

ЖЕСТКИЙ РЕЖИМ ВОЗБУЖДЕНИЯ СОЛИТОНОВ: ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Е. А. Кузнецов*

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
117334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 29 декабря 1998 г.

Рассмотрена задача об устойчивости одномерных солитонов при жестком режиме их возбуждения, когда матричный элемент четырехволнового взаимодействия имеет дополнительную малость. Для оптических солитонов показано, что стрикционный механизм может приводить к уменьшению керровской нелинейности. Показано, что солитоны с конечной величиной скачка амплитуды при критической скорости солитона, совпадающей с минимальной фазовой скоростью линейных волн, неустойчивы, в то время как солитоны при мягком переходе остаются устойчивыми относительно одномерных возмущений. Двумерные и трехмерные солитоны вблизи порога оказываются неустойчивыми относительно модуляционных возмущений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена изучению жесткого и мягкого режимов возбуждения солитонов (другими словами — жесткой и мягкой бифуркаций) при изменении скорости солитона v — одной из основных характеристик солитона. Хорошо известно, что если скорость движущегося объекта v такова, что

$$\omega_k = kv, \quad (1.1)$$

где $\omega = \omega_k$ — закон дисперсии линейных волн, а k — волновой вектор, то такой объект будет терять свою энергию за счет черенковского излучения. Сказанное в полной мере относится и к солитонам как к локализованным стационарным образованиям. Они не могут существовать, если выполнено условие резонанса (1.1). Отсюда вытекает первое, самое простое, правило отбора солитонов: скорость солитона должна быть либо меньше минимальной фазовой скорости линейных волн, либо больше максимальной фазовой скорости. Граница, отделяющая область существования солитонов от резонансной области (1.1), определяет критическую скорость солитонов v_{cr} . Эта скорость, как легко видеть, совпадает с групповой скоростью линейных волн в точке касания прямой $\omega = kv$ дисперсионной кривой $\omega = \omega_k$ (в многомерном случае — касания плоскости $\omega = (kv)$ дисперсионной поверхности). Если касание происходит снизу, то критическая скорость определяет максимальное значение скорости солитонов для этой области параметров, и наоборот, при касании сверху v_{cr} совпадает с минимальной фазовой скоростью. При переходе через эту границу возможны два режима: мягкое либо жесткое возбуждение, другими словами, жесткая или мягкая бифуркация.

*E-mail: kuznetso@itp.ac.ru

Ранее было выяснено [1–5], что вблизи критической скорости солитоны при мягком режиме возбуждения ведут себя универсальным образом. Эта универсальность проявляется, во-первых, в корневой зависимости амплитуды солитона от скорости, типичной для фазовых переходов второго рода, что роднит это явление с фазовыми переходами второго рода. Однако имеется одно важное отличие от фазовых переходов, которое проявляется в форме солитона. Она оказывается также универсальной: по мере приближения скорости к критической форма солитона приобретает вид солитона огибающей для нелинейного уравнения Шредингера (НУШ). Такое поведение имеет место при произвольной размерности пространства.

Впервые этот вопрос был рассмотрен для поверхностных гравитационно-капиллярных волн на глубокой воде. Вначале численно были найдены одномерные солитонные решения в работе [1], затем в работах [2, 3] с помощью нормальных форм была изучена бифуркация — переход от периодических решений к солитонному. Вывод стационарного НУШ для солитонов гравитационно-капиллярных волн был осуществлен в работе [4]. В статье Захарова и автора [5] было показано, что данный механизм может быть распространен на оптические солитоны. Из этой работы по существу следовало, что данный механизм имеет место для волн произвольной природы.

Вопрос о том, является ли бифуркация мягкой или жесткой, зависит от характера нелинейного взаимодействия. Мягкий режим перехода имеет место при фокусирующей нелинейности, когда произведение $\omega''T < 0$, где $\omega'' = \partial^2\omega/\partial k^2$ — вторая производная частоты по волновому вектору, взятая в точке касания $k = k_0$, а T — значение матричного элемента четырехволнового взаимодействия $T_{k_1 k_2 k_3 k_4}$ при $k_i = k_0$. Если $\omega''T > 0$, что отвечает дефокусирующей нелинейности, то солитонов — локализованных решений — с амплитудой, обращающейся в нуль плавно при $v \rightarrow v_{cr}$, уже нет. В теории фазовых переходов это соответствует фазовому переходу первого рода, в теории турбулентности по терминологии Ландау [6] — жесткому режиму возбуждения. В данном случае переход через критическую скорость сопровождается скачком в амплитуде солитонов. Величина скачка определяется следующими членами разложения гамильтониана. Как и для фазовых переходов первого рода, в ситуации общего положения надеяться на универсальность поведения солитонов уже не приходится. Однако, когда жесткость этого перехода мала, в разложении гамильтониана возможно ограничиться следующим приближением и пренебречь всеми остальными слагаемыми. В фазовых переходах это соответствует фазовому переходу первого рода, близкому к переходу второго рода, который реализуется, например, вблизи трикритической точки. Как показано в [7], такая ситуация возникает для одномерных солитонов внутренних волн, распространяющихся вдоль скачка плотности в жидкостях. Согласно [7] матричный элемент T в этом случае обращается в нуль при отношении плотностей $\rho_1/\rho_2 = (21 - 8\sqrt{5})/11$. В окрестности этой точки авторам этой работы удалось с помощью метода нормальных форм провести весь бифуркационный анализ для солитонов.

В данной работе мы, последовательно используя гамильтоновское описание (на эту тему см. недавний обзор [8], а также работу [5]), получим замкнутое описание солитонов вблизи критической скорости, а также изучим их устойчивость относительно модуляционных возмущений в рамках нестационарного обобщенного нелинейного уравнения Шредингера. Следует отметить, что в отличие от метода нормальных форм, широко применяемого в работах [2, 3, 7, 9] для изучения бифуркаций солитонов, использование гамильтоновского подхода принципиально для исследования устойчивости солитонов. В методе нормальных форм введение огибающих неоднозначно, в результате чего га-

мильтоновские уравнения движения после усреднения теряют свою изначальную гамильтоновскую структуру.

Как будет показано в данной работе, разложение гамильтониана для солитонов при жесткой бифуркации вблизи порога существенно отличается от того, которое есть для мягкого режима. В этом разложении присутствуют слагаемые, содержащие так называемый инвариант Лифшица [10], играющий важную роль для фазовых переходов первого рода. В контексте солитонов инвариант Лифшица обеспечивает наличие нелинейной зависимости фазы солитона от координаты, называемой в оптике *chirp*.

В работе показано, что при мягком режиме перехода устойчивыми оказываются только одномерные солитоны, двумерные и трехмерные солитоны подвержены модуляционной неустойчивости. Эта же неустойчивость имеет место и для двумерных и трехмерных солитонов при переходах жесткого типа.

