

## ДИНАМИКА СОЛИТОНОВ БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ

А. В. Слюняев\*

*Нижегородский государственный университет  
603600, Нижний Новгород, Россия*

Е. Н. Пелиновский†

*Институт прикладной физики Российской академии наук  
603600, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 4 декабря 1998 г.

Рассмотрены процессы взаимодействия и генерации солитонов в нелинейных интегрируемых системах, допускающих существование солитона предельной амплитуды. В качестве такой интегрируемой системы рассмотрено уравнение Гарднера, частными случаями которого являются уравнение Кортевега—де Вриза (для квадратичной нелинейности) и модифицированное уравнение Кортевега—де Вриза (для кубической нелинейности). Получено двухсолитонное решение уравнения Гарднера, определен критерий, разделяющий различные сценарии взаимодействия двух солитонов. Рассмотрена эволюция начального импульсного возмущения. В частности, показано, что в процессе эволюции на гребне предельного солитона появляются солитоны противоположной полярности.

PACS: 02.30 Jg, 94.10 Jd

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Открытое еще в 1895 г. для волн на воде уравнение Кортевега—де Вриза является наиболее популярной моделью для описания нелинейных волн в слабодиспергирующей среде. Оно по существу послужило первым полигоном для доказательства частицеподобных свойств нелинейного волнового поля в виде стабильных солитонов и интегрируемости эволюционной задачи с помощью метода обратной задачи теории рассеяния, позволившего доказать исключительную роль солитонов в асимптотическом представлении волнового поля на больших временах. Уравнение Кортевега—де Вриза получается в первом порядке теории возмущений по малой амплитуде волны и слабой высокочастотной дисперсии, поэтому оно применимо для описания разнообразных волновых движений в океане и атмосфере, плазме и астрофизике, нелинейных линиях передач. В самом общем виде оно может быть представлено как

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (c + \alpha u) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (1)$$

где  $c$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  — постоянные, определяемые спецификой физической задачи. В некоторых случаях квадратичная нелинейность отсутствует, и тогда в первом порядке теории

\*E-mail: avs@appl.sci-nnov.ru

†E-mail: enpeli@appl.sci-nnov.ru

возмущений получается модифицированное уравнение Кортевега—де Вриза:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (c + \alpha_1 u^2) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (2)$$

В частности, такое уравнение получено для электромагнитных поверхностных волн в электрическом поле [1], волн в размерно-квантованных пленках [2], внутренних волн в океане с определенной стратификацией [3]. Модифицированное уравнение Кортевега—де Вриза также точно решается методом обратной задачи теории рассеяния [4], и солитоны и кинки (ударные перепады) здесь также определяют асимптотическое представление волнового поля. Если квадратичная нелинейность отлична от нуля, то кубическая нелинейность получается в следующем порядке теории возмущений и может удерживаться в уравнении наряду со следующими поправками по дисперсии, включая и нелинейную дисперсию (см., например, [5]). Уравнения такого типа практически только сейчас начали изучаться [6, 7]. Однако из общих соображений ясно, что в пределах теории возмущений эффекты, связанные с малыми поправками высших порядков, должны быть малы и не должны приводить к кардинальным изменениям в форме, например, солитонов (хотя также понятно, что могут возникать и новые особенности, например неупругость взаимодействия солитонов и их медленное разрушение вследствие радиационных эффектов). Между тем имеются ситуации, когда коэффициент при квадратичной нелинейности может быть достаточно малым, так что квадратичная и кубическая нелинейности оказываются величинами одного порядка, и в то же время нет необходимости учитывать следующие порядки по дисперсии. Получаемое здесь расширенное уравнение Кортевега—де Вриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (c + \alpha u + \alpha_1 u^2) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (3)$$

носит имя Гарднера и в случаях, когда один из нелинейных коэффициентов равен нулю, дает уравнения (1) и (2) соответственно.

Целью настоящей статьи является демонстрация новых физических эффектов, связанных с генерацией и взаимодействием солитонов большой амплитуды, когда квадратичная и кубическая нелинейности оказываются величинами одного порядка.

По-видимому, впервые уравнение Гарднера (3) было получено строго в рамках асимптотической теории для длинных внутренних волн в двухслойной жидкости со скачком плотности на границе раздела [8, 9]. Соответствующие выражения для коэффициентов этого уравнения имеют вид (в приближении малости скачка плотности)

$$c = \sqrt{g \frac{\Delta \rho}{\rho} \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}}, \quad \beta = \frac{c h_1 h_2}{6}, \quad \alpha = \frac{3c}{2} \frac{h_1 - h_2}{h_1 h_2}, \quad (4)$$

$$\alpha_1 = -\frac{3c}{8h_1^2 h_2^2} (h_1^2 + h_2^2 + 6h_1 h_2),$$

где  $u$  — вертикальное смещение границы раздела,  $h_1$  и  $h_2$  — толщины верхнего и нижнего слоев соответственно,  $\Delta \rho / \rho$  — относительная величина скачка плотности и  $g$  — ускорение силы тяжести. Как видно из (4), коэффициент квадратичной нелинейности может менять знак при  $h_1 \sim h_2$  (и это ведет к интересным особенностям трансформации солитона в случае наклонной границы, см. [10–12]), в то время как коэффициент

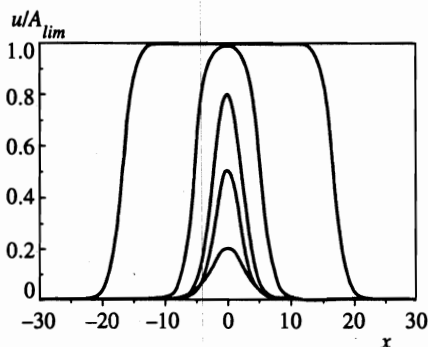


Рис. 1. Форма солитона при различных амплитудах

кубической нелинейности отрицателен. Недавно формулы для коэффициентов уравнения (3) были обобщены для произвольной плотностной стратификации жидкости [13] и показано, что коэффициент кубической нелинейности может быть любого знака [3]. Если считать глубины слоев примерно равными между собой и много меньшими длины волны, амплитуду волны малой по сравнению с глубиной, то квадратичная и кубическая нелинейности могут рассматриваться малыми и сопоставимыми между собой ( $\alpha u/c \sim \alpha_1 u^2/c \ll 1$ ), а также с дисперсией. Поскольку при этом обе нелинейности оказываются членами одного порядка (в традиционных схемах возмущений кубическая нелинейность всегда меньше квадратичной), в этом смысле можно говорить о волнах большой амплитуды (отметим, что в «житейском» смысле такие волны в океане могут достигать больших амплитуд в десятки метров). В этой работе будет рассмотрен случай, когда коэффициент кубической нелинейности отрицателен, как для двухслойной жидкости ( $\alpha_1 < 0$ ).

