \\ \frac{d^2 a_y}{dz^2} &= \frac{b_y}{a_x^{2/3} a_y^{4/3}(z)}, & a_y(0) &= a_{y1}, & \frac{da_y(0)}{dz} &= \theta_{y1}, \\ \frac{d^2 y_c}{dz^2} &= \frac{b_{cy}}{a_x^{2/3} a_y^{4/3}(z)}, & y_c(0) &= y_{c1}, & \frac{dy_c(0)}{dz} &= \theta_{yc1}, \end{aligned} \quad (48)$$

где

$$\begin{aligned} b_x &= \frac{N}{W} \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} d\xi d\eta, \\ b_y &= \frac{N}{W} \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2} d\xi d\eta, \\ b_{cy} &= \frac{N}{W} \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \frac{\partial R}{\partial \eta} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Для оценок, как правило, достаточно рассмотреть максимальный поперечный радиус  $a = a_x$ . Предположим, что  $a_y = \text{const} \cdot a_x$ . Тогда первое уравнение приводится к виду (29) с показателем степени  $m = 2$ . Решение для среднего радиуса есть (25), для смещения  $y_c(z)$ , с точностью до постоянного множителя, — выражение (46), где  $a = a_x$ :

$$y_c(z) = \text{const} \cdot \frac{b_{cy}}{b_y} [a_x(z) - a_{x1} - \theta_{x1}z] + y_{c1} + \theta_{yc1}z. \quad (49)$$

Таким образом, метод позволяет, не решая уравнения гидродинамики, делать оценки возмущений пучка. Постоянные  $b_x, b_y, b_{cx}, b_{cy}$  и т.д., пропорциональные параметру самовоздействия  $N$ , могут быть определены путем сравнения приближенных решений с экспериментальными данными или с точными численными решениями, полученными однажды для типичных ситуаций, как это сделано по известному алгоритму [13] для модельных трасс для чисто конвективного поперечного обдува в [17] и для режима гравитационной конвекции в горизонтальном пучке в [16]. Для кольцевого пучка с внешним радиусом, в 2.86 раз превышающим радиус отверстия, вычисления дают:  $b_y = 0.540N, b_{cx} = -0.470N$  при обдуве вдоль оси  $x$ ;  $b_x = 0.354N, b_y = 0.159N, b_{cy} = -0.195N$  при гравитационной конвекции вдоль вертикали  $y$ . Для гауссова сфокусированного пучка при конвективном обдуве  $b_y = 0.354N, b_{cy} = -0.289N$ . В других примерах с более сложными трассами числовой множитель, связывающий параметры подобия  $b_x, b_y, b_{cy}$  приближенного метода с параметром самовоздействия  $N$  в строгой постановке, не превышал единицы для максимального среднего радиуса и был вдвое меньше для смещения. Систему обыкновенных дифференциальных уравнений несложно решить для произвольных показателей степени у средних радиусов  $a_x, a_y$ . При наличии аналитического универсального решения оценка возмущений, естественно, упрощается.

Универсальные решения уравнения (26), описывающие самофокусировку и дефокусировку лазерного пучка в нелинейной среде в безабберационном приближении геометрической оптики: средний поперечный размер (радиус)  $a = a_{phys}/r_0$  и соответствующий угол расширения  $\theta = \theta_{phys}/\theta_0 \equiv da/dz$  в зависимости от продольной по пучку координаты  $z = z_{phys}/L$