С помощью интегральных оценок соболевского типа в их мультипликативном варианте (неравенства Гальярдо—Нейренберга) доказано, что только одномерные солитоны со слабым притяжением устойчивы по Ляпунову. Для этих солитонов гамильтониан при фиксированном значении числа частиц (мощности) ограничен снизу, а соответственно, сами солитоны реализуют его минимум, что означает в силу теоремы Ляпунова их устойчивость. Следует отметить, что явление существования устойчивых локализованных структур — солитонов — за счет относительно слабого четырехволнового взаимодействия на фоне сильного притяжения ($\sim |\psi|^6$), приводящего к коллапсу (см., например, [11]), родственно явлению слабой локализации [12].

Что касается солитонов с конечной величиной скачка амплитуды в точке перехода, они оказываются строго неустойчивыми относительно малых возмущений, когда вклад от инварианта Лифшица отсутствует. Критерий устойчивости для этих решений имеет вид критерия Вахитова—Колоколова [13] для НУШ:

$$\partial N_s / \partial \lambda^2 > 0, \quad (1.2)$$

где N_s — число частиц в солитонном решении, а величина $\varepsilon = -\lambda^2 < 0$ имеет смысл энергии связанного состояния — солитона. При положительной производной, т. е. когда при добавлении одной частицы энергия ε уменьшается, солитон устойчив. В обратном случае, когда при увеличении N происходит выталкивание уровня, солитон оказывается неустойчивым. Когда вклад от инварианта Лифшица ненулевой, критерий неустойчивости (1.2) для солитонов со слабым отталкиванием является лишь необходимым. При этом, однако, решения такого типа неустойчивы относительно конечных возмущений.

Что касается солитонов со слабым притяжением, то критерий (1.2) дает их устойчивость во всей области изменения λ^2 , что полностью согласуется с анализом устойчивости по Ляпунову.

План статьи следующий. Во втором разделе выводится нестационарное обобщенное нелинейное уравнение Шредингера. Здесь же обсуждается вопрос о влиянии размерности пространства на устойчивость солитонов при их мягком режиме возбуждения. В частности, мы показываем, что только в одномерном случае можно надеяться на устойчивые солитоны. Именно поэтому мы в дальнейшем ограничились рассмотрением только одномерных солитонов. В третьем разделе мы находим точные аналитические выражения для одномерного солитонного решения со скачком амплитуды в точке перехода. Следующий раздел посвящен ляпуновской устойчивости солитонов. С помощью точных интегральных оценок установлено, что только для солитонов со слабым

притяжением ($T\omega'' < 0$) гамильтониан ограничен снизу. При этом солитон реализует минимум H и устойчив по Ляпунову, т.е. не только относительно малых возмущений, но также и конечных. В данном случае этот критерий можно (и нужно) рассматривать в качестве энергетического принципа. В частности, отсюда легко понять, что слияние солитонов энергетически выгодно (подчеркнем, что слияние невозможно для интегрируемого НУШ). Этот процесс, как правило, будет сопровождаться излучением (см. [14]), поскольку только для весьма исключительных дисперсионных зависимостей энергии солитонов от импульса и числа частиц возможно удовлетворить всем законам сохранения.

В пятом разделе мы рассмотрим вопрос о линейной устойчивости. Здесь гамильтоновский подход также весьма полезен — он дает возможность существенным образом упростить всю схему вывода аналога критерия Вахитова—Колоколова.

Заключительный раздел посвящен приложению к оптическим солитонам в оптоволоконках. В частности, здесь мы показываем, что стрикционный механизм может уменьшать матричный четырехволновой элемент, обусловленный эффектом Керра, и в принципе изменить его знак.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим некоторую нелинейную среду, в которой могут распространяться волны. Будем предполагать, что среда чисто консервативная, а ее нелинейные колебания могут быть описаны гамильтонианом

$$H = \int \omega_k |a_k|^2 dk + H_{int}, \quad (2.1)$$

где ω_k — закон дисперсии волн малой амплитуды, a_k — амплитуды волн, а гамильтониан H_{int} описывает нелинейное взаимодействие волн.

Уравнения движения среды в терминах амплитуд a_k записываются стандартным образом:

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + i\omega_k a_k = -i \frac{\delta H_{int}}{\delta a_k^*}, \quad (2.2)$$

так что в отсутствие взаимодействия система представляет собой набор невзаимодействующих осцилляторов (волн):

$$a_k(t) = a_k(0)e^{-i\omega_k t}.$$

Уравнение (2.2) описывает динамику в k -представлении. Для того чтобы вернуться в x -представление, необходимо совершить обратное фурье-преобразование:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int a_k(t) e^{ikr} dk. \quad (2.3)$$

Обычно функция $\psi(x, t)$ связана с характеристиками среды (флуктуациями плотности и скорости среды, электрического и магнитного полей и т.д.) линейным преобразованием (см., например, [8]). Важно, что если $\psi(x, t)$ — периодическая функция

координат, то ее спектр $a_k(t)$ представляет собой набор δ -функций. Для локализованных распределений $\psi(x, t) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ фурье-амплитуда $a_k(t)$ не содержит δ -особенностей, являясь локализованной функцией k .

Рассмотрим теперь решение уравнения (2.2) в виде солитона, распространяющегося с постоянной скоростью v :

$$\psi(x, t) = \psi(x - vt).$$

В этом случае вся зависимость a_k от времени t содержится в осциллирующей экспоненте:

$$a_k(t) = c_k e^{-ikvt},$$

где в силу (2.2) амплитуда a_k будет подчиняться уравнению

$$(\omega_k - kv)_k = -\frac{\partial H}{\partial c_k^*} \equiv f_k. \quad (2.4)$$

Входящая в это уравнение разность $\omega_k - kv$ будет при всех k положительной величиной, если скорость солитона меньше минимальной фазовой скорости:

$$|v| < \min(\omega_k/k). \quad (2.5)$$

И наоборот, разность будет отрицательной при всех k , если скорость солитона больше максимальной фазовой скорости:

$$|v| > \max(\omega_k/k). \quad (2.6)$$

Покажем, что солитонное решение возможно при выполнении условия (2.5) (либо (2.6)). Предположим противное — пусть условие (2.5) выполнено, т. е. уравнение

$$\omega_k = kv \quad (2.7)$$

имеет решение. Для простоты будем считать, что оно единственно: $k = k_0$. Тогда у однородного линейного уравнения

$$(\omega_k - kv)C_k = 0$$

имеется, благодаря равенству $x\delta(x) = 0$, нетривиальное решение в виде монохроматической волны:

$$C_k = A\delta(k - k_0).$$

В этом случае уравнение (2.4) допускает (в силу альтернативы Фредгольма) представление

$$c_k = A\delta(k - k_0) + \frac{f_k - f_{k_0}}{\omega_k - kv}. \quad (2.8)$$

Это уравнение, в отличие от (2.4), содержит свободный параметр — комплексную амплитуду A . Для того чтобы найти решения этого уравнения, можно, например, воспользоваться итерациями, взяв в качестве нулевого члена $A\delta(k - k_0)$. Важно, что в результате итерации в решении из-за нелинейности появятся кратные $k = k_0$ гармоники.