Как известно, односолитонное решение уравнения Гарднера легко находится в явном виде:

$$u(x, t) = \frac{6\beta\Gamma^2}{\alpha} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + (6\alpha_1\beta\Gamma^2/\alpha^2) \operatorname{ch}[\Gamma(x - Vt)]}}, \quad V = c + \beta\Gamma^2, \quad (5)$$

где  $\Gamma^{-1}$  — эффективная ширина солитона. При малых  $\Gamma$  решение (5) описывает солитон Кортевега—де Вриза с амплитудой  $A = 3\beta\Gamma^2/\alpha$  (его полярность определяется знаком коэффициента квадратичной нелинейности), а при  $\Gamma \rightarrow \alpha/(6|\alpha_1|\beta)^{1/2}$  солитон приобретает прямоугольную форму (рис. 1) с предельной амплитудой

$$A_{lim} = -\alpha/\alpha_1. \quad (6)$$

Удобно нормализовать волновое поле на предельную амплитуду, а также изменить масштабы расстояния и времени:

$$v(y, \tau) = -\frac{\alpha_1}{\alpha} u(x, t), \quad y = \sqrt{-\frac{\alpha^2}{6\beta\alpha_1}} (x - ct), \quad \tau = \beta \left( -\frac{\alpha^2}{6\beta\alpha_1} \right)^{3/2} t. \quad (7)$$

Тогда уравнение Гарднера переписывается в безразмерной форме

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + 6v(1 - v) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} = 0, \quad (8)$$

и солитон будет иметь положительную полярность с амплитудой от нуля до единицы.

Следует прежде всего отметить, что обобщенное преобразование Миуры [9]

$$Q = -v + v^2 + v_y \quad (9)$$

сводит уравнение (8) к «классическому» уравнению Кортевега—де Вриза

$$Q_\tau - 6QQ_y + Q_{yyy} = 0 \quad (10)$$

и тем самым доказывает интегрируемость уравнения Гарднера методом обратной задачи теории рассеяния [9, 14] и, следовательно, упругий характер соударений солитонов. Тем не менее «восстановление» функции  $v(y, \tau)$  через  $Q(y, \tau)$  требует решения уравнения Рикатти (9) и не выражается в простом виде. С другой стороны, простая замена переменных

$$v = 1/2 + w \quad (11)$$

сводит уравнение Гарднера (8) к модифицированному уравнению Кортевега—де Вриза относительно функции  $w(y, \tau)$  и позволяет также использовать известные точные решения этого уравнения.

Здесь будет рассмотрен процесс взаимодействия солитонов и их возникновение из начального импульсного возмущения. Взаимодействие солитонов и эволюция начального возмущения проиллюстрированы результатами численного моделирования.

## 2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СОЛИТОНОВ

### 2.1. Получение мультисолитонных решений с помощью преобразований Дарбу

Поскольку с помощью замены (11) уравнение Гарднера сводится к модифицированному уравнению Кортевега—де Вриза, его  $N$ -солитонное решение можно искать как решение модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза на пьедестале, что и было сделано в работе [15] в рамках метода обратной задачи теории рассеяния. Нами для получения двухсолитонного решения используется другой метод, основанный на преобразованиях Миуры и Дарбу [16], описанный в работе [17]. Приведем суть метода.

Как известно, уравнение Кортевега—де Вриза является условием совместности системы уравнений (так называемой  $L$ - $A$ -пары Лэкса)

$$\begin{aligned} \hat{L}\Psi &= \lambda\Psi, \\ \hat{A}\Psi &= \Psi_\tau, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\hat{L} = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} + Q(y, \tau), \quad (13)$$

$$\hat{A} = -4\frac{\partial^3}{\partial y^3} + 6Q\frac{\partial}{\partial y} + 3\frac{\partial Q}{\partial y}. \quad (14)$$

Первое уравнение системы (12) — стационарное уравнение Шредингера с временем  $\tau$ , входящим в качестве параметра. Второе уравнение описывает временную зависимость

решения. Условие совместности системы (12), получаемое исключением функции  $\Psi$  и приводящее систему (12) к уравнению Кортевега—де Вриза (10), выглядит как

$$\hat{L}_\tau = [\hat{A}, \hat{L}], \tag{15}$$

где  $[\hat{A}, \hat{L}] = \hat{A}\hat{L} - \hat{L}\hat{A}$  — коммутатор операторов. Известно также, что  $L$ - $A$ -пара ковариантна по отношению к преобразованиям Дарбу

$$\tilde{Q} = Q - 2\sigma_y, \quad \sigma = \frac{\Psi_{1y}(y, \lambda_1)}{\Psi_1(y, \lambda_1)}, \tag{16}$$

$$\tilde{\Psi}(y, \lambda) = \left( \frac{\partial}{\partial y} - \sigma \right) \Psi(y, \lambda),$$

где  $\Psi(y, \lambda)$  и  $\tilde{\Psi}(y, \lambda)$  — общие решения стационарного уравнения Шредингера с потенциалами  $Q(y)$  и  $\tilde{Q}(y)$  соответственно,  $\Psi_1(y, \lambda_1)$  — его частное решение с потенциалом  $Q(y)$  и собственным значением  $\lambda = \lambda_1$ . Преобразованные потенциалы  $\tilde{Q}(y, \tau)$  будут являться новыми нетривиальными решениями уравнения (10). Эта процедура известна и дает возможность получать мультисолитонные решения уравнения Кортевега—де Вриза.

В [17] замечено, что если ввести в рассмотрение функцию

$$w(y, \tau) = \frac{\Psi_y(y, \tau)}{\Psi(y, \tau)}, \tag{17}$$

выразить из первого уравнения системы (12)  $Q$  и  $Q_y$  и подставить их во второе уравнение системы, то для совместности  $L$ - $A$ -пары должно выполняться модифицированное уравнение Кортевега—де Вриза относительно функции  $w(y, \tau)$ :

$$w_\tau - 6(\lambda + w^2)w_y + w_{yyy} = 0, \tag{18}$$

в чем нетрудно убедиться. Таким образом, применяя преобразования Дарбу, вместе с новыми решениями уравнения Кортевега—де Вриза будут находиться и новые решения модифицированного уравнения (и уравнения Гарднера по замене (11)) — функции  $w(y, \tau)$ .

Для неоднократного применения схемы Дарбу справедливы обобщенные формулы Крама [18], позволяющие исключить промежуточные выкладки. Для двукратного применения они выглядят следующим образом:

$$\tilde{\tilde{Q}} = Q - 2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \ln W_2(\Psi_1, \Psi_2),$$

$$\tilde{\tilde{\Psi}} = \frac{W_3(\Psi_1, \Psi_2, \Psi)}{W_2(\Psi_1, \Psi_2)},$$

где

$$W_2 = \begin{vmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ \Psi_1' & \Psi_2' \end{vmatrix}, \quad W_3 = \begin{vmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi \\ \Psi_1' & \Psi_2' & \Psi' \\ \Psi_1'' & \Psi_2'' & \Psi'' \end{vmatrix}, \tag{19}$$

производная от функций подразумевается по переменной  $y$ .

