

ТОНКАЯ СТРУКТУРА РАСЩЕПЛЕНИЯ СЕПАРАТРИСЫ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА

*В. В. Вечеславов**

*Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 22 декабря 1998 г.

Продолжен начатый в [1] анализ эффекта расщепления сепаратрисы нелинейного резонанса для модели стандартного отображения, основанный на результатах прямых измерений угла расщепления $\alpha(K)$, где K — параметр системы. Измерения выполнены в прежнем широком диапазоне, $0.1 \gtrsim \alpha \gtrsim 10^{-208}$ ($1 \geq K \geq 0.0004$), но со значительно более высокими относительной (лучше 10^{-50}) и средней ($\sim 10^{-55}$) точностями. Это позволило существенно уточнить обнаруженные ранее в [1] эффекты и построить качественно новые эмпирические зависимости, обеспечивающие надежную экстраполяцию данных, найденных для угла и инварианта в промежуточной асимптотике $K \lesssim 10^{-2}$, за пределы исследованной области. Полученные результаты могут быть полезны для дальнейшего развития теории расщепления сепаратрисы и образования хаотического слоя нелинейного резонанса.

PACS: 05.45.+b

1. СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Взаимодействие нелинейных резонансов и возникающие как следствие хаотические режимы динамических гамильтоновых систем относятся к числу наиболее важных и сложных проблем современной теории нелинейных колебаний [2–5]. Обычно начальные состояния системы выбираются вблизи одного из резонансов, который считается основным, или ведущим, а остальные рассматриваются как возмущения. Во многих случаях задача сводится к изучению динамической модели, которую можно интерпретировать как маятник (основной резонанс), подверженный действию периодических или квазипериодических сил. Именно в окрестности сепаратрисы основного резонанса под воздействием почти любого сколь угодно слабого возмущения и возникает хаос нелинейных колебаний [2–5].

Исследования в этой области сопровождаются, как правило, широкомасштабными численными экспериментами, при проведении которых вместо дифференциальных уравнений в непрерывном времени гораздо эффективнее использовать их дискретные аналоги — отображения [1–5]. Одной из простых, но чрезвычайно содержательных и весьма популярных моделей такого рода является так называемое стандартное отображение Чирикова [2]:

$$\bar{p} = p + K \cdot \sin x, \quad \bar{x} = x + \bar{p}. \quad (1.1)$$

*E-mail: vecheslavov@inp.nsk.su

Здесь p, x — переменные действие–угол, а K — единственный параметр модели, характеризующий эффект возмущения на периоде отображения $T = 2\pi/\Omega = 1$.

Хаотической динамике стандартного отображения посвящено очень много работ, в том числе и настоящая. Перед обсуждением полученных здесь новых результатов уместно кратко напомнить основные определения и состояние проблемы.

Ведущий резонанс системы (1.1) можно описать гамильтонианом «маятника»:

$$H_1(p, x) = \frac{p^2}{2} + K \cos x. \quad (1.2)$$

Напомним, что в случае сильной нелинейности такая простая форма резонансного гамильтониана оказывается универсальной [2]. Наиболее важная для обсуждаемой проблемы характеристика маятника (1.2) — это сепаратриса

$$p_s = \pm 2\omega_0 \sin \frac{x}{2}, \quad H_1^{(s)} = \omega_0^2 = K \quad (1.3)$$

— особая траектория, которая отделяет колебания фазы (внутри резонанса) от ее вращения (вне резонанса). На самом деле (1.3) описывает две пространственно совпадающие ветви соответственно при $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$. Каждая ветвь представляет собой асимптотическую траекторию с бесконечным периодом движения, которая выходит из положения неустойчивого равновесия (седло) и приходит в него же. Почти любое сколь угодно малое возмущение расщепляет сепаратрису на две пересекающиеся траектории, которые по-прежнему выходят из седла навстречу друг другу, но никогда в него не возвращаются (этот эффект был качественно описан Пуанкаре еще в прошлом столетии [6]). Обе ветви расщепленной сепаратрисы пересекаются, в частности, под углом α при $x = \pi$ (центральное пересечение) и некотором $p_s(\pi) \approx p_0 = 2\omega_0$ (см. (1.3)). Свободные концы расщепленной сепаратрисы образуют бесконечное число петель неограниченно возрастающей длины [6, 7], которые заполняют, однако, ограниченную и узкую область вдоль невозмущенной сепаратрисы, образуя так называемый хаотический слой — зародыш и источник хаоса нелинейных колебаний [2–5, 8, 9]. Важнейшей для приложений характеристикой этого слоя является его энергетическая полуширина $w_s = H/K - 1$, которая, однако, может быть найдена лишь приближенно [2]. В этой связи важно отметить, что для отображения (1.1) угол α центрального пересечения ветвей сепаратрисы оказывается единственным строгим параметром хаоса, вычисление которого может быть выполнено сколь угодно точно.