Полученное таким образом решение будет представлять собой набор δ -функций. Соответственно, в x -представлении оно будет периодическим по координатам, т. е. нелокализированным решением. Отсюда следует первое правило отбора для солитонов: разность $\omega_k - \mathbf{k}v$ должна быть знакоопределенной, что эквивалентно требованиям (2.5) или (2.6) отсутствия черенковского излучения.

Во всей этой схеме, однако, имеется одно важное исключение. Представив уравнение (2.4) в виде (2.8), мы фактически предположили, что особенность в выражении

$$\frac{f_k}{\omega_k - \mathbf{k}v} \tag{2.9}$$

неустранима. Это может быть и не так — особенность в знаменателе (2.9) может сокращаться с числителем, т. е. быть устранимой [5]. Например, такое сокращение имеет место для классического солитона уравнения КдВ, уравнений, его обобщающих [15], для комбинации одномерного НУШ и уравнения МКдВ [5, 16], порождаемых одним и тем же оператором Захарова—Шабата [17], и т. д. Во всех этих случаях сокращение возникает благодаря зависимости матричных элементов от k . Однако и в этом случае, после устранения резонанса (2.7), правило отбора для солитонов остается прежним — оставшаяся в знаменателе часть должна быть знакоопределенной.

В дальнейшем будем предполагать, что особенности в (2.9) неустранимы в запрещенной области, и рассмотрим, как ведет себя солитонное решение при скорости солитона близкой к критической. Для определенности будем считать, что касание плоскости $\omega = \mathbf{k}v$ дисперсионной поверхности $\omega = \omega_k$ происходит снизу, т. е. выполняется критерий (2.5). Пусть касание имеет место в точке $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$. Тогда вместо (2.8) в разрешенной области скоростей имеем:

$$c_k = \frac{f_k}{\omega_k - \mathbf{k}v}.$$

По мере приближения скорости v к критической v_{cr} знаменатель в этом выражении становится малым в окрестности точки касания, поэтому в этой точке спектр c_k имеет резкий пик:

$$c_k = \left[\frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \kappa_\alpha \kappa_\beta + k_0(v_{cr} - v) \right]^{-1} f_k. \tag{2.10}$$

Здесь $\omega_{\alpha\beta} = \partial^2 \omega / \partial k_\alpha \partial k_\beta$ — симметричный положительно определенный тензор вторых производных, взятый при $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$, а $\kappa = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$.

Из (2.10) видно, что при стремлении v к критической скорости ширина пика сужается $\propto \sqrt{v_{cr} - v}$, а распределение, соответствующее основному пику $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$, приближается к монохроматической волне. В силу нелинейности в спектре присутствуют кратные $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ гармоники. Если предположить, что амплитуда солитона обращается в нуль плавно при $v \rightarrow v_{cr}$ (что соответствовало бы фазовому переходу второго рода), то решение $\psi(x)$ (или то же самое c_k) можно искать в виде разложения по гармоникам:

$$\psi(x') = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \psi_n(X) e^{ihk_0 x'}, \quad x' = x - vt. \tag{2.11}$$

Здесь мы формально ввели малый параметр

$$\lambda = \sqrt{1 - v/v_{cr}} \quad (2.12)$$

и «медленную» координату $X = \lambda x'$, так что $\psi_n(X)$ есть амплитуда огибающей n -ой гармоники. Предположение о плавности обращения в нуль амплитуды солитона при $v = v_{cr}$ означает, что основной член ряда в (2.11) соответствует первой гармонике, а все остальные малы по параметру λ . Именно при этом условии выводится нелинейное уравнение Шредингера (см., например, [5, 18, 19]). В данном случае в главном порядке по λ мы приходим к стационарному НУШ (ср. с [5]):

$$-k_0 v_{cr} \lambda^2 \psi_1 + \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} + B |\psi_1|^2 \psi_1 = 0, \quad (2.13)$$

где B связана с матричным элементом четырехволнового взаимодействия $\tilde{T}_{k_0 k_1 k_2 k_3}$ соотношением

$$B = -(2\pi)^d \tilde{T}_{k_0 k_0 k_0 k_0}. \quad (2.14)$$

В этом приближении главный член в гамильтониане взаимодействия записывается в виде

$$H_{int} = \frac{\tilde{T}_{k_0 k_0 k_0 k_0}}{2} \int c_k^* c_{k_1}^* c_{k_2} c_{k_3} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3} d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 = -\frac{B}{2} \int |\psi_1|^4 dx, \quad (2.15)$$

а тильда над T означает, что в матричном элементе учтена перенормировка вершины за счет трехволнового взаимодействия — в данном случае взаимодействия с нулевой и второй гармониками. Как уже отмечалось, $\omega_{\alpha\beta}$ в (2.13) является симметричным положительно определенным тензором. Поэтому, совершая поворот к его главным осям и проводя соответствующие растяжения вдоль каждой из осей, уравнение (2.15) можно преобразовать к стандартному виду

$$-\lambda^2 \psi + \Delta \psi - \mu |\psi|^2 \psi = 0, \quad (2.16)$$

где $\mu = \text{sign}(\tilde{T}_{\omega_{\alpha\alpha}})$.

Отсюда следует, что, во-первых, только при условии отрицательности μ (отрицательности произведения $\tilde{T}_{\omega_{\alpha\alpha}}$) возможны солитоны (фокусирующая нелинейность), во-вторых, амплитуда солитонов пропорциональна

$$\lambda = \sqrt{1 - v/v_{cr}},$$

т. е. обращается в нуль по корневому закону, при этом размер солитона растет при приближении скорости к критическому значению обратно пропорционально этому фактору.

Число частиц (или мощность) в солитонном решении в зависимости от λ имеет вид

$$N = \int |\psi|^2 dx = \lambda^{2-d} \int |g(\xi)|^2 d\xi, \quad (2.17)$$

где d — размерность пространства, а $g(\xi)$ подчиняется уравнению

$$-g + \Delta g + |g|^2 g = 0.$$

В одномерном случае $g = \sqrt{2}\operatorname{sech}\xi$ и, соответственно, $N = 4\lambda$. В двумерном случае N на всем семействе солитонов не зависит от λ , а в трехмерном N убывает с увеличением λ . Именно зависимость N от λ^2 является определяющей с точки зрения устойчивости солитонов. Очевидно, что наиболее опасными возмущениями будут те, которые движутся вместе с солитоном с волновыми числами близкими к $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$, т. е. возмущения модуляционного типа. Для того чтобы включить временную зависимость в усредненные уравнения, необходимо считать, что в разложении (2.11) амплитуды ψ_n зависят не только от «медленной» координаты X , но также и от медленного времени $T = \lambda^2 t$. Тогда многомасштабное разложение дает вместо стационарного НУШ (2.16) его нестационарный аналог:

$$i\psi_t - \lambda^2\psi + \Delta\psi - \mu|\psi|^2\psi = 0. \tag{2.18}$$

Для этого уравнения проблема устойчивости солитонов хорошо изучена (см., например, [5, 20]). Напомним основные ее положения.