## 2.2. Двухсолитонное решение уравнения Гарднера

Чтобы получить односолитонное решение уравнения Гарднера на основе преобразований Дарбу, нужно выбрать потенциал

$$Q = 1/4, \quad (20)$$

«затравочную» функцию

$$\Psi_1 = \text{ch} [(\Gamma_1/2)(y - \delta_1 - \Gamma_1^2\tau)], \quad (21)$$

где

$$\delta_1 = (1/\Gamma_1) \text{arth } \Gamma_1, \quad (22)$$

и общее решение

$$\Psi = \exp [-(y - \Gamma_1^2\tau)/2] \quad (23)$$

(мы выбрали  $\lambda = 0$ , исключая лишний член в уравнении (18)).

Тогда, следуя формулам (16), имеем,

$$\sigma = \frac{\Gamma_1}{2} \text{th} \left[ \frac{\Gamma_1}{2} (y - \delta_1 - \Gamma_1^2\tau) \right],$$

$$\tilde{Q} = \frac{1}{4} - \frac{\Gamma_1^2}{2 \text{ch}^2 [(\Gamma_1/2)(y - \delta_1 - \Gamma_1^2\tau)]}, \quad (24)$$

$$w_1(y, \tau) = -\frac{1}{2} + \frac{\Gamma_1^2}{1 + \text{ch} [\Gamma_1(y - \delta_1 - \Gamma_1^2\tau)] + \Gamma_1 \text{sh} [\Gamma_1(y - \delta_1 - \Gamma_1^2\tau)]}. \quad (25)$$

Далее, подставляя (25) в (11) и используя (22), приходим к односолитонному выражению для безразмерного уравнения Гарднера (8):

$$v_1(y, \tau) = \frac{\Gamma_1^2}{1 + \sqrt{1 - \Gamma_1^2} \text{ch} [\Gamma_1(y - \Gamma_1^2\tau)]}. \quad (26)$$

Солитон (26) достигает своей предельной амплитуды при  $\Gamma_1 \rightarrow 1$ , в этом случае солитонное выражение удобно представлять в виде совокупности кинка и антикинка:

$$v_1(y, \tau) = \frac{1}{2} [\text{th } Z_+ - \text{th } Z_-], \quad Z_{\pm} = \frac{\Gamma_1}{2} (y - \Gamma_1^2\tau \pm \delta_1), \quad (27)$$

где  $\delta_1$  соответствует полуширине предельного солитона.

Возникновение потенциала (20) в нашем случае удобно пояснить, используя преобразование в форме Миуры

$$Q = w^2 + w_y, \quad (28)$$

переводящее решения уравнения (18) в решения уравнения Кортевега—де Вриза. Подставляя (17) в (28), получаем первое уравнение системы (12) с  $\lambda = 0$ , т.е. условием

совместности  $L$ - $A$ -пары, когда решения  $w(\Psi)$  и  $Q$  связаны выражением (28), является уравнение (18) без «скоростного» члена. Как легко видеть, потенциал (20) есть тот уровень, на котором будет распространяться солитон уравнения Кортевега—де Вриза, полученный из солитона уравнения Гарднера после преобразований (11) и (28). Если использовать преобразование Миуры в виде (9), то в стационарном уравнении Шредингера следовало бы выбирать  $Q = 0$ ,  $\lambda = -1/4$ , что дает тот же результат, но удобнее для нахождения временного поведения решений из (14).

Для получения двухсолитонного решения уравнения Гарднера нужно выбрать второе «затравочное» решение:

$$\Psi_2 = \text{sh} [(\Gamma_2/2)(y - \delta_2 - \Gamma_2^2\tau)], \tag{29}$$

где

$$\delta_2 = (1/\Gamma_2) \text{arth} \Gamma_2. \tag{30}$$

Полученное таким образом по формулам (19) и (17) двухсолитонное решение (см. Приложение А) может быть записано как

$$v_2(y, \tau) = \frac{1}{2}(\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2) \left( \frac{1}{\Gamma_2 \text{cth} Z_{2+} - \Gamma_1 \text{th} Z_{1+}} - \frac{1}{\Gamma_2 \text{cth} Z_{2-} - \Gamma_1 \text{th} Z_{1-}} \right), \tag{31}$$

$$Z_{j\pm} = \frac{\Gamma_j}{2}(y - \Gamma_j^2\tau \pm \delta_j),$$

где  $\Gamma_2 > \Gamma_1 > 0$  — произвольные параметры, определяющие ширины отдельных солитонов на бесконечном удалении друг от друга,  $\delta_j$  определены в (22) и (30). Двухсолитонное выражение (31) было получено с использованием метода Хироты в работе [19] и применено для описания взаимодействия солитона с кинком, приведенного в [1]. Как и для одиночного солитона, выражение (31) можно переписать и в другом виде, «развязывающем» солитоны:

$$v_2(y, \tau) = \frac{\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2}{(\Gamma_2 \text{cth} Z_{2+} - \Gamma_1 \text{th} Z_{1+})(\Gamma_2 \text{cth} Z_{2-} - \Gamma_1 \text{th} Z_{1-})} \times$$

$$\times \left( \frac{\Gamma_1^2}{1 + \sqrt{1 - \Gamma_1^2} \text{ch} [\Gamma_1(y - \Gamma_1^2\tau)]} - \frac{\Gamma_2^2}{1 - \sqrt{1 - \Gamma_2^2} \text{ch} [\Gamma_2(y - \Gamma_2^2\tau)]} \right). \tag{32}$$

Таким образом, двухсолитонное решение находится аналитически. Исследование процесса взаимодействия двух солитонов дано в следующем разделе.

### 2.3. Взаимодействие двух солитонов

Как и ожидалось, взаимодействие солитонов с амплитудами меньшими предельной идет по известному сценарию в уравнении Кортевега—де Вриза (в рамках (31)): если разница в амплитудах велика, то большой солитон, имеющий большую скорость, просто перегоняет маленький, образуя в максимальный момент взаимодействия одногорбую фигуру; если же разница в скоростях невелика, то задний (большой) солитон отдает энергию переднему (меньшему) солитону и сам тормозится, передний же ускоряется (процесс обмена амплитудами между солитонами). Наиболее интересен случай, когда один из солитонов (находящийся сзади) имеет амплитуду близкую к предельной,