Значительный прогресс в изучении проблемы расщепления сепаратрисы стандартного отображения начался относительно недавно (1984 г.). Он связан с появлением серии математических работ [10–12], где величина угла α определялась достаточно точно из численного решения вспомогательного уравнения, из которого был исключен экспоненциальный фактор. Заметим, что работы физиков этого и более раннего периодов [2–5, 8, 9] в основном были направлены на исследование эффекта нарушения адиабатичности и получение приближенных оценок размеров хаотического слоя.

Для асимптотического ($\lambda = 2\pi/\sqrt{K} \rightarrow \infty$) значения угла расщепления $\alpha_\infty = \alpha(\infty)$ в [10] получено выражение

$$\alpha_\infty = \pi \mathcal{L} \frac{e^{-\pi\lambda/2}}{K}, \quad (1.4)$$

где фигурирует одна из важных числовых характеристик стандартного отображения \mathcal{L} (в [1] ее предложено называть постоянной Лазуткина).

Необходимо отметить, что в развитой в [2] теории хаотического слоя (1979 г.) фигурирует поправочный множитель $f \sim 1$, физический смысл которого — учет эффектов возмущающих резонансов высших порядков; для стандартного отображения там же численно была получена первая оценка $f \approx 2.15$. Появившаяся позже постоянная Лазуткина оказалась связана с этим фактором соотношением $\mathcal{L} = 16\pi^3 f$ (см. в [1] формулу (1.16) и комментарии к ней), поэтому всякое уточнение постоянной \mathcal{L} есть одновременное уточнение фактора f в теории хаотического слоя. Наиболее точное из опубликованных на сегодняшний день значений этой постоянной, насколько нам известно, равно (формула (4.14) в [1]):

$$\mathcal{L} = 1118.82770594090077841514639323566 \pm 3 \cdot 10^{-27}. \quad (1.5)$$

В [10] приведена также оценка поправки к α_∞ в области промежуточной асимптотики $0 < K \ll 1$:

$$c_\alpha(\lambda) = \frac{\alpha(\lambda)}{\alpha_\infty} - 1, \quad (1.6)$$

которая позже подробно изучалась в [1] и будет рассмотрена в настоящей работе (см. разд. 2, 3).

Следующий крупный шаг в исследовании проблемы был сделан в [11], где зависимость (1.6) представлена уже в виде асимптотического ряда по подходящим степеням малого параметра. Величины первых четырех коэффициентов такого ряда определены там с помощью численного решения вспомогательных уравнений.

В этой теории введена важная замена переменных: $(K, \alpha) \rightarrow (h, \sigma)$, где

$$h(K) = \ln \left(1 + \frac{K}{2} + \sqrt{K + \frac{K^2}{4}} \right) \approx \sqrt{K} \quad (1.7)$$

— положительный характеристический показатель касательного (линеаризованного) отображения (1.1) в неустойчивой неподвижной точке $x = p = 0$,

$$\sigma(h) = \nu(h) \sin \alpha \quad (1.8)$$

— симплектический инвариант, а $\nu(h)$ — некоторая норма касательных векторов.

В [11] было найдено приближенное решение задачи, которое также может быть записано как поправка к инварианту (по аналогии с поправкой (1.6) к углу):

$$c_\sigma(h) = \sigma(h)/\sigma_\infty - 1, \quad (1.9)$$

где $\sigma_\infty = 4\alpha_\infty$ (см. (1.4)).

Важно подчеркнуть, что именно эти «поправки» наиболее полно описывают промежуточную асимптотику и их изучение позволяет выяснить «тонкую структуру» расщепления сепаратрисы и образования хаотического слоя.