Уравнение (2.18) как уравнение для огибающих наследует каноническую гамильтоновскую форму (2.2)

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\delta\tilde{H}}{\delta\psi^*}, \tag{2.19}$$

где гамильтониан

$$H = \lambda^2 N + \int (|\nabla\psi|^2 - |\psi|^4) d\mathbf{r} \quad (\mu = -1) \tag{2.20}$$

возникает в результате усреднения исходного гамильтониана. Уравнение (2.18) помимо H сохраняет полное число частиц (адиабатический инвариант) N , так что солитоны представляют собой стационарные точки функционала энергии $E = H - \lambda^2 N$ при фиксации числа частиц:

$$\delta(E + \lambda^2 N) = 0.$$

Отсюда, следуя [20], можно показать, что только в одномерном случае солитон реализует минимум энергии, в то время как при $d \geq 2$ солитоны представляют собой гиперболическую точку. Это означает, что только в одномерном случае имеет место устойчивость солитонов, а в двумерном (критическом) и трехмерном случаях солитоны неустойчивы и могут быть рассмотрены как сепаратрисные решения, отделяющие коллапсирующие решения от дифрагирующих [21].

Это, по-видимому, есть наиболее простой способ объяснения того хорошо известного эмпирического факта, почему солитоны, как правило, существуют только в одномерных системах. Для многомерных систем устойчивые солитоны редки и могут появиться либо благодаря топологическим ограничениям, либо за счет механизма устранения черенковских особенностей (обсуждаемого в данной статье). Последнее, как легко понять, связано с существованием определенного ряда симметрии.

В данной работе мы основное внимание уделим солитонам, возникающим при жестком режиме возбуждения, что наблюдается, когда коэффициент μ в уравнении (2.16) положителен. В этом случае уравнение (2.16) уже не имеет стационарных локализованных (стремящихся к нулю на бесконечности) решений. Для их возможного существования необходим учет следующих членов разложения гамильтониана по

параметру $\Delta k/k_0$, где Δk — ширина основного пика. Если скачок амплитуды солитона при $v = v_{cr}$ велик (порядка единицы), то нужно учитывать ряд полностью и в этом случае рассчитывать на какую-либо последовательную теорию, основанную на разложении гамильтониана, уже не приходится. Только если значение матричного элемента $\tilde{T}_{k_0 k_0 k_0 k_0} = \tilde{T}_0$ мало, т. е. имеет по сравнению с надкритичностью дополнительную малость (а вследствие этого мал и сам скачок), то в этом случае достаточно ограничиться несколькими следующими членами разложения. Мы ограничимся рассмотрением только одномерных солитонов, поскольку, как мы видели выше, при мягком переходе многомерные солитоны неустойчивы. Эта же тенденция сохраняется и для жестких режимов. Легко оценить, что в этой ситуации в гамильтониане взаимодействия основной вклад вносят два слагаемых. Первое — это поправка к локальному четырехволновому гамильтониану, равная $-B/2 \int |\psi|^4 dx$, возникающая из-за удержания линейного по $\kappa_i = k_i - k_0$ слагаемого при разложении матричного элемента $\tilde{T}_{k_1 k_2 k_3 k_4}$:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{k_1 k_2 k_3 k_4} &= \tilde{T}_0 + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial k_1} (\kappa_1 + \kappa_2) + \frac{\partial \tilde{T}^*}{\partial k_1} (\kappa_3 + \kappa_4) = \\ &= \tilde{T}_0 + \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial k_1} \right) (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4). \end{aligned}$$

Здесь

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial k_1} \equiv \left. \frac{\partial \tilde{T}_{k_1 k_2 k_3 k_4}}{\partial k_1} \right|_{k_i = k_0}$$

В результате в x -представлении гамильтониан четырехволнового взаимодействия в приближении огибающих записывается в виде

$$H^{(4)} = \pi \int \left\{ \tilde{T}_0 |\psi|^4 + 2i \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial k_1} \right) (\psi_x^* \psi - \psi_x \psi^*) |\psi|^2 \right\} dx. \quad (2.21)$$

Выражение $i(\psi_x^* \psi - \psi_x \psi^*)$ в этом интеграле хорошо известно в теории фазовых переходов (см. [10]) — это так называемый инвариант Лифшица.

Второе слагаемое — локальное по ψ — шестиволновое взаимодействие:

$$H^{(6)} = -C \int |\psi|^6 dx. \quad (2.22)$$

Как будет видно из дальнейшего, знак константы взаимодействия C может быть как отрицательным, так и положительным — важна будет комбинация обоих вкладов (2.21) и (2.22).

Суммарно гамильтониан в безразмерных переменных будет зависеть от трех констант μ , β и C :

$$H = \lambda^2 N + \int \left[|\psi_x|^2 + \frac{\mu}{2} |\psi|^4 + i\beta (\psi_x^* \psi - \psi_x \psi^*) |\psi|^2 - C |\psi|^6 \right] dx. \quad (2.23)$$

При этом константа μ предполагается малой, а константы β и C не содержат никакой дополнительной малости.

Уравнения движения для ψ , соответствующие этому гамильтониану, записываются согласно (2.19) в виде

$$i\psi_t - \lambda^2\psi + \psi_{xx} - \mu|\psi|^2\psi + 3C|\psi|^4\psi + 4i\beta|\psi|^2\psi_x = 0. \quad (2.24)$$

Это уравнение помимо энергии $E = H - \lambda^2 N$ и числа частиц сохраняет также полный импульс

$$P = \frac{i}{2} \int (\psi_x^* \psi - \psi_x \psi^*) dx.$$

3. СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ

Стационарные (не зависящие от t) солитонные решения уравнения (2.24) будут определяться из следующего обыкновенного дифференциального уравнения¹⁾:

$$-\lambda^2\psi + \psi_{xx} - \mu|\psi|^2\psi + 3C|\psi|^4\psi + 4i\beta|\psi|^2\psi_x = 0. \quad (3.1)$$