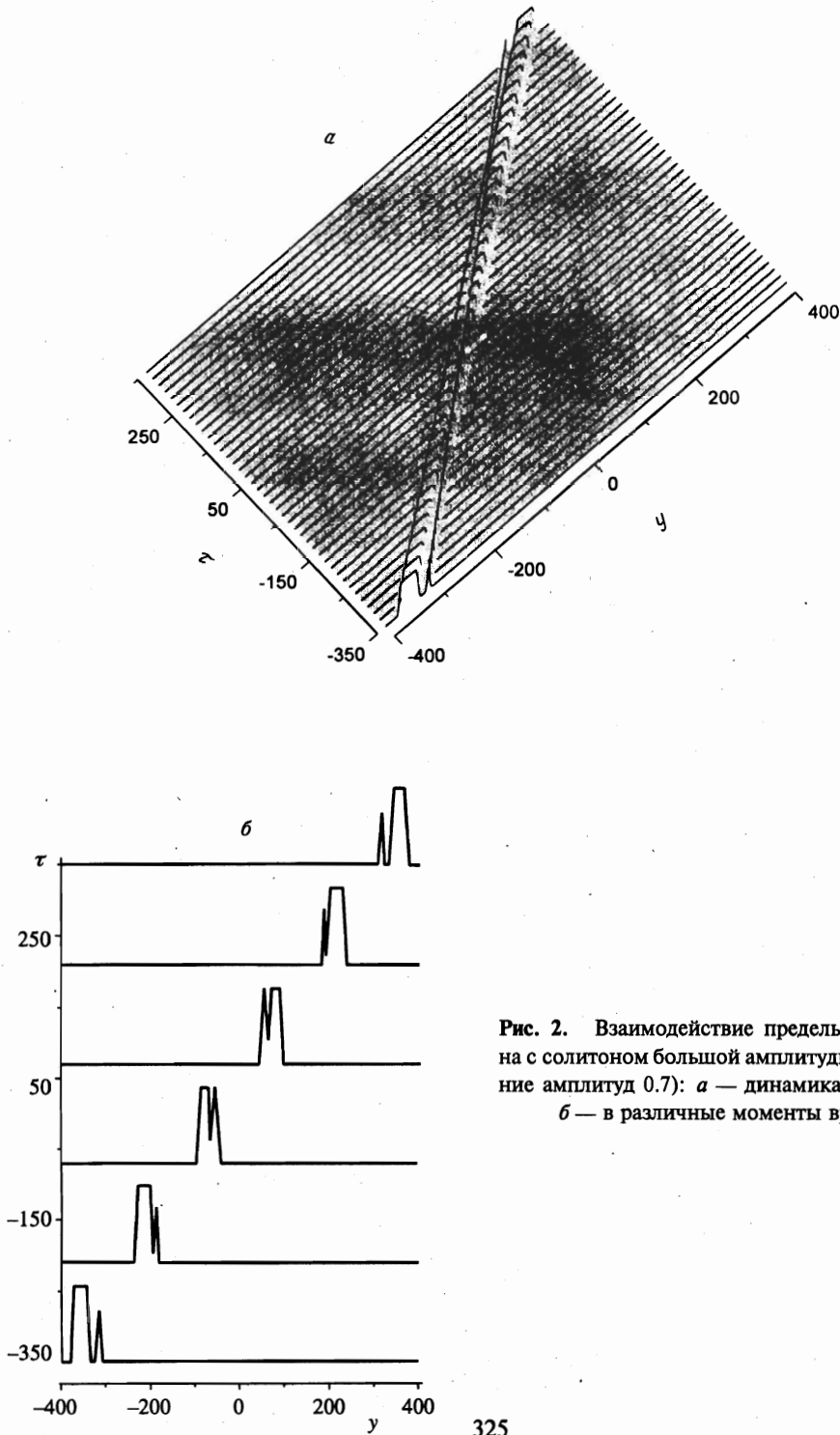


Рис. 2. Взаимодействие предельного солитона с солитоном большой амплитуды (соотношение амплитуд 0.7): *a* — динамика во времени; *б* — в различные моменты времени



а второй, находящийся впереди, имеет «нормальную» амплитуду. Даже если передний солитон является маленьким, в процессе взаимодействия «объединенная» волна не превышает предельного значения и в ней образуется провал, характерный для обменного взаимодействия [20]. Для более близких значений амплитуд процесс взаимодействия показан на рис. 2 (отношение амплитуд 0.7): меньший солитон взаимодействует с передним склоном предельного солитона (который движется быстрее) и переворачивается на его вершине, свободно по ней движется и затем «сползает» по заднему склону предельного солитона, восстанавливая свою первоначальную полярность.

Существование солитона отрицательной полярности на гребне предельного солитона понятно уже из уравнения Гарднера (3): его решение на пьедестале  $u = A_{lim}$  удовлетворяет тому же уравнению (3), но с противоположным знаком квадратичной нелинейности, что и приводит к появлению солитона отрицательной полярности. В то же время, как видно на рис. 2б, малый солитон последовательно взаимодействует с каждым склоном предельного солитона, каждый из которых может быть интерпретирован как кинк и антикинк. Взаимодействие солитона с кинком (антикинком) «в чистом виде» с изменением полярности уже анализировалось численно [1] для модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза, к которому уравнение Гарднера может быть сведено строго заменой (11). Последовательные соударения сначала с кинком, а затем с антикинком и должны вести к восстановлению первоначальной полярности солитона, вытекающему из (31). Таким образом, провал на картинках взаимодействующих солитонов может быть интерпретирован как солитон отрицательной полярности.

Точное двухсолитонное решение (31) позволяет найти критерий, определяющий, какой вид взаимодействия реализуется. Во время взаимодействия солитонов существует момент, когда двухсолитонное решение становится симметричным по координате. Как следует из выражения (31), этому моменту соответствует время  $\tau = 0$ . Чтобы определить, какой вид взаимодействия солитонов — обгон или обмен — реализуется, нужно вычислить вторую производную от этого распределения в центральной точке ( $y = 0$ ). Положительное значение производной отвечает обменному взаимодействию (наличие впадины), отрицательное — обгону. Проведя вычисления, можно убедиться (Приложение Б, разд. Б. 1), что для обгонного взаимодействия должно выполняться условие

$$A_2 < \frac{3r - 1}{3r - 1 - r^2}, \quad (33)$$

где  $r = A_1/A_2$  ( $0 < A_1 < A_2 < 1$ ),  $A_1$  и  $A_2$  — амплитуды солитонов. Для солитонов малых амплитуд граничное отношение равно  $r = 1/3$ , как и для случая взаимодействия «квадратичных» солитонов [21]; с увеличением амплитуды большего солитона критическое отношение уменьшается, предельный солитон всегда взаимодействует с другим по сценарию обмена (рис. 3). Таким образом, для солитонов с большими амплитудами преобладает обменное взаимодействие.

Как и для солитонов уравнения Кортевега—де Вриза, высота центральной точки двухсолитонного решения в «седловой» момент взаимодействия  $v_2$  ( $y = 0, \tau = 0$ ), когда образуется симметричная фигура, равна разности амплитуд солитонов  $A_2 - A_1$  (см. Приложение Б, разд. Б.2). В случае, когда один из солитонов стремится к предельному ( $\Gamma_2 \rightarrow 1$ ), выражение (31) сводится к первому солитону обратной полярности, движущемуся на уровне предельной амплитуды (Приложение Б, разд. Б.4). Из анализа зависимостей величин наивысшей точки симметричного распределения от амплитуды большего солитона для разных значений параметра  $r$  следует, что решение не превышает

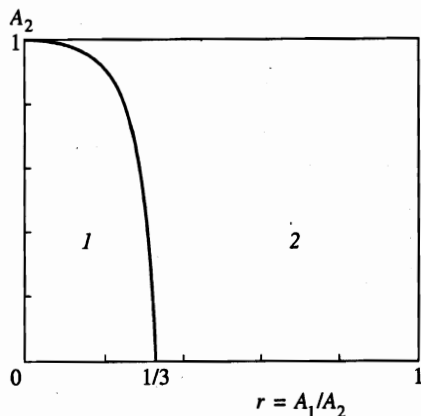


Рис. 3. Обгонное (область 1) и обменное (область 2) взаимодействие двух солитонов на плоскости параметров

ет предельной амплитуды, а для минимизации симметричного волнового поля нужно выбирать  $r = 1/3$ .