Совсем недавно в работе [1] был реализован принципиально иной подход к проблеме, опирающийся на результаты прямых измерений угла расщепления сепаратрисы стандартного отображения (1.1) в очень широком диапазоне параметра $1 \geq K \geq 0.0004$ ($1 \gtrsim h \gtrsim 0.02$); $0.1 \gtrsim \alpha \gtrsim 10^{-208}$ с гарантированной относительной точностью лучше 10^{-25} и средней точностью $\sim 10^{-30}$. Для этого была разработана специальная

методика с использованием пакета компьютерных программ [13], реализующего все возможности стандартного языка ФОРТРАН с произвольной точностью счета (число значащих цифр мантиссы в десятичном представлении вещественного числа доходило в [1] до 300). Для сравнения с теорией [11] вычислялся также инвариант σ (1.8), причем функция $\nu(h)$ (ее аналитическое выражение неизвестно) определялась численно по специальной программе [14].

В соответствии с теорией [11] поправки (1.6) для угла и (1.9) для инварианта отыскивались в виде конечного ряда по четным степеням h :

$$\tilde{c}(h) = a(0) + \sum_{m=1}^M a(m)h^{2m}. \quad (1.10)$$

Чтобы облегчить непосредственное сравнение экспериментальных данных с результатами работы [11] для инварианта, наряду с (1.10) использовалось также представление в форме ряда Тэйлора:

$$\frac{\sigma}{\sigma_\infty} \mathcal{L} = \mathcal{L} + \sum_{m=1}^{\infty} b(m)h^{2m}, \quad b(m) = a(m)m! \mathcal{L}. \quad (1.11)$$

При отыскании коэффициентов разложений (1.10) и построении эмпирических зависимостей широко использовался метод наименьших квадратов (см., например, [15]); особо важное значение придавалось контролю точности вычислений и надежной оценке ошибок полученных результатов.

Работа [1] подтвердила развитую в [11] теорию как качественно (ряды вида (1.10)), так и количественно (см. табл. 2 в [1]). Одним из основных результатов этой работы можно считать построение простых эмпирических зависимостей (4.2) величин коэффициентов разложений (1.10) от номера m . С ними связывалась возможность экстраполяции этих рядов за пределы области прямых измерений. Но там же отмечалась ненадежность такой экстраполяции, поскольку старшие коэффициенты $m = 8, 9, 10$ и для угла, и для инварианта явно уклонялись от предполагаемых зависимостей (см. рис. 3 в [1] и комментарии к нему). Эти отклонения были названы «аномалиями, вопрос о природе которых остается открытым и требует дальнейших исследований». Забегая вперед, поясним ставшую позже понятной причину возникновения этих «аномалий»: использованная в [1] относительная точность измерений угла 10^{-25} оказалась (как это ни парадоксально) недостаточной, что и не позволило вычислить необходимое для надежной экстраполяции число коэффициентов (см. разд. 2).

Любая даже приближенная экстраполяция облегчает не только выявление, но и интерпретацию характерных особенностей промежуточной асимптотики, что может существенно помочь продвижению теории расщепления сепаратрисы и образования хаотического слоя нелинейного резонанса. По этой причине было признано необходимым продолжить начатый в [1] анализ модели стандартного отображения на основе прямых измерений угла расщепления.

В настоящей работе исследования выполнены в прежнем широком диапазоне $0.1 \gtrsim \alpha \gtrsim 10^{-208}$ ($1 \geq K \geq 0.0004$), но со значительно более высокими относительной (лучше 10^{-50}) и средней ($\sim 10^{-55}$) точностями. Это, вместе с использованием весьма точного значения постоянной Лазуткина (1.5), позволило не только существенно уточнить обнаруженные ранее в [1] эффекты (разд. 2), но и получить качественно новые эмпирические зависимости, обеспечивающие надежную экстраполяцию рядов (1.10) для угла и инварианта за пределы исследованной области (разд. 3).