$m$	Преобразование	Уравнения	Решения	Механизмы теплоотвода; пучок плоский $D = 2$ ; трехмерный $D = 3$
1	$\varphi = \frac{\theta}{\sqrt{2b}} \quad Y = \frac{a}{a_1} \times \exp(\pm\varphi_1^2)$ $X = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{z \exp(\pm\varphi_1^2)}{a_1} \times \sqrt{\frac{b}{2}} \pm \int_0^{\varphi_1} \exp(\pm t^2) dt \right]$	$\frac{dY}{dX} = \sqrt{\pi} \varphi$ $\frac{d\varphi}{dX} = \pm \frac{\sqrt{\pi}}{2} \times \exp(\mp\varphi^2)$	$Y = \exp(\pm\varphi^2)$ $X = \pm \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \int_0^{\varphi} \exp(\pm t^2) dt$	теплопроводность, $D = 3$ , $V_L < \chi/r_0$ , $t \gg r_0^2/\chi$ ; поперечный поток, $D = 2$ ; конвек. $M^2 \ll 1$ ; дозвук. $M < 1$ ; сверхзвук. $M > 1$
5/3	$\varphi = \frac{\theta}{\sqrt{C_1}}$ $C_1 = \left  \theta_1^2 \pm \frac{3b}{a_1^{2/3}} \right $ $Y = a[C_1/3b]^{3/2}$ $X = \frac{zC_1^2}{2(3b)^{3/2}} \pm \frac{\varphi_1(3 \mp 2\varphi_1^2)}{2(1 \mp \varphi_1^2)^{3/2}}$	$\frac{dY}{dX} = 2\varphi$ $\frac{d\varphi}{dX} = \pm \frac{2}{3}(1 \mp \varphi^2)^{5/2}$	$Y = \frac{1}{(1 \mp \varphi^2)^{3/2}}$ $X = \pm \frac{\varphi(3 \mp 2\varphi^2)}{2(1 \mp \varphi^2)^{3/2}}$	поперечный трансзвуковой поток; $D = 3$ ; $ 1 - M^2  \ll Q^{2/3}$
2	$\varphi = \frac{\theta}{\sqrt{C_1}}$ $C_1 = \left  \theta_1^2 \pm \frac{2b}{a_1} \right $ $Y = \frac{aC_1}{2b}$ $X = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{zC_1^{3/2}}{2b} \pm \frac{\varphi_1}{1 \mp \varphi_1^2} + \begin{cases} \text{arth } \varphi_1 \\ - \text{arctg } \varphi_1 \end{cases} \right]$	$\frac{dY}{dX} = \frac{\pi}{2} \varphi$ $\frac{d\varphi}{dX} = \pm \frac{\pi}{4}(1 \mp \varphi^2)^2$	$Y = \frac{1}{1 \mp \varphi^2}$ $X = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\pm \varphi}{1 \mp \varphi^2} + \begin{cases} \text{arth } \varphi \\ - \text{arctg } \varphi \end{cases} \right]$	поперечн. конвектив. поток, $D = 3$ , $M^2 \ll 1$ , дозвуковой, сверхзвуковой, $Q^{2/3} \ll  1 - M^2  \ll 1$ ; гравитац. конвекция в гориз. пучке $D = 3$

Сложную трассу можно разделить на отрезки и оценить на каждом из них возмущения по различным аналитическим решениям в зависимости от механизма теплоотвода.

Продолжение таблицы

m	Преобразование	Уравнения	Решения	Вид (тип) нелинейности; пучок плоский D = 2; трехмерный D = 3
3	$\varphi = \frac{\theta}{\sqrt{C_1}}$ $C_1 = \left  \theta_1^2 \pm \frac{b}{a_1^2} \right $ $Y = a\sqrt{\frac{C_1}{b}}$ $X = z\frac{C_1}{\sqrt{b}} \pm \frac{a_1\theta_1}{\sqrt{b}}$	$\frac{dY}{dX} = \varphi$ $\frac{d\varphi}{dX} = \pm(1 \mp \varphi^2)^{3/2}$	$Y = \frac{1}{\sqrt{1 \mp \varphi^2}} \equiv \sqrt{1 \pm X^2}$ $X = \frac{\pm\varphi}{\sqrt{1 \mp \varphi^2}}$ $\varphi = \frac{\pm X}{\sqrt{1 \pm X^2}}$	<p>кубическая нелинейность, D = 3; нелинейность пятой степени, D = 2</p>
5	<p style="text-align: center;">Фокусирующая среда (знак «-»)</p> $\varphi = \theta/\sqrt{C_1}$ $C_1 = b/2a_1^4 - \theta_1^2$ $Y = a(2C_1/b)^{1/4}$ $X = \frac{\sqrt{2}}{\beta} \left[ \left( \frac{2^3 C_1^3}{b} \right)^{1/4} \times z + F\left(\alpha_1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2E\left(\alpha_1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right]$ $\beta = 1.198$	$\frac{dY}{dX} = \frac{\beta}{2}\varphi$ $\frac{d\varphi}{dX} = -\beta(1 + \varphi^2)^{5/4}$	$Y = (1 + \varphi^2)^{-1/4}$ $X = \frac{\sqrt{2}}{\beta} \times \left[ F\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2E\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right]$ $\alpha = \arccos(1 + \varphi^2)^{-1/4}$	<p>нелинейность пятой степени, D = 3</p>
m ≫ 1	$\varphi = \frac{\theta}{\sqrt{C_1}}$ $Y = a \times \left( \frac{m-1}{2b} C_1 \right)^{1/(m-1)}$ $C_1 = \left  \theta_1^2 \mp \frac{2b}{(m-1)a_1^{m-1}} \right $ $X = \frac{\pi}{2} \times \left[ z \left( \frac{m-1}{2} \right)^{m/(m-1)} \times \left( \frac{C_1}{b} \right)^{1/(m-1)} \sqrt{C_1} + \left\{ \begin{array}{l} \text{arth } \varphi_1 \\ \text{arctg } \varphi_1 \end{array} \right\} \right]$	$\frac{dY}{dX} = \frac{\pi}{m-1} \varphi$ $\frac{d\varphi}{dX} = \pm \frac{\pi}{2} \times (1 \mp \varphi^2)^{m/(m-1)}$	$Y = (1 \mp \varphi^2)^{-1/(m-1)} \approx 1 - \frac{\ln(1 \mp \varphi^2)}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)$ $\varphi = \left\{ \begin{array}{l} \text{th}(\pi X/2) \\ \text{tg}(-\pi X/2) \end{array} \right\} + O\left(\frac{1}{m}\right)$ $X = \frac{2}{\pi} \left\{ \begin{array}{l} \text{arth } \varphi \\ -\text{arctg } \varphi \end{array} \right\} + O\left(\frac{1}{m}\right)$	<p style="text-align: center;">-</p>

9. ПРЕДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ БОЛЬШИХ  $m$ 

Уравнения (28), (29) в переменных  $\varphi$ ,  $Y$ ,  $X$ :

$$\varphi = \frac{\theta}{\sqrt{C_1}}, \quad C_1 = \left| \theta_1^2 \mp \frac{2b}{(-m+1)a_1^{m-1}} \right|, \quad Y = a \left( \frac{m-1}{2b} C_1 \right)^{1/(m-1)},$$

$$X = \frac{\pi}{2} \left[ z \left( \frac{m-1}{2} \right)^{m/(m-1)} \left( \frac{C_1}{b} \right)^{1/(m-1)} \sqrt{C_1} + \begin{cases} \text{arth } \varphi_1 \\ -\text{arctg } \varphi_1 \end{cases} \right],$$

имеют явное асимптотическое аналитическое решение при  $m \gg 1$ :

$$Y = \frac{1}{(1 \mp \varphi^2)^{1/(m-1)}} \approx 1 - \frac{1}{m} \ln(1 \mp \varphi^2) + O\left(\frac{1}{m^2}\right), \quad \varphi = \begin{cases} \text{th}(\pi X/2) \\ \text{tg}(-\pi X/2) \end{cases} + O\left(\frac{1}{m}\right),$$

$$X = \frac{2}{\pi} \begin{cases} \text{arth } \varphi \\ -\text{arctg } \varphi \end{cases} + O\left(\frac{1}{m}\right). \quad (50)$$

Сравним решения (19), (45), (25), (31), (34) и (50), полученные соответственно при  $m = 1, 5/3, 2, 3, 5$  и  $m \gg 1$ . В таблице приведены преобразования подобия, уравнения и решения для всех рассмотренных выше случаев. На рис. 1 приведены графики для  $m = 1, 5/3, 2, 3, 15$  в дефокусирующей и фокусирующей средах. Темп изменения среднего радиуса в дефокусирующих средах и на большей части трассы в фокусирующих средах, исключая участки вблизи фокуса, тем выше, чем меньше показатель степени  $m$  в уравнении второго порядка (26) для среднего радиуса, начиная с  $m = 1$ . Полученные универсальные решения при всех  $m$  охватывают полный набор всевозможных ситуаций в исходной задаче:  $0 \leq b < \infty$ ,  $-\infty < \theta_1 < \infty$ ,  $0 < a_1 < \infty$ . Задав  $z = 0$  (и  $\varphi_1$ ) и вычислив затем  $\varphi_2 = \varphi(z = 1)$ , найдем соответствующий участок на универсальных кривых, описывающий возмущения пучка в физических переменных. Этот участок может не содержать перетяжки или фокуса (в вариантах с дефокусировкой). Пучок может сжиматься и расширяться и в дефокусирующей, и в фокусирующей средах в зависимости от начальных условий.