При взаимодействии солитоны приобретают фазовый сдвиг. Для случая, когда один из солитонов близок к предельному, возникновение фазового сдвига с очевидностью следует из факта сохранения массы уравнения Гарднера: когда меньший солитон, меняя свою полярность, поднимается на хребет предельного, возникающий дефицит интеграла массы компенсируется сдвигом вперед взаимодействующего склона предельного солитона. При спуске меньшего солитона избыток массы компенсируется сдвигом вперед уже заднего склона предельного солитона. Чтобы найти эту величину, нужно сначала рассмотреть солитон до взаимодействия, а потом — после него. Из выражения (31) может быть найден сдвиг фаз при взаимодействии солитонов (он виден на рис. 2а):

$$\Delta y_{1,2} = \pm \frac{2}{\Gamma_{1,2}} \ln \frac{\Gamma_2 + \Gamma_1}{\Gamma_2 - \Gamma_1} \quad (34)$$

(см. Приложение Б, разд. Б.3). В работе [15] сдвиг фаз (34) был найден из асимптотики решения, а в [1] — для взаимодействия солитона и ударной волны — из интегралов уравнения.

Итак, критерий, разделяющий типы взаимодействия, есть граничное отношение амплитуд солитонов, которое является функцией амплитуды большего солитона. Если этот параметр не превышает критического значения (большая разница в амплитудах), то взаимодействие солитонов происходит без образования провала — процесс обгона. Если же, наоборот, параметр больше критического (близкие амплитуды), то в момент столкновения на фоне большой волны возникает провал — только обменное взаимодействие. При этом обмен маленького солитона с большим может быть интерпретирован как последовательное взаимодействие солитона с каждым склоном предельного солитона (кинком и антикинком) с изменением его полярности на промежуточной стадии. Амплитуда волны в любой момент времени не превышает предельного значения.

### 3. РАСПАД НАЧАЛЬНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

#### 3.1. Разрушение отрицательного импульса

Как известно, уравнение Кортевега—де Вриза (1) и модифицированное уравнение Кортевега—де Вриза (2) с отрицательной нелинейностью имеют автомодельные решения, когда структура решения имеет вид некоторой функции, деформирующейся во времени по определенному закону. Так, в модифицированном уравнении Кортевега—де Вриза (18) (полагаем в нем  $\lambda = 0$ ) после замены

$$w(y, \tau) = (3\tau)^{-1/3}\omega(z), \quad z = (3\tau)^{-1/3}y \quad (35)$$

функция  $\omega(z)$  удовлетворяет уравнению

$$\omega_{zz} = 2\omega^3 + z\omega + \alpha, \quad (36)$$

где  $\alpha$  — произвольная константа [21]. Уравнение (36) носит название второго уравнения Пенлеве ( $P_{II}$ ), и его решениями являются специальные функции — трансценденты Пенлеве.

Уравнение Кортевега—де Вриза (10) также имеет подобное автомодельное решение [22]. После замены

$$Q(y, \tau) = -(3\tau)^{-2/3}q(z), \quad z = (3\tau)^{-1/3}y \quad (37)$$

функция  $q(z)$  удовлетворяет уравнению

$$q_{zzz} + 6qq_z - (2q + zq_z) = 0, \quad (38)$$

решения которого однозначно связаны с решениями второго уравнения Пенлеве [22]:

$$q = -\omega_z - \omega^2, \quad \omega = \frac{q_z + \alpha}{2q - z}. \quad (39)$$

В случае  $\alpha = 0$  (тогда  $\omega \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \pm\infty$ ) трансцендентная функция  $\omega(z)$  выглядит как функция Эйри [22].

Импульсное возмущение модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза и импульс в уравнении Кортевега—де Вриза с полярностью противоположной знаку нелинейности (т. е. в случае, когда возникновение солитона невозможно) эволюционируют, перестраиваясь в автомодельные решения (37) и (35) соответственно.

В случае уравнения Гарднера, когда присутствуют обе (квадратичная и кубическая) нелинейности, отрицательный импульс (в численных расчетах использовалась sech-функция) также будет эволюционировать подобно приведенным автомодельным решениям (рис. 4), хотя решение уравнения Гарднера в форме аналогичной (35) или (37) записать не удастся.

#### 3.2. Эволюция положительного импульса

Распад положительного начального возмущения с амплитудой меньшей предельного значения происходит по сценарию уравнения Кортевега—де Вриза: начальное возмущение распадается на группу солитонов (или один солитон) и осциллирующий хвост.