Данное уравнение может быть просто проинтегрировано, если вместо ψ ввести амплитуду $r = |\psi|$ и фазу $\varphi = \arg \psi$: $\psi = r e^{i\varphi}$. Подставляя далее ψ в уравнение (3.1) и разделяя затем действительную и мнимую части, в результате для мнимой части имеем уравнение

$$\varphi_x = -\beta r^2. \quad (3.2)$$

После исключения фазы уравнение для r сводится к уравнению Ньютона:

$$2r_{xx} = -\partial U / \partial r \quad (3.3)$$

с потенциалом

$$U = -\lambda^2 r^2 - \frac{\mu}{2} r^4 + C_1 r^6,$$

где константа взаимодействия C перенормируется $C_1 = C + \beta^2$. После чего уравнения (3.2) и (3.3) интегрируются с помощью интеграла энергии:

$$r^2 = \frac{4\lambda^2}{\sqrt{16\lambda^2 C_1 + \mu^2 \operatorname{ch}(2\lambda x) - \mu}}, \quad (3.4)$$

$$\varphi = -\frac{\beta^2}{\sqrt{C_1}} \operatorname{arctg} \left[\frac{\sqrt{16\lambda^2 C_1 + \mu^2 e^{2\lambda x} - \mu}}{4\lambda\sqrt{C_1}} \right]. \quad (3.5)$$

Это решение солитонного типа существует, если только $C_1 > 0$ ²⁾. Интересно отметить, что перенормировка константы взаимодействия C возникает благодаря β -члену в гамильтониане, что можно углядеть непосредственно из (2.23), переписав H в терминах амплитуды и фазы:

¹⁾ Напомним, что по построению данные солитоны двигаются с постоянной скоростью. Само же уравнение (2.24) содержит более широкий класс локализованных решений. Все они, однако, нестационарны — у них фазовая и групповая скорости различны.

²⁾ Здесь мы не анализируем решения при $C_1 < 0$ и $\mu < 0$.

$$H = \lambda^2 N + \int \left[r_x^2 + r^2(\dot{\varphi}_x + \beta r^2)^2 + \frac{\mu}{2} r^4 - (C + \beta^2)r^6 \right] dx. \quad (3.6)$$

Легко видно также, что солитонное решение (3.4) представляет собой стационарную точку H . Действительно, вариация H по φ приводит к уравнению (3.2), а уравнение Ньютона (3.3) возникает в результате варьирования H по r .

Решения (3.4) и (3.5) при $\lambda = 0$ и $\mu > 0$ вырождаются в солитон, затухающий степенным образом [9]:

$$\begin{aligned} r_{lim}^2 &= \frac{2\mu}{\mu^2 x^2 + 4C_1}, \\ \varphi_{lim} &= -\frac{\beta}{\sqrt{C_1}} \operatorname{arctg} \frac{\mu x}{2\sqrt{\beta^2 + C}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Таким образом, при переходе скорости через v_{cr} солитон испытывает скачок. Амплитуда солитона на скачке имеет максимальное значение, равное

$$A^2 = \mu/2C_1.$$

Данное значение величины скачка легко находится также и из (3.6).

С ростом λ амплитуда солитона растет корневым образом, а размер солитона уменьшается как λ^{-1} .

Важной особенностью решения (3.4) является наличие нелинейной зависимости фазы φ от координаты (называемой в оптике chirp). При этом максимальное изменение фазы (от $-\infty$ до $+\infty$ по x)

$$\Delta\varphi = -\frac{\beta\pi}{\sqrt{\beta^2 + C}}$$

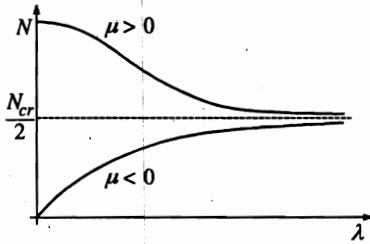
достигается на скачке при $v = v_{cr}$. Оно может быть как больше, так и меньше π в зависимости от знака константы C .

Решение (3.4) можно использовать также и для отрицательных, но малых значений μ . В этом случае, как и должно быть, солитонное решение мягко отщепляется от нуля в точке $v = v_{cr}$. Его амплитуда затем растет при больших λ точно таким же образом, как и для $\mu > 0$.

Интегральные характеристики обоих решений (с $\mu > 0$ и $\mu < 0$) различны. Так, полное число частиц в солитонном решении при $\mu > 0$,

$$N = \frac{2}{\sqrt{C_1}} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\sqrt{16\lambda^2 C_1 + \mu^2} - \mu}{4\lambda\sqrt{C_1}} \right\} \right],$$

достигает своего максимального значения $N_{cr} = \pi/\sqrt{C_1}$ при $\lambda = 0$ и уменьшается плавно до $N_{cr}/2$ при $\lambda \rightarrow \infty$ (см. рисунок). Для отрицательных μ число частиц N при малых λ растет пропорционально λ , а затем асимптотически приближается снизу к $N = N_{cr}/2$. Важно, что производные $\partial N/\partial \lambda$ имеют разные знаки: для солитонов со скачком эта производная отрицательна, а для солитонов с $\mu < 0$ — положительна.



Зависимость N от λ для солитонных решений: верхняя кривая соответствует слабому отталкиванию, нижняя — слабому притяжению

4. УСТОЙЧИВОСТЬ СОЛИТОНОВ ПО ЛЯПУНОВУ

Как уже отмечалось выше, оба типа солитонов (с $\mu > 0$ и $\mu < 0$) представляют собой стационарные точки энергии E при фиксированном значении числа частиц:

$$\delta(E + \lambda^2 N) = \delta H = 0, \tag{4.1}$$

где энергия в соответствии с (3.6) задается выражением

$$E = \int \left[r_x^2 + \frac{\mu}{2} r^4 - (C + \beta^2) r^6 + r^2 (\varphi_x + \beta r^2)^2 \right] dx. \tag{4.2}$$

Как известно (см., например, [20]), в случае гамильтоновских систем стационарная точка будет устойчива по Ляпунову, если она реализует минимум либо максимум какого-либо интеграла движения, например, энергии.

В данном случае, если мы найдем условия, при которых энергия будет ограничена снизу при фиксированном числе частиц (неограниченность E сверху очевидна), стационарная точка, отвечающая за минимум E , будет устойчива. Поскольку решение вариационной задачи (4.1) единственно (с точностью до постоянного фазового множителя) при фиксированном λ^2 , а это эквивалентно фиксации N , солитонное решение (3.4) в этом случае будет устойчивым по Ляпунову.