## 10. СРАВНЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ С ТОЧНЫМ

1. Для иллюстрации предлагаемого метода получено строгое численное решение для плоского коллимированного гауссова пучка в однородном поперечном дозвуковом и сверхзвуковом потоках ( $m = 1$ ;  $D = 2$ ) с начальными условиями

$$I(z = 0, x) = \exp(-x^2), \quad \Phi(z = 0) = \text{const}, \quad \vartheta(z = 0) = 0.$$

Параметры подобия были выбраны следующими: число Френеля  $F \gg 1$ , параметр поглощения  $N_\alpha = 0$ ; параметр теплового самовоздействия  $N = 1$ ; число Маха  $M = 0-0.85, 1.1-2$ . Число узлов расчетной сетки  $N_x = 256, 512, 1024$ ,  $N_z = 200-800$ ; шаги  $\Delta x = 0.01-0.05$ ,  $\Delta z = 0.0025-0.01$ ; размеры  $x_{phys} = (10-20)r_0$ ,  $z_{phys} = 2z_T$ . Результаты представлены на рис. 2-4. Форма профиля возмущенного пучка приближенно сохраняется на отрезке  $z/L = 1.5-2$ . Дальнейшие расчеты затруднительны из-за больших

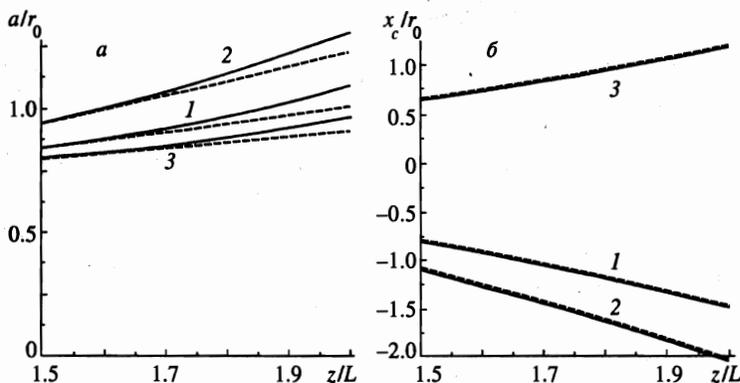


Рис. 2. Сравнение приближенных (штрихи) средних размеров пучка  $a/r_0$  (а) и смещений центра тяжести распределения интенсивности  $x_c/r_0$  (б) с точными значениями (сплошные линии) для гауссова пучка при поперечном обдуве: 1—  $M = 0.01$ ; 2—  $0.5$ ; 3—  $1.5$ . Параметры подобия:  $F \gg 1$ ,  $N_\alpha = 0$ ,  $N = 1$

локальных градиентов в окрестности пика интенсивности. На рис. 2а средний поперечный размер пучка  $a$ , вычисленный по приближенной процедуре (см. решение (22)), сопоставлен с точным, полученным численно. Погрешность не превышает 7%. Величина смещения пучка  $x_c$ , вычисленная приближенно, практически совпадает с точной (см. рис. 2б). Форма профиля интенсивности сохраняется только в окрестности пика, как можно видеть на рис. 3. Поэтому постоянная  $b$  в решении (22) в действительности не равна нулю, и в точном решении зависимость среднего поперечного размера  $a(z)$  незначительно отличается от линейной. На рис. 4а приведены зависимости постоянной  $b_c$  от числа Маха. Вблизи значения  $M = 1$  ни строгое, ни приближенное решения несправедливы. На рис. 4б представлены начальные значения  $a_1(z_0/L = 1.5)$ ,  $x_{c1}(z_0/L = 1.5)$  в зависимости от числа  $M$ . Начальные углы наклона кривых  $a(z)$ ,  $x_c(z)$  к оси  $z$  составляют:  $\theta_1/(r_0/L) = 0.337, 0.344, 0.405, 0.572, 0.956, 1.735, 2.162, 1.123, 0.2175, 0.0465$  и  $\theta_{c1}/(r_0/L) = -1.135, -1.149, -1.280, -1.593, -2.370, -3.957, 4.854, 2.711, 0.8813, 0.3544$  соответственно при  $M = 0.01, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.85, 1.1, 1.2, 1.5, 2.0$ .