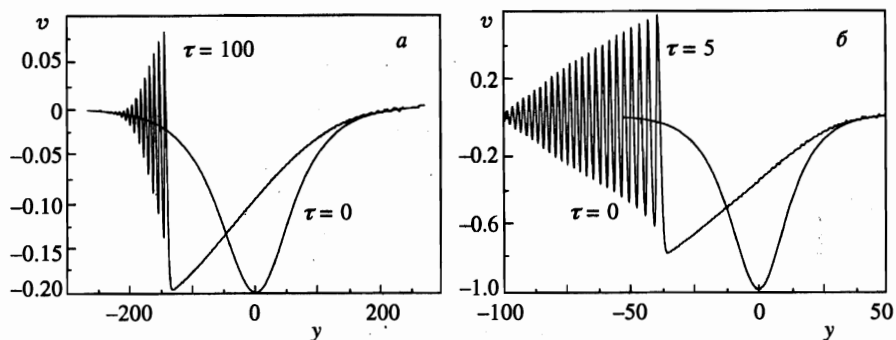


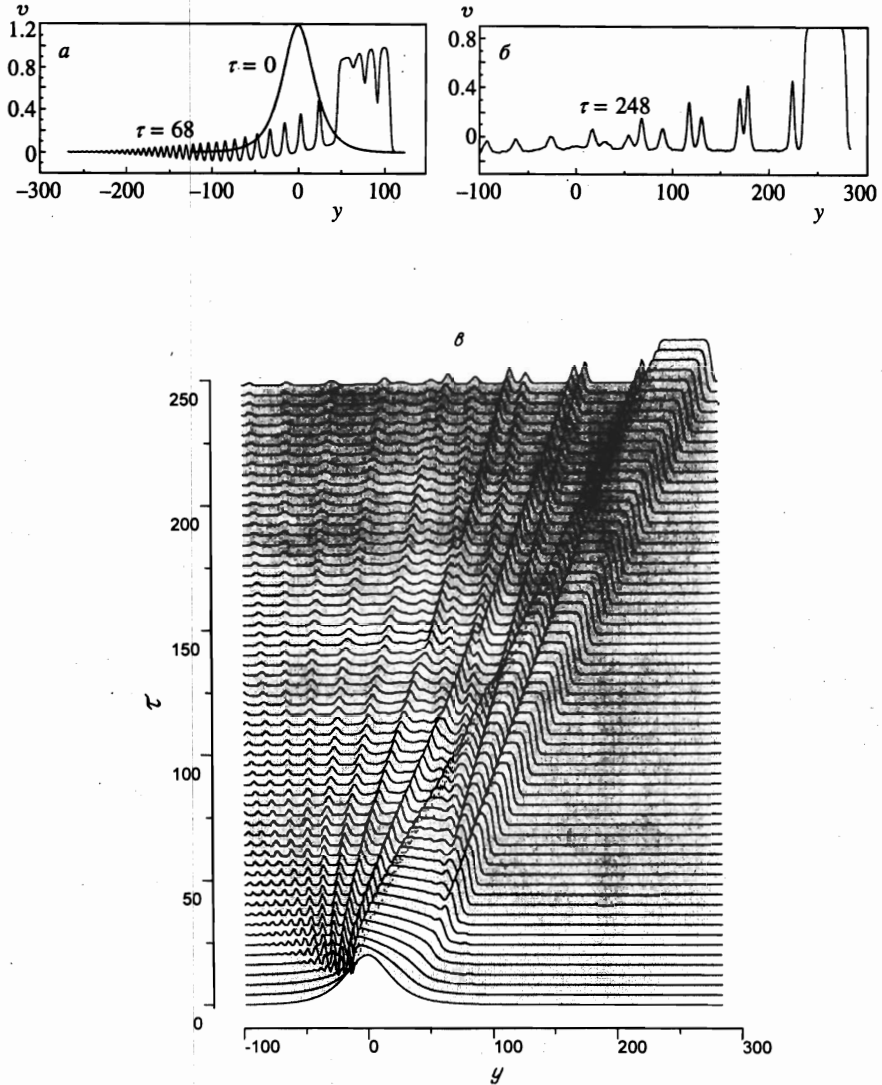
Рис. 4. Разрушение плавного (а) и резкого (б) отрицательного импульсного возмущения

Интересные особенности возникают при распаде начального возмущения с амплитудой, превышающей предельное значение (рис. 5). В этом случае на первом этапе возникают два крутых перепада, что связано с кубической нелинейностью (в чистом виде относительно уровня  $1/2$ : решение уравнения Гарднера (8) на этом пьедестале удовлетворяет модифицированному уравнению Кортевега—де Вриза, для которого справедливы решения в виде перепадов — квазиударных волн). Затем на каждом перепаде начинается генерация мелкомасштабных волн, часть из которых трансформируется в солитоны, причем их полярность разная в зависимости от того, на каком пьедестале они генерируются (рис. 5а) (полярность солитона в уравнении Гарднера зависит от пьедестала, на котором он формируется: на уровне  $0 < v_\infty < 1/2$  формируются положительные солитоны, на уровне  $1/2 < v_\infty < 1$  — отрицательные). Далее отрицательные солитоны на гребне волны взаимодействуют с антикинком и сходят с предельного солитона, изменяя свою полярность и накладываясь на группу солитонов, образованных рождением антикинка (рис. 5б, в). В асимптотике формируется один предельный и несколько меньших солитонов и группа мелкомасштабных волн. Этот процесс кратко описан в нашей работе [20]. Уширение начального возмущения с «запредельной» амплитудой приводит к формированию более широкого предельного солитона.

Формирование предельного солитона уже предсказывалось обратной задачей теории рассеяния [24], однако промежуточная стадия с формированием солитонов разной полярности не была рассмотрена.

Итак, существование предельной амплитуды солитонного решения в интегрируемых нелинейных системах ведет к новым эффектам во взаимодействии солитонов и их генерации из начальных возмущений. Наиболее интересным является случай возникновения предельного солитона, связанный с формированием и распространением солитонов противоположной полярности на его гребне, а также случай взаимодействия предельного солитона с другим.

Работа выполнена при частичной поддержке ИНТАС (грант 95-969), Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 96-05-64108, 96-05-64111, 96-15-96592) и программы Министерства науки и технологий «Нелинейная динамика». Авторы благодарны Т. Г. Талиповой, принимавшей участие в разработке численной программы решения уравнения Гарднера и в обсуждении полученных результатов.



**Рис. 5.** Эволюция начального возмущения с амплитудой, превышающей предельное значение: *a* — начальное возмущение (жирная линия) и образование группы солитонов на гребне предельного; *b* — образование предельного солитона и группы солитонов за ним; *v* — динамика решения во времени

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

## Вывод двухсолитонного решения с помощью преобразований Дарбу

Для получения искомого выражения  $v_2(y, \tau)$ , нужно подставить функции (29) в выражения (19) и использовать определение величин  $\delta_{1,2}$  (22) и (30):

$$W_2 = \frac{1}{2} (\Gamma_2 \Psi_1 \Psi_2' - \Gamma_1 \Psi_1' \Psi_2) = \frac{1}{4 \operatorname{ch}(\Gamma_2 \delta_2) \operatorname{ch}(\Gamma_1 \delta_1)} \times \\ \times [\operatorname{sh}(\Gamma_2 \delta_2 + \Gamma_1 \delta_1) \operatorname{ch}(Z_{2-} - Z_{1-}) + \operatorname{sh}(\Gamma_2 \delta_2 - \Gamma_1 \delta_1) \operatorname{ch}(Z_{2-} + Z_{1-})], \quad (\text{A.1})$$

$$W_3 = \frac{\Psi}{8} [(\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2) \Psi_1 \Psi_2 + \Gamma_1 (\Gamma_2^2 - 1) \Psi_1' \Psi_2 + \Gamma_2 (1 - \Gamma_1^2) \Psi_1 \Psi_2'] = \frac{\Psi}{16 \operatorname{ch}^2(\Gamma_2 \delta_2) \operatorname{ch}^2(\Gamma_1 \delta_1)} \times \\ \times [\operatorname{sh}(\Gamma_2 \delta_2 + \Gamma_1 \delta_1) \operatorname{ch}(Z_{2+} - Z_{1+}) + \operatorname{sh}(\Gamma_2 \delta_2 - \Gamma_1 \delta_1) \operatorname{ch}(Z_{2+} + Z_{1+})]. \quad (\text{A.2})$$

Из формул (11) и (17) имеем

$$v_2(y, \tau) = \frac{1}{2} + \frac{\bar{\bar{\Psi}}_y(y, \tau)}{\bar{\bar{\Psi}}(y, \tau)}, \quad (\text{A.3})$$