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

При измерениях угла использовалась подробно описанная в [1] схема: отыскивалась центральная точка пересечения ветвей сепаратрисы $x_s = \pi, p_s(\pi)$, затем справа и слева от нее на обеих ветвях вычислялось по две точки. Это позволяло аппроксимировать ветви полиномами второй и четвертой степеней и вычислить два значения угла их пересечения соответственно α_2 и α_4 . В общем случае какое-то количество \mathcal{N}_α первых значащих цифр (с учетом округлений) в выражениях α_2 и α_4 совпадают, а далее эти значения расходятся. Мы добивались неравенства $\mathcal{N}_\alpha \geq 50$, что и давало относительную точность в определении угла не хуже 10^{-50} . На самом деле относительная точность в области промежуточной асимптотики оказалась несколько выше и составила в среднем $\sim 10^{-55}$ (см. рис. 1).

По описанной схеме была найдена зависимость $\alpha(K)$ для 104 значений параметра возмущения в интервале $1 \geq K \geq 0.0004$, и это явилось исходным эмпирическим материалом для всего дальнейшего анализа. Величина угла записывалась с сохранением 100 значащих цифр, что обеспечивало точность обработки результатов намного выше точности экспериментальных данных (см. ниже).

В [1] отмечалась основная трудность интерполяции с помощью ряда вида (1.10), состоящая в том, что различные члены этого ряда различаются по величине на много порядков и матрица нормальной системы уравнений метода наименьших квадратов

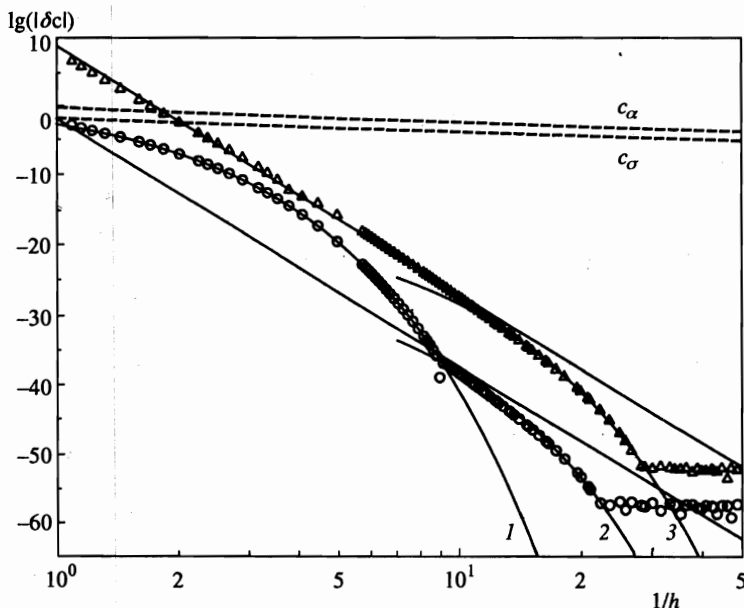


Рис. 1. Результаты интерполяции эмпирических данных по углу расщепления сепаратрисы (треугольники) и инварианту (кружки): $\delta c(h)$ — отклонение поправки от промежуточной асимптотики (1.10), логарифм десятичный. Наклонные прямые представляют первое слагаемое остаточного члена (3.5); кривые 1, 2, 3 — экспоненциальные отклонения (см. разд. 3). Верхние штриховые линии — полные поправки $c(h)$ соответственно для угла (1.6) и инварианта (1.9)