2. В качестве второго примера построено строгое численное решение для осесимметричного пучка в квазистационарном теплопроводном режиме ( $m = 1$ ;  $D = 3$ ) и сопоставлено с приближенным решением (19).

На рис. 5а представлены профили интенсивности  $I(r)/I_0$  в момент времени  $t = 7\tau$  в различных сечениях. Профили интенсивности подобны. Относительное изменение среднего радиуса  $a(z)$  за интервал времени  $\tau$  составило 2.47, 1.42, 0.90, 0.63, 0.47% соответственно в моменты  $t = 3\tau, 4\tau, 5\tau, 6\tau, 7\tau$ . Наступило квазиустановление по времени.

На рис. 5б представлены зависимости среднего радиуса  $a(z)/r_0$ , угла отклонения  $\theta/(r_0/L)$  и «константы»  $b$  от расстояния  $z$  вдоль трассы. Отметим слабое изменение величины  $b$  (как и должно быть в соответствии с предположением) и великолепное совпадение приближенных значений среднего радиуса и угла отклонения с точными значениями на участке  $z/L = 1.5-3.0$ .

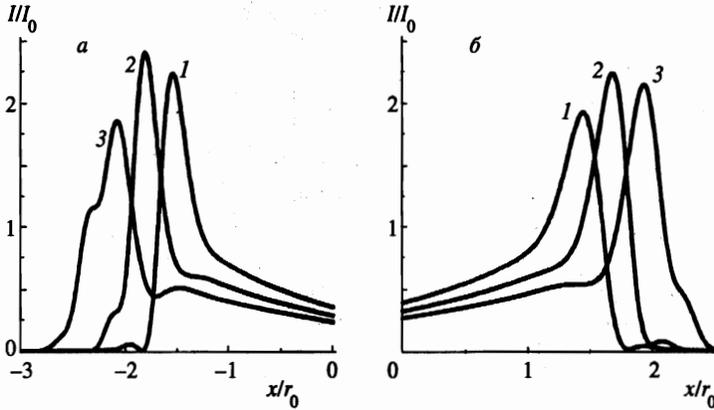


Рис. 3. Профили точного численного решения задачи распространения гауссова пучка при поперечном обдуве: а —  $M = 0.1$ ; кривые 1 —  $z/L = 1.5$ ; 2 — 1.7; 3 — 1.9; б —  $M = 1.5$ ; кривые 1 —  $z/L = 1.6$ ; 2 — 1.8; 3 — 2.0

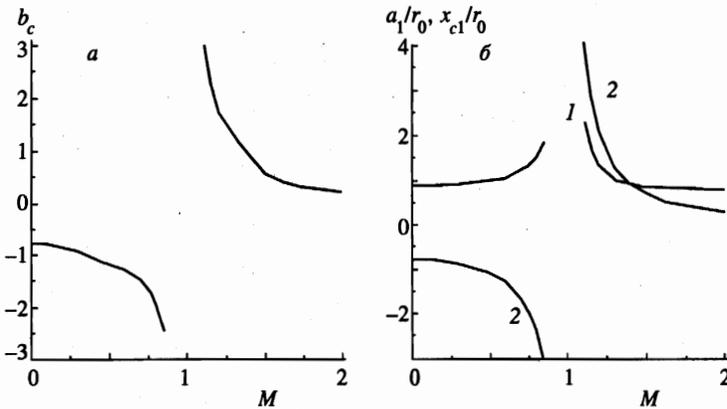


Рис. 4. Зависимости параметра  $b_c$  (а), начальных средних размеров  $a_1/r_0$  (б, кривые 1) и смещений  $x_{c1}/r_0$  (б, кривые 2) в сечении  $z_0/L = 1.5$  от числа Маха  $M$