Рассмотрим масштабные преобразования солитонного решения

$$\psi_s(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{l}} \psi_s\left(\frac{x}{l}\right),$$

сохраняющие число частиц. При этом преобразовании энергия E будет функцией масштабного параметра l :

$$E = (I_1 - C_1 I_2) \frac{1}{l^2} + \frac{\mu I_3}{2l},$$

где

$$I_1 = \int r_x^2 dx, \quad I_2 = \int r^6 dx, \quad I_3 = \int r^4 dx.$$

(Отметим, что последний интеграл в выражении для энергии (4.2) тождественно равен нулю в солитонном решении.) В силу (4.1)

$$\left. \frac{\partial E}{\partial l} \right|_{l=1} = 0 \quad \text{или} \quad I_1 - C_1 I_2 = -\frac{\mu}{4} I_3.$$

Отсюда следует, во-первых, что энергия солитонов также существенным образом зависит от константы μ :

$$E = \frac{\mu}{4} I_3 \quad (I_3 > 0).$$

Эта величина положительна для солитонов со слабым отталкиванием ($\mu > 0$) и отрицательна для солитонов со слабым притяжением ($\mu < 0$). Во-вторых, при $\mu > 0$ энергия E как функция масштабного параметра l ,

$$E = -\frac{\mu}{4} I_3 \left(\frac{1}{l^2} - \frac{2}{l} \right),$$

не ограничена снизу при $l \rightarrow 0$, а при слабом притяжении имеет минимум, соответствующий солитонному решению.

Покажем теперь, что энергия E при $\mu < 0$ ограничена снизу для всех деформаций, оставляющих неизменным N .

Рассмотрим интеграл $\int r^6 dx = I_2$. Этот интеграл может быть оценен с помощью неравенства Соболева—Гальярдо—Нейренберга через интеграл $I_1 = \int r_x^2 dx$ и число частиц N :

$$\int r^6 dx \leq MN^2 \int r_x^2 dx. \quad (4.3)$$

Это неравенство может быть улучшено путем отыскания наименьшей константы M . Для этого, следуя [5], рассмотрим функционал

$$M[\psi] = \frac{I_2}{I_1 N^2}.$$

Его минимальное значение определяет наилучшую константу. Чтобы найти ее, необходимо рассмотреть все стационарные точки и затем среди них всех найти ту, которая дает минимальное значение для функционала $M[\psi]$. Легко видеть, что эта вариационная задача, $\delta M = 0$, эквивалентна отысканию солитонных решений при модели ψ^6 :

$$-\psi + \psi_{xx} + 3\psi^5 = 0.$$

Это уравнение имеет единственное решение $\psi = 1/\sqrt{\text{ch } 2x}$, откуда наилучшая константа находится просто:

$$M_{best} = (2/\pi)^2.$$

В результате неравенство (4.3) переписывается как

$$\int r^6 dx \leq \left(\frac{N}{N_1} \right)^2 \int r_x^2 dx, \quad (4.4)$$

где $N_1 = \pi/2$.

Поставляя далее данное неравенство в (4.2), для энергии E имеем следующую оценку:

$$E \geq \left[1 - C_1 \left(\frac{N}{N_1} \right)^2 \right] \int r_x^2 dx + \int r^2 (\varphi_x + \beta r^2)^2 dx + \frac{\mu}{2} \int r^4 dx. \quad (4.5)$$

Отсюда для $\mu > 0$ следует, что энергия E ограничена снизу нулем, если коэффициент перед интегралом I_1 положителен, что дает ограничение сверху на число частиц:

$$N < \frac{\pi}{2\sqrt{C + \beta^2}} = \frac{N_{cr}}{2}. \quad (4.6)$$

Напомним, что величина $N_{cr}/2$ является нижней границей для семейства солитонов (3.4) с $\mu > 0$. Следовательно, для таких солитонов нельзя сделать никакого заключения об их устойчивости. Однако для солитонных решений с $\mu < 0$ неравенство (4.6) выполняется, и это, как будет видно из последующих оценок, является достаточным для доказательства их устойчивости.

Итак, пусть в (4.5) $\mu < 0$. Для интеграла $\int r^4 dx$ согласно [5] имеем

$$\int r^4 dx \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\int r_x^2 dx \right)^{1/2} N^{3/2}.$$

Подставляя далее эту оценку в (4.5), получаем

$$\begin{aligned} E &\geq \left[1 - C_1 \left(\frac{N}{N_1} \right)^2 \right] I_1 - \frac{|\mu|}{2\sqrt{3}} N^{3/2} I_1^{1/2} + \int r^2 (\varphi_x + \beta r^2)^2 dx \geq \\ &\geq -\frac{|\mu|^2 N^3}{8\sqrt{3}} \left[1 - C_1 \left(\frac{N}{N_1} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Последнее неравенство справедливо только при условии выполнения критерия (4.6). Это означает, что энергия E ограничена снизу, если

$$N < N_{cr}/2,$$

что совместно со всей областью существования солитонов с $\mu < 0$. Следует отметить, что при $\mu = 0$ НУШ (2.23) относится, как говорят, к критическим. Именно начиная с этой нелинейности ($\sim |\psi|^6$ в H), уже возможен коллапс, если энергия E отрицательна. Если $N < N_{cr}/2$, то решение полностью расплывается благодаря дисперсии. Однако малая отрицательная добавка к гамильтониану кардинально изменяет ситуацию. Относительно слабое четырехволновое взаимодействие на фоне сильного притяжения ($\sim |\psi|^6$), приводящего к коллапсу (см., например, [11]), является причиной существования устойчивых связанных стационарных состояний — солитонов. Возникает эффект слабой локализации [12].

5. ЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СОЛИТОНОВ

Предыдущий анализ дал ответ относительно устойчивости только для солитонов со слабым притяжением. Из него невозможно сделать какое-либо заключение об устойчивости солитонов со слабым отталкиванием ($\mu > 0$). В этом разделе мы рассмотрим этот вопрос, исследуя линейную задачу устойчивости.

Будем искать решение уравнения (2.23) в виде

$$\psi = (r + a)e^{i(\phi + \alpha)} \approx (r + a + ir\alpha)e^{i\phi}, \quad (5.1)$$

где r и ϕ — солитонное решение (3.4), (3.5), a и α — малые отклонения соответственно амплитуды и фазы солитона.

Проводя далее линеаризацию уравнения (2.23), легко получить, что динамика возмущений a и α определяется гамильтоновскими уравнениями:

$$2r \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\delta \tilde{H}}{\delta a}, \quad 2r \frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\frac{\delta \tilde{H}}{\delta \alpha}. \quad (5.2)$$

Здесь $\tilde{H} = \delta^2 H$ — вторая вариация гамильтониана (3.4):

$$\tilde{H} = \langle a | L | a \rangle + \int r^2 (\alpha_x + 2\beta r a)^2 dx, \quad (5.3)$$

где оператор (Шредингера) L задается выражением

$$L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda^2 + 2\mu r^2 - 15C_1 r^4. \quad (5.4)$$

Если квадратичная форма $\delta^2 H$ знакоопределенная, то солитонное решение будет устойчиво. Заметим, что второе слагаемое в \tilde{H} (5.3) положительно. Тогда положительность всей квадратичной формы определяется средним значением оператора L :

$$\langle a | L | a \rangle.$$

Среднее в этом выражении берется не по произвольным состояниям $|a\rangle$, а только по таким, которые ортогональны $|r\rangle$:

$$\langle r | a \rangle = 0. \quad (5.5)$$

Это условие ортогональности является следствием сохранения числа частиц и выступает в качестве одного из условий разрешимости линейной системы (5.2). В этом случае нахождение критерия устойчивости для солитонов (2.23) ничем не отличается от вывода Вахитова—Колоколова [13] (см. также [20]) для НУШ без β -члена. Для определения знака необходимо найти спектр оператора L :

$$L\xi = E\xi + Cr. \quad (5.6)$$

Здесь C — неопределенный множитель Лагранжа, который определяется из условия разрешимости (5.5).