где функция  $\bar{\bar{\Psi}}(y, \tau)$  определена в (19). Из (A.3) получаем

$$v_2 = \frac{\bar{W}'_3}{\bar{W}_3} - \frac{W'_2}{W_2}, \quad \bar{W}_3 = \frac{W_3}{\Psi}, \quad (\text{A.4})$$

$$W'_2 = \frac{\operatorname{sh}(\Gamma_2 \delta_2 + \Gamma_1 \delta_1) \operatorname{sh}(\Gamma_2 \delta_2 - \Gamma_1 \delta_1)}{8 \operatorname{ch}^2(\Gamma_2 \delta_2) \operatorname{ch}^2(\Gamma_1 \delta_1)} [\operatorname{sh}(Z_{2-} - Z_{1-}) + \operatorname{sh}(Z_{2-} + Z_{1-})], \quad (\text{A.5})$$

$$\bar{W}'_3 = \frac{\operatorname{sh}(\Gamma_2 \delta_2 + \Gamma_1 \delta_1) \operatorname{sh}(\Gamma_2 \delta_2 - \Gamma_1 \delta_1)}{32 \operatorname{ch}^3(\Gamma_2 \delta_2) \operatorname{ch}^3(\Gamma_1 \delta_1)} [\operatorname{sh}(Z_{2+} - Z_{1+}) + \operatorname{sh}(Z_{2+} + Z_{1+})]. \quad (\text{A.6})$$

Подставляя (A.1), (A.2), (A.5) и (A.6) в (A.4), имеем

$$v_2(y, \tau) = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{ch}^2(\Gamma_2 \delta_2) - \operatorname{ch}^2(\Gamma_1 \delta_1)}{\operatorname{ch}^2(\Gamma_2 \delta_2) \operatorname{ch}^2(\Gamma_1 \delta_1)} \times \\ \times \left( \frac{1}{\operatorname{th}(\Gamma_2 \delta_2) \operatorname{cth} Z_{2+} - \operatorname{th}(\Gamma_1 \delta_1) \operatorname{th} Z_{1+}} - \frac{1}{\operatorname{th}(\Gamma_2 \delta_2) \operatorname{cth} Z_{2-} - \operatorname{th}(\Gamma_1 \delta_1) \operatorname{th} Z_{1-}} \right). \quad (\text{A.7})$$

Снова используя (22) и (30), получаем двухсолитонное решение (31); приведением слагаемых в (A.7) к общему знаменателю получается другая запись решения (32).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Особенности двухсолитонного решения

Б.1. Граница «обмен—обгон»

Чтобы определить критерий, разграничивающий обменное и обгонное взаимодействие, нужно вычислить вторую производную по координате от двухсолитонного решения в точке ( $y = 0, \tau = 0$ ). Удобно (31) переписать в виде

$$v_2(y, 0) = \frac{\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2}{2} [f(y) + f(-y)], \tag{Б.1}$$

где

$$f(y) = \left[ \Gamma_2 \operatorname{cth} \left( \frac{\Gamma_2}{2} (\delta_2 + y) \right) - \Gamma_1 \operatorname{th} \left( \frac{\Gamma_1}{2} (\delta_1 + y) \right) \right]^{-1}. \tag{Б.2}$$

В силу (Б.1)

$$v_2''(y, 0) = (\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2) f''(y), \tag{Б.3}$$

$$f'(y) = \frac{1}{2} \left[ \Gamma_2 \operatorname{cth} \left( \frac{\Gamma_2}{2} (\delta_2 + y) \right) - \Gamma_1 \operatorname{th} \left( \frac{\Gamma_1}{2} (\delta_1 + y) \right) \right]^{-2} \times \\ \times \left\{ \Gamma_2^2 \left[ \operatorname{cth}^2 \left( \frac{\Gamma_2}{2} (\delta_2 + y) \right) - 1 \right] + \Gamma_1^2 \left[ 1 - \operatorname{th}^2 \left( \frac{\Gamma_1}{2} (\delta_1 + y) \right) \right] \right\}, \tag{Б.4}$$

$$f''(0) = \frac{1}{2} \left[ \Gamma_2 \operatorname{cth} \left( \frac{\Gamma_2 \delta_2}{2} \right) - \Gamma_1 \operatorname{th} \left( \frac{\Gamma_1 \delta_1}{2} \right) \right]^{-2} \left( \frac{\omega_1^2}{\omega_2} + \omega_3 \right), \tag{Б.5}$$

где

$$\omega_1 = \Gamma_2^2 \operatorname{cth}^2 \left( \frac{\Gamma_2 \delta_2}{2} \right) - \Gamma_1^2 \operatorname{th}^2 \left( \frac{\Gamma_1 \delta_1}{2} \right) + \Gamma_1^2 - \Gamma_2^2, \\ \omega_2 = \Gamma_2 \operatorname{cth} \left( \frac{\Gamma_2 \delta_2}{2} \right) - \Gamma_1 \operatorname{th} \left( \frac{\Gamma_1 \delta_1}{2} \right), \tag{Б.6}$$

$$\omega_3 = \Gamma_2^3 \operatorname{cth} \left( \frac{\Gamma_2 \delta_2}{2} \right) \left[ 1 - \operatorname{cth}^2 \left( \frac{\Gamma_2 \delta_2}{2} \right) \right] + \Gamma_1^3 \operatorname{th} \left( \frac{\Gamma_1 \delta_1}{2} \right) \left[ \operatorname{th}^2 \left( \frac{\Gamma_1 \delta_1}{2} \right) - 1 \right].$$

Итак, получаем, что при максимальном сближении солитонов (время  $\tau = 0$ ) в центре двухсолитонного решения ( $y = 0$ )

$$v_2''(0, 0) = \frac{\omega_1^2 / \omega_2 + \omega_3}{2 [\Gamma_2 \operatorname{cth}(\Gamma_2 \delta_2 / 2) - \Gamma_1 \operatorname{th}(\Gamma_1 \delta_1 / 2)]}. \tag{Б.7}$$

Переходя к амплитудам солитонов

$$A_j = \frac{\Gamma_j^2}{1 + \sqrt{1 - \Gamma_j^2}}, \quad j = 1, 2, \quad 0 \leq A_j \leq 1 \tag{Б.8}$$

и используя (22) и (30), имеем

$$\operatorname{th} \frac{\Gamma_j \delta_j}{2} = \frac{A_j}{\Gamma_j}, \quad j = 1, 2. \quad (\text{Б.9})$$

Подставляя (Б.8), (Б.9) в (Б.6), выражение (Б.7) перепишем как

$$v_2''(0, 0) \propto -2A_2 [A_2^2(r^3 - 2r^2 - 2r + 1) + A_2(r^2 + 8r - 3) - 6r + 2], \quad (\text{Б.10})$$

где  $r = A_1/A_2$ .