### 11. РЕШЕНИЯ, ВКЛЮЧАЮЩИЕ ФОКУС

В фокусирующей среде поперечные размеры пучка могут уменьшиться на порядок (см. рис. 1б). Минимальный размер в фокусе  $a_f$  ограничен дифракцией и составляет по порядку обратную величину от числа Френеля  $a_f/r_0 \sim F^{-n}$ , как это следует из уравнения эйконала (1). Выше мы пренебрегли волновыми эффектами с погрешностью порядка  $F^{-2}$ . Уравнения для средних поперечных размеров во многих задачах аэрооптики с учетом дифракции можно свести к следующему общему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2 a}{dz^2} = \frac{1}{a(z)} \left[ \frac{\pm b}{a^{m-1}(z)} + \frac{c}{F^2 a^2(z)} \right], \quad b, c > 0, \quad m > 0, \quad (51)$$

$$a(0) = a_1, \quad \theta(0) = \theta_1.$$

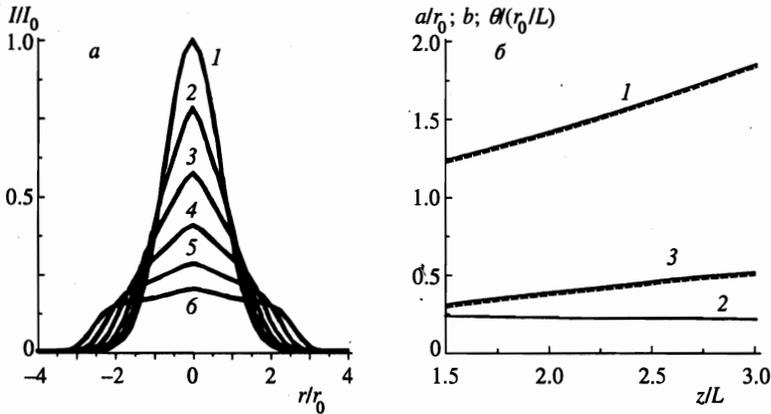


Рис. 5. а) Поперечные распределения первоначально гауссова пучка в теплопроводном режиме самовоздействия в сечениях: 1 —  $z/L = 0$ ; 2 — 1.0; 3 — 1.5; 4 — 2.0; 5 — 2.5; 6 — 3.0. б) Зависимости среднего радиуса  $a/r_0$  (кривые 1, точное решение — сплошные, приближенное решение (19) — штрихи), «постоянной»  $b$  (2) и угла отклонения  $\theta/(r_0/L)$  от оси (3) от длины трассы  $z$ . Для рис. а и б время  $t = 7\tau$ ; параметры подобия:  $N = 1, F \gg 1, N_\alpha = 0$

Это уравнение справедливо при любых числах Френеля  $F$ , как и исходное уравнение (1). Первый интеграл уравнения (51) при  $m > 1$  есть

$$\theta^2 \equiv \left(\frac{da}{dz}\right)^2 = \frac{\pm 2b}{(-m+1)a^{m-1}} - \frac{c}{F^2 a^2} + C_1, \quad C_1 = \theta_1^2 \mp \frac{2b}{(-m+1)a_1^{m-1}} + \frac{c}{F^2 a_1^2}. \quad (52)$$

Очевидно, что при  $m \geq 3$  дифракция не сможет скомпенсировать самофокусировку, так как второе слагаемое в правой части будет расти не быстрее первого при  $a \rightarrow 0$ .

1. Решение на трассе, включающей фокус, рассмотрим на примере осесимметричного пучка, распространяющегося в фокусирующей среде в теплопроводном режиме ( $m = 1$ , знак минус перед постоянной  $b$  в (51);  $D = 3$ ). Первый интеграл уравнения (51) есть

$$\theta \equiv \frac{da}{dz} = \pm \sqrt{-2b \ln a - \frac{c}{F^2 a^2} + C_1}. \quad (53)$$

Здесь знак «+» соответствует участку до фокуса, в котором  $\theta = 0$ , знак «-» — участку после фокуса. Для гауссова первоначального распределения интенсивности и плоского начального фронта строгие численные расчеты, выполненные при  $N = -2, F = 3$ , показали, что относительные изменения среднего радиуса составляют менее 0.46% в моменты  $t > 4\tau$ , фокусное расстояние  $z_f \approx 2.20L$  при  $t = 4\tau$ , минимальный радиус  $a(z_f = 2.2)/r_0 = 0.4969$ ; постоянные  $b = 0.5307, c = 2.190, C_1 = c/F^2$ . Профили интенсивности представлены на рис. 6а. За фокусом куполообразная форма распределения интенсивности сохраняется по крайней мере до сечения  $z = 3L$ . В фокусе пик увеличился почти в семь раз в соответствии с оценкой  $I/I_0 \sim (a_f/r_0)^{-2} \sim F^2$ .