Разлагая далее ξ по собственным функциям оператора L ($L\psi_n = E_n\psi_n$) и используя условие разрешимости (5.5), легко получить дисперсионное соотношение

$$f(E) \equiv \sum_n' \frac{\langle r | \psi_n \rangle \langle \psi_n | r \rangle}{E_n - E} = 0. \quad (5.7)$$

Здесь штрих у суммы означает, что в сумме отсутствует слагаемое с $E_1 = 0$ в силу ортогональности собственной (сдвиговой) моды $\psi_1 = r_x$ ($Lr_x = 0$) и r . При этом функция r_x имеет один нуль, поэтому ниже $E_1 = 0$ у оператора L имеется только один уровень, соответствующий основному состоянию.

Рассмотрим теперь функцию $f(E)$ между основным уровнем $E_0 < 0$ и первым положительным E_2 . Во всем диапазоне эта функция монотонно нарастает от $-\infty$ при E_0 до $+\infty$ при E_2 . Поэтому, если $f(0) > 0$, спектр оператора L имеет отрицательное собственное значение и, следовательно, среднее значение оператора L может быть отрицательным. При $f(0) < 0$ среднее от L всегда положительно.

Чтобы найти знак $f(0)$, легко видеть, что

$$f(0) = \sum_n \frac{\langle r | \psi_n \rangle \langle \psi_n | r \rangle}{E_n} \equiv \langle r | L^{-1} | r \rangle.$$

Дифференцируя далее уравнение (3.3) по λ^2 , получаем:

$$L \frac{\partial r}{\partial \lambda^2} = -r \quad \text{или} \quad \frac{\partial r}{\partial \lambda^2} = -L^{-1}r.$$

Подстановка этого соотношения дает [13]

$$f(0) = -\frac{1}{2} \frac{\partial N}{\partial \lambda^2}. \tag{5.8}$$

Таким образом, если $\partial N / \partial \lambda^2 > 0$, квадратичная форма будет положительно-определенной. Именно такая ситуация имеет место для солитонов со слабым притяжением, в силу чего они устойчивы. Этот вывод полностью согласуется с результатами предыдущего раздела.

Для солитонов со слабым отталкиванием ($\mu > 0$) критерий (5.8) дает знаконеопределенность квадратичной формы \tilde{H} , что является необходимым условием для неустойчивости. Этот критерий является также достаточным только в случае $\beta = 0$, когда среднее значение L в (5.3) можно интерпретировать как потенциальную энергию, а интеграл $\int r^2 \alpha_x^2 dx$ — как кинетическую энергию.

Можно привести некоторые аргументы в пользу того, что солитон со слабым отталкиванием тем не менее неустойчив и при $\beta \neq 0$. Среднее значение от L можно, взяв в качестве a собственную функцию ξ с $E < 0$, сделать отрицательным. По заданному значению ξ всегда можно найти такую фазу α , чтобы интеграл

$$\int r^2 (\alpha_x + 2\beta r a)^2 dx$$

обращался в нуль. Таким образом, гамильтониан \tilde{H} может быть сделан отрицательным, что с физической точки зрения можно считать достаточным для неустойчивости. Однако, строго говоря, это еще требует определенного доказательства, чего автор пока не может предъявить. Пример, который опровергает это рассуждение, хорошо известен. Гамильтониан $H = -p^2/2 - q^2/2$ дает уравнения движения для обычного устойчивого осциллятора, несмотря на отрицательность H . Однако можно утверждать строго, что при малых значениях β неустойчивость сохранится. Существует ли порог по β , пока неясно, но он вероятен. Для того чтобы как-то прояснить этот вопрос, обратимся к линейным уравнениям (5.2), переписав их в новых переменных:

$$p = \tau a, \quad g_x = \alpha_x + 2\beta \tau a.$$

В этих переменных уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial g}{\partial t} + 4\beta r^2 \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{r} L \frac{1}{r} p, \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} r^2 \frac{\partial}{\partial x} g. \quad (5.10)$$

При $\beta = 0$ эта система сводится для возмущения амплитуды a к уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} a = -L_0 L a \quad (5.11)$$

с

$$L_0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} r^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right),$$

из которого впервые и был выведен критерий (5.8) (ср. с [13, 20]). Важно, что оператор L_0 в (5.11) неотрицателен (в силу того что $L_0 r = 0$, а сама функция r не имеет нулей). Поэтому правая часть (5.11), ввиду наличия отрицательного собственного значения у оператора L , в случае солитона со слабым отталкиванием дает в целом отрицательное «собственное» значение, обеспечивая абсолютную неустойчивость солитона.

При $\beta \neq 0$ в уравнении (5.9) появился дополнительный член конвективного вида, который может изменить характер самой неустойчивости. Может ли привести конвекция к стабилизации неустойчивости, пока неясно.

Но несмотря на некоторую неопределенность с линейной устойчивостью, следует отметить, что солитон со слабым отталкиванием всегда неустойчив относительно конечных возмущений. Это следует, в частности, из того, что при масштабных преобразованиях

$$\psi_s \rightarrow \frac{1}{\zeta^{1/2}} \psi_s \left(\frac{x}{\zeta} \right),$$

оставляющих неизменным число частиц N , энергия $E = H - \lambda^2 N$ как функция от масштабного параметра ζ при $N > N_{cr}/2$ оказывается неограниченной снизу при $\zeta \rightarrow 0$. Последнее, как известно (см., например, обзоры [18, 22]), является одним из критериев волнового коллапса.

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В заключение нам хотелось бы обсудить возможность реализации жесткого режима возбуждения солитонов в оптике. Поскольку в трехмерных и двумерных средах солитоны неустойчивы вблизи порога относительно модуляционной неустойчивости, единственная возможность реализации этого режима — это оптоволокно.

Как известно (см., например, [23, 24]), керровская константа для большинства сред, включая стекла, положительна. Поэтому для изменения характера взаимодействия (от притяжения к отталкиванию) имеются две возможности.