Таким образом, чтобы определить знак второй производной, нужно решить квадратное уравнение. Условие «одногогорбости» симметричного распределения ( $v_2''(0, 0) > 0$ ) является неравенство

$$A_2 < \frac{3r - 1}{3r - 1 - r^2}. \quad (\text{Б.11})$$

### Б.2. Высота центральной точки симметричного распределения

Высота центральной точки определяется из выражения (31) с координатами  $y = 0$ ,  $\tau = 0$ :

$$v_2(0, 0) = \frac{\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2}{\Gamma_2 \operatorname{cth}(\Gamma_2 \delta_2/2) - \Gamma_1 \operatorname{th}(\Gamma_1 \delta_1/2)}. \quad (\text{Б.12})$$

Используя (22), (30), (Б.8) и (Б.9), из (Б.12) получаем

$$v_2(0, 0) = \frac{A_2(2 - A_2) - A_1(2 - A_1)}{2 - A_2 - A_1} = A_2 - A_1. \quad (\text{Б.13})$$

### Б.3. Фазовый сдвиг

Рассмотрим солитон с индексом 2 (он догоняет меньший солитон). При  $\tau \rightarrow -\infty$  его форма находится из (31):

$$v_2(y, \tau) \approx \frac{1}{2}(\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2) \left( \frac{1}{\Gamma_2 \operatorname{cth} Z_{2+} + \Gamma_1} - \frac{1}{\Gamma_2 \operatorname{cth} Z_{2-} + \Gamma_1} \right). \quad (\text{Б.14})$$

Воспользовавшись тождеством

$$\Gamma_2 \operatorname{cth} \left( \frac{\Gamma_2 z}{2} \right) + \Gamma_1 \equiv \frac{\sqrt{\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2} \operatorname{ch}((\Gamma_2 z + \Delta)/2)}{\operatorname{sh}(\Gamma_2 z/2)}, \quad (\text{Б.15})$$

где

$$\frac{\Delta}{2} = \operatorname{arth} \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}, \quad (\text{Б.16})$$

из (Б.14) следует

$$v_2(y, \tau) \approx \frac{\Gamma_2}{2} \left[ \operatorname{th} \left( Z_{2+} + \frac{\Delta}{2} \right) - \operatorname{th} \left( Z_{2-} + \frac{\Delta}{2} \right) \right]. \quad (\text{Б.17})$$



Много позже после взаимодействия ( $\tau \rightarrow \infty$ )

$$v_2(y, \tau) \approx \frac{1}{2}(\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2) \left( \frac{1}{\Gamma_2 \operatorname{cth} Z_{2+} - \Gamma_1} - \frac{1}{\Gamma_2 \operatorname{cth} Z_{2-} - \Gamma_1} \right), \quad (\text{Б.18})$$

а с учетом (Б.15), (Б.16)

$$v_2(y, \tau) \approx \frac{\Gamma_2}{2} \left[ \operatorname{th} \left( Z_{2+} - \frac{\Delta}{2} \right) - \operatorname{th} \left( Z_{2-} - \frac{\Delta}{2} \right) \right]. \quad (\text{Б.19})$$

Таким образом, общий сдвиг фазы равен

$$\Delta = 2 \operatorname{arth} \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}. \quad (\text{Б.20})$$

В процессе взаимодействия большой, обгоняющий, солитон проходит область взаимодействия, имея скорость больше своей нормальной скорости (см. рис. 2). Рассмотрев аналогично второй солитон, легко убедиться, что он, наоборот, затормаживается в области взаимодействия, приобретая сдвиг фазы  $-\Delta$ , для этого вместо (Б.15) понадобится тождество

$$\Gamma_2 - \Gamma_1 \operatorname{th} \left( \frac{\Gamma_1 z}{2} \right) \equiv \frac{\sqrt{\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2} \operatorname{ch} [(\Gamma_1 z - \Delta)/2]}{\operatorname{ch}(\Gamma_2 z/2)}. \quad (\text{Б.21})$$

Представив сдвиг фазы как сдвиг координаты

$$\Delta y_j = \frac{2}{\Gamma_j} \Delta, \quad (\text{Б.22})$$

учтя различный знак  $\Delta$  для разных солитонов и переходя от гиперболической функции к логарифму, получаем формулу (34).

#### Б.4. Солитон на подошве предельной волны

При стремлении второго солитона к предельному  $\Gamma_2 \rightarrow 1$  и двухсолитонное выражение (31) может быть записано как

$$v_2(y, \tau) \approx \frac{1 - \Gamma_1^2}{2} \left( \frac{1}{1 - \Gamma_1 \operatorname{th} Z_{1+}} - \frac{1}{-1 - \Gamma_1 \operatorname{th} Z_{1-}} \right), \quad (\text{Б.23})$$

$$Z_{1\pm} = \frac{\Gamma_1}{2}(y - \Gamma_1^2 \tau \pm \delta_1).$$

Используя (Б.21) и (Б.22), перепишем выражение (Б.23):

$$v_2(y, \tau) \approx \frac{1}{2} \sqrt{1 - \Gamma_1^2} \left( \frac{\operatorname{ch} Z_{1+}}{\operatorname{ch} Z_{1-}} + \frac{\operatorname{ch} Z_{1-}}{\operatorname{ch} Z_{1+}} \right). \quad (\text{Б.24})$$

Снова используя (22), получаем солитон на пьедестале:

$$v_2(y, \tau) \approx 1 - \frac{\Gamma_1}{2} (\operatorname{th} Z_{1+} - \operatorname{th} Z_{1-}). \quad (\text{Б.25})$$

## Литература

1. Т. Л. Перельман, А. Х. Фридман, М. М. Ельяшевич, ЖЭТФ 66, 1316 (1974).
2. Е. Н. Пелиновский, В. В. Соколов, Изв. ВУЗов. Радиофизика 19, 536 (1976).
3. R. Grimshaw, E. Pelinovsky, and T. Talipova, Nonlinear Processes in Geophysics 4, 237 (1997).
4. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, Теория солитонов, Наука, Москва (1980).
5. T. R. Marchant and N. F. Smyth, J. Fluid Mech. 221, 263 (1990).
6. A. S. Fokas and Q. M. Liu, Phys. Rev. Lett. 77, 2347 (1996).
7. T. R. Marchant and N. F. Smith, J. Appl. Math. 56, 157 (1996).
8. T. Kakutani and N. Yamasaki, J. Phys. Soc. Jap. 45, 674 (1978).
9. J. W. Miles, Tellus 31, 456 (1979).
10. Т. Г. Талипова, Е. Н. Пелиновский, Р. Гримшоу, Письма в ЖЭТФ 65, 113 (1997).
11. B. Malomed and V. Shrira, Physica D 53, 1 (1991).
12. C. J. Knickerbocker and A. C. Newell, Phys. Lett. A 75, 326 (1980).
13. K. Lamb and L. Yan, J. Phys. Ocean 26, 2712 (1996).
14. M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segur, Stud. Appl. Math. 53, 249 (1974).
15. Н. Н. Романова, ТМФ 39, 205 (1979).
16. V. B. Matveev and M. A. Salle, Darboux transformations and solitons, Springer (1991).
17. М. Ю. Куликов, Г. М. Фрайман, Препринт ИПФ РАН № 404, Нижний Новгород (1996).
18. M. Crum, Quat. J. Math. 6, 121 (1955).
19. Y. Chen and P. L.-F. Liu, Wave Motion 24, 169 (1996).
20. Е. Н. Пелиновский, А. В. Слюняев, Письма в ЖЭТФ 67, 628 (1998).
21. Дж. Л. Лэм, Введение в теорию солитонов, Мир, Москва (1983).
22. A. S. Fokas and M. J. Ablowitz, J. Math. Phys. 23, 2033 (1982).
23. M. J. Ablowitz and P. A. Clarkson, Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering, Cambridge University Press (1991).
24. J. W. Miles, Tellus 33, 397 (1981).