На рис. 6б показана динамика формирования фокусирующей линзы. В момент квазиустановления  $t = 4\tau$  решение приближенного уравнения (53) (штрихи) сравнивается с точным (сплошная кривая 5). Удовлетворительное соответствие наблюдается до фокуса, в фокусе и за фокусом до сечения  $z = 3L$ .

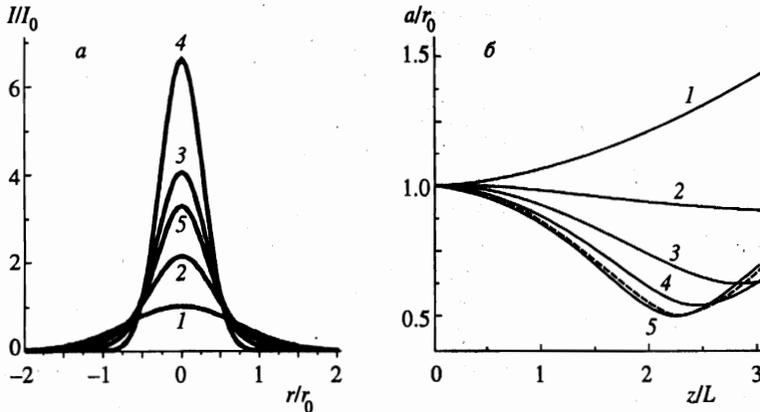


Рис. 6. а) Профили интенсивности гауссова пучка в фокусирующей среде ( $N = -2$ ,  $F = 3$ ) в квазистационарном теплопроводном режиме самовоздействия в сечениях: кривая 1 —  $z/L = 0$ ; 2 — 1.0; 3 — 1.5; 4 — 2.0; 5 — 3.0; время  $t = 4\tau$ . б) Зависимости среднего радиуса  $a/r_0$  от длины трассы, включающей фокус: точное решение — сплошные кривые в моменты времени  $t = 0$  (1);  $0.0255\tau$  (2);  $0.0631\tau$  (3);  $1.303\tau$  (4);  $4.00\tau$  (5); квазистационарное приближенное решение — штрихи. Постоянные  $b = -0.5307$ ,  $c = 2.190$ , число Френеля  $F = 3$ . Начальный радиус  $a(z=0)/r_0 = 1$ , угол отклонения  $\theta(z=0)/(r_0/L) = 0$

2. В качестве второго примера трассы с фокусом рассмотрим сфокусированный плоский пучок ( $\theta_1 < 0$ ) при поперечном обдуве дозвуковым и сверхзвуковым потоками ( $m = 1$ ;  $D = 2$ ) в пределе геометрической оптики при  $F \gg 1$ . В этом случае постоянная  $b = 0$  (см. (22)). Поперечный размер сфокусированного пучка уменьшается по линейному закону:  $a(z) = a_1 - z|\theta_1|$ . На расстоянии  $z - z_f \sim F^{-1}$  от фокуса  $z_f \approx a_1/|\theta_1|$  необходимо учесть дифракцию, т. е. построить внутреннее решение в окрестности фокуса в растянутых координатах  $Z = (z - z_f)F$  и срастить его при  $Z \rightarrow \pm\infty$  с внешним решением в масштабе  $z \sim 1$  [27]. В рассматриваемом конкретном случае общее решение уравнения (51), описывающее и внешнюю, и внутреннюю задачи, есть верхняя ветвь решения (31), в котором  $b$  следует заменить на  $c/F^2$ . Минимальный размер пучка ограничен дифракцией и составляет  $a_f = \sqrt{c/(F|\theta_1|)}$ .

Исходя из общего уравнения (51) при  $b \neq 0$ , приравнявая по порядку величины в правой части второе слагаемое первому, получим масштаб сжатия пучка в фокусе:  $a_f \sim 1/F^\alpha$ , где  $\alpha = 2/3, 1, 3/2, 2$  соответственно при  $m = 0, 1, 5/3, 2$ . Приравняв левую часть правой, определим продольный по пучку масштаб фокальной области:  $z - z_f \sim 1/F^\beta$ , где  $\beta = 1/3, 1, 2, 3$  соответственно при  $m = 0, 1, 5/3, 2$ .

## 12. ВЫВОДЫ

1. Предложенная процедура приближенного описания сильного самовоздействия лазерного пучка позволяет, не решая исходной сложной системы уравнений, сделать следующие выводы об эффекте самовоздействия.