Первая возможность связана с уменьшением самого матричного элемента за счет трехволнового взаимодействия. В силу симметричных свойств собственная квадратичная нелинейность в стеклах отсутствует, соответствующий тензор нелинейной восприимчивости $\chi_{ijk} \equiv 0$ [25]. Поэтому остается единственный процесс — стрикция — взаимодействие света со звуком. Для того чтобы оценить роль этого механизма, можно воспользоваться уравнениями, полученными впервые в работе [26]:

$$i\psi_t = \frac{\delta H}{\delta \psi^*}, \quad n_t = \frac{\delta H}{\delta \Phi}, \quad \Phi_t = -\frac{\delta H}{\delta n}, \quad (6.1)$$

где ψ — (безразмерная) огибающая электромагнитного поля, n — низкочастотные флуктуации плотности, а Φ — гидродинамический потенциал. Здесь гамильтониан H складывается из гамильтониана электромагнитных волн

$$H = \int \left(-iv_{gr}\psi^*\psi_x + \frac{\omega''}{2}|\psi_x|^2 - |\psi|^4 \right) dx, \quad (6.2)$$

гамильтониана звуковых колебаний

$$H = \frac{1}{2} \int (c_s^2 n^2 + \Phi_x^2) dx \quad (6.3)$$

и гамильтониана взаимодействия звука и света

$$H = \int \gamma n |\psi|^2 dx. \quad (6.4)$$

В этих выражениях v_{gr} — групповая скорость высокочастотных электромагнитных волн, c_s — скорость звука, γ — константа взаимодействия ВЧ- и НЧ-волн, пропорциональная производной диэлектрической постоянной по плотности $\partial \epsilon / \partial n_0$. При этом керровская константа нормирована на единицу.

Уравнения движения для ВЧ- и НЧ-волн, следующие из этого гамильтониана, имеют вид

$$i(\psi_t + v_{gr}\psi_x) + \frac{1}{2}\omega''\psi_{xx} + |\psi|^2\psi = \gamma n\psi,$$

$$n_{tt} - c_s^2 n_{xx} = \gamma |\psi|_{xx}^2.$$

В этой системе важна разница между групповой скоростью электромагнитной волны, которая порядка скорости света, и скоростью звука c_s : $v_{gr} \gg c_s$. Последнее означает, что электромагнитный импульс и индуцируемые им флуктуации плотности в основном будут двигаться с групповой скоростью. Поэтому для n мы имеем локальную зависимость от интенсивности:

$$n = \frac{\gamma^2}{v_{gr}^2} |\psi|^2.$$

Важно подчеркнуть, что пондеромоторная сила приводит не к образованию ямки плотности, а к повышению плотности. В результате четырехволновый матричный элемент перенормируется:

$$T(\equiv -1) \rightarrow -1 + \frac{\gamma^2}{v_{gr}^2},$$

уменьшая свое значение.

Таким образом, стрикционный механизм может уменьшать четырехволновый матричный элемент, обусловленный эффектом Керра, и в принципе изменить его знак.

Вторая возможность — переход из области аномальной дисперсии в область нормальной, когда происходит изменение знака дисперсии ω'' . С точки зрения эксперимента второй вариант наиболее просто реализуется, однако при этом четырехволновый

матричный элемент T , как правило, не изменяет своего знака и не имеет, кроме того, малой константы μ . Поэтому как в том, так и другом варианте требуются такие стекла, легированные определенными добавками, повышающими стрикционную константу γ . В качестве стекол нужно выбирать те, у которых максимальны коэффициенты усиления при рассеянии Манделштамма—Бриллюэна. Данные стекловолокна были бы интересны не только с точки зрения наблюдения солитонов, исследованных в данной работе, но также изучения одномерного волнового коллапса.

Автор благодарит В. Е. Захарова и Ф. Диаса (F. Dias) за полезные обсуждения, а также Е. И. Каца за ряд ценных замечаний. Эта работа была поддержана программой INTAS (грант 96-0413), Российским фондом фундаментальных исследований (грант 97-01-00093) и грантом NATO OUTF.LG 970583.

Литература

1. M. S. Loguet-Higgins, J. Fluid Mech. **200**, 951 (1989).
2. G. Iooss and K. Kirchgassner, C. R. Acad. Sci. Paris **311**, I, 265 (1991).
3. J.-M. Vanden-Broeck and F. Dias, J. Fluid Mech. **240**, 549 (1992); F. Dias and G. Iooss, Physica D **65**, 399 (1993).
4. M. S. Loguet-Higgins, J. Fluid Mech. **252**, 703 (1993).
5. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, ЖЭТФ **113**, 1892 (1998).
6. Л. Д. Ландау, ДАН СССР **44**, 339 (1944); Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика сплошных сред*, Москва, Наука (1953).
7. F. Dias and G. Iooss, Eur. J. Mech., B/Fluids **15**, 367 (1996).
8. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, УФН **167**, 1 (1997).
9. G. Iooss, C. R. Acad. Sci. Paris **324**, 993 (1997).
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика, часть 1*, Москва, Наука (1995), с. 521.
11. Е. А. Kuznetsov and S. K. Turitsyn, Phys. Lett. A **112**, 273 (1985).
12. Е. I. Kats, V. V. Lebedev, and A. R. Muratov, Phys. Rep. **228**, 1 (1993).
13. Н. Г. Вахитов, А. А. Колоколов, Изв. ВУЗов Радиофизика **16**, 1020 (1973).
14. Е. А. Kuznetsov, Phys. Lett. A **101**, 314 (1983).
15. J. Nycander, Chaos **4**, 253 (1994).
16. Е. М. Громов, В. И. Таланов, Изв. ВУЗов Радиофизика, **XXXIX**, 735 (1996); ЖЭТФ **109**, 1 (1996).
17. В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, ЖЭТФ **61**, 118 (1971).
18. V. E. Zakharov, in: *Handbook of Plasma Physics*, Vol. 2, Basic Plasma Physics II, ed. by A. Galeev and R. Sudan, North-Holland (1984), p. 81.
19. A. C. Newell, *Solitons in Mathematics and Physics*, SIAM, Philadelphia (1985).
20. Е. А. Kuznetsov, А. М. Rubenchik, and V. E. Zakharov, Phys. Rep. **142**, 103 (1986).
21. Е. А. Kuznetsov, J. J. Rasmussen, K. Rypdal, and S. K. Turitsyn, Physica D **87**, 273 (1995).
22. Е. А. Kuznetsov, Chaos **6**, 381 (1996).
23. N. Bloembergen, *Nonlinear Optics*, Benjamin, Reading, Mass. (1977).
24. G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Boston, Academic Press, Inc. (1989); пер.: *Нелинейная волоконная оптика*, Москва, Мир (1996).
25. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Москва, Наука (1982).
26. В. Е. Захаров, А. М. Рубенчик, ПМТФ **13**, 669 (1974).