При стационарном поперечном обдуве плоского коллимированного пучка расширение отсутствует (или мало), смещение происходит вниз по течению в дозвуковом потоке и вверх по течению в сверхзвуковом потоке.

В конвективном стационарном режиме  $M \ll 1$  поперечного обдува трехмерного коллимированного пучка расширение происходит преимущественно в поперечном к потоку направлении.

В транзвуковом потоке преобладает расширение (сужение) пучка в продольном по потоку направлении.

2. Универсальные решения для каждой из рассмотренных ситуаций не содержат параметров подобия. В различных физических ситуациях, объединяет которые только одинаковый показатель степени  $m$  в уравнении (26), можно пользоваться одним и тем же затабулированным однажды решением, варианты которого приведенным в таблице.

3. В фокусе минимальный поперечный размер пучка ограничен дифракцией в ситуациях, в которых показатель степени  $m < 3$ . При  $m \geq 3$ , по-видимому, вблизи фокуса нарушается основное предположение о сохранении формы поперечного распределения интенсивности излучения.

4. Сравнение с точным решением при  $m = 1$  в случае поперечного обдува невязким нетеплопроводным газом (плоский пучок) показало соответствие с погрешностью в несколько процентов. Хорошее соответствие с точным решением получено также в квазистационарном теплопроводном режиме ( $m = 1$ ; осесимметричный пучок) в дефокусирующей и фокусирующей средах.

5. Изложенная процедура допускает обобщение на случай  $N_\alpha \sim 1$  и пригодна для описания самовоздействия в продольном потоке, в вертикальном пучке (при наличии гравитационной конвекции), в случае других механизмов оптической нелинейности (эффект Керра, электрострикция и т. д.).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00446) и ЦАГИ.

## Литература

1. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, УФН 93, 19 (1967).
2. В. Н. Луговой, А. М. Прохоров, УФН 111, 203 (1973).
3. F. G. Gebhardt and D. C. Smith, IEEE J. Quant. Electr. QE-7, 63 (1971).
4. P. M. Livingston, Appl. Opt. 10, 426 (1971).
5. P. V. Aivisonis, C. B. Hogge, R. R. Butts, and J. R. Kenemuth, Appl. Opt. 11, 554 (1972).
6. М. Н. Коган, А. Н. Кучеров, ДАН СССР 251, 575 (1980).
7. В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ 11, 303 (1970).
8. А. Н. Кучеров, М. Н. Макашев, Е. В. Устинов, Изв. вузов, Радиофизика 36, 135 (1993).
9. D. C. Smith and F. G. Gebhardt, Appl. Phys. Lett. 16, 275 (1970).
10. R. A. Chodzko and S. C. Lin, AIAA J. 9, 1105 (1971).
11. В. А. Петрищев, Н. М. Шеронова, В. Е. Яшин, Изв. вузов, Радиофизика 18, 963 (1975).
12. А. Н. Кучеров, ДАН СССР 251, 309 (1980).
13. А. Н. Кучеров, Оптика атмосферы и океана 6, 1519 (1993).
14. А. Н. Кучеров, Оптика атмосферы и океана 9, 1110 (1996).
15. А. Н. Кучеров, КЭ 24, 181 (1997).
16. А. Н. Кучеров, М. Н. Макашев, Е. В. Устинов, Оптика атмосферы и океана 6, 1536 (1993).
17. А. Н. Кучеров, М. Н. Макашев, Е. В. Устинов, КЭ 22, 187 (1995).
18. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Наука, Москва (1971).
19. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, Теория волн, Наука, Москва (1979).

20. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, Москва (1981).
21. М. Н. Коган, А. Н. Кучеров, Изв. вузов, **Физика** № 2, 104 (1983).
22. М. Н. Коган, А. Н. Кучеров, В. В. Михайлов, А. С. Фонарев, Изв. АН СССР, *Механика жидкости и газа* № 5, 95 (1978).
23. R. T. Brown and D. C. Smith, *Appl. Phys. Lett.* **25**, 500 (1974).
24. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986), с. 655.
25. D. C. Smith, *IEEE J. Quant. Electr.* **QE-5**, 600 (1969).
26. Б. П. Герасимов, В. М. Гордиенко, А. П. Сухоруков, **ЖТФ** **45**, 2485 (1975).
27. М. Ван-Дайк, *Методы возмущений в механике жидкости*, Мир, Москва (1967).