Таблица 1

Коэффициенты $a_\alpha(m)$ ряда (1.10) для угла

m	$a_\alpha(m)$	Δ	$\langle \delta \rangle$
1	-0.233376428864381610627639715 651844925562242	$0.397 \cdot 10^{-41}$	$0.384 \cdot 10^{-42}$
2	-0.290818155124688860367364364 03046408113	$0.370 \cdot 10^{-36}$	$0.334 \cdot 10^{-37}$
3	-0.014824955534894051786788200 5854733	$0.212 \cdot 10^{-32}$	$0.177 \cdot 10^{-33}$
4	0.043182190148644921649679410 03978	$0.836 \cdot 10^{-29}$	$0.647 \cdot 10^{-30}$
5	-0.041519239478427464679586098	$0.241 \cdot 10^{-25}$	$0.171 \cdot 10^{-26}$
6	-0.131373309408107983341741	$0.525 \cdot 10^{-22}$	$0.342 \cdot 10^{-23}$
7	-0.319169849155133631687	$0.885 \cdot 10^{-19}$	$0.525 \cdot 10^{-20}$
8	-1.060531457633276423	$0.117 \cdot 10^{-16}$	$0.630 \cdot 10^{-17}$
9	-4.38156420631767	$0.122 \cdot 10^{-12}$	$0.593 \cdot 10^{-14}$
10	-21.62868101831	$0.101 \cdot 10^{-9}$	$0.440 \cdot 10^{-11}$
11	-126.24207274	$0.662 \cdot 10^{-7}$	$0.255 \cdot 10^{-8}$
12	-861.834118	$0.337 \cdot 10^{-4}$	$0.115 \cdot 10^{-5}$
13	-6810.600	$0.131 \cdot 10^{-1}$	$0.395 \cdot 10^{-3}$
14	-61716.8	$0.380 \cdot 10^{+1}$	$0.100 \cdot 10^{+0}$
15	$-6.3755 \cdot 10^{+5}$	$0.771 \cdot 10^{+3}$	$0.178 \cdot 10^{+2}$
16	$-7.15 \cdot 10^{+6}$	$0.981 \cdot 10^{+5}$	$0.199 \cdot 10^{+4}$
17	$-1.3 \cdot 10^{+8}$	$0.591 \cdot 10^{+7}$	$0.107 \cdot 10^{+6}$

Примечание. При числе знаков коэффициента, превышающем размер столбца, оставшиеся знаки записываются в тот же столбец строкой ниже.

для отыскания коэффициентов $a(m)$ в (1.10) оказывалась, как правило, вырожденной в компьютерном представлении. Потребовалось не только проводить окончательную обработку с точностью $\sim 10^{-100}$, но и вводить изменение масштаба переменных задачи: $(h, \tilde{c}) \rightarrow (H = Sh, C = S\tilde{c})$, где масштабный фактор $S \gg 1$ приходилось подбирать. Однако в [1] мы имели дело с десятью коэффициентами (1.10), а в настоящей работе эта цифра возросла до семнадцати (см. табл. 1, 2) и простое изменение масштаба перестало помогать. Проблему удалось решить за счет обращения прямой матрицы с предварительным разбиением ее на блоки (см., например, [16]), причем размеры блоков также приходилось подбирать. Напомним, что в методе наименьших квадратов диагональные элементы обратной матрицы определяют веса, по которым начисляются ошибки неизвестных, и потому исключить операцию обращения нельзя [15].

Как отмечено в [1], практически доступное число членов ряда M ограничено сверху ошибками вычислений главным образом из-за «шума», вызванного конечной точностью эмпирических данных $\alpha(h)$. Резкое повышение этой точности (с 10^{-25} до 10^{-50}) и, как следствие, резкое снижение уровня этого «шума» позволили повысить число найденных в настоящей работе коэффициентов до $M = 17$ (против 10 в [1]). При даль-

Таблица 2

Коэффициенты $b(m)$ ряда (1.11) для инварианта

m	$b_\sigma(m)$	Δ	$\langle \delta \rangle$
1	18.59891195820929735881714904 1692488164817654712988	$0.113 \cdot 10^{-44}$	$0.142 \cdot 10^{-45}$
2	-4.34114127056816253677582933 04979013479225149	$0.158 \cdot 10^{-40}$	$0.183 \cdot 10^{-41}$
3	-4.18326375909189413723327235 65031001721936	$0.199 \cdot 10^{-36}$	$0.212 \cdot 10^{-37}$
4	-4.93413959073087940856342052 930157	$0.226 \cdot 10^{-32}$	$0.219 \cdot 10^{-33}$
5	-10.6454864428182042353564212 15457	$0.230 \cdot 10^{-28}$	$0.203 \cdot 10^{-29}$
6	-35.8600816693504759710595553	$0.209 \cdot 10^{-24}$	$0.166 \cdot 10^{-25}$
7	-177.6036528919052715929381	$0.169 \cdot 10^{-20}$	$0.121 \cdot 10^{-21}$
8	-1239.435334988728110840	$0.121 \cdot 10^{-16}$	$0.769 \cdot 10^{-18}$
9	-11806.115613907542005	$0.757 \cdot 10^{-13}$	$0.427 \cdot 10^{-14}$
10	-149425.48996254799	$0.412 \cdot 10^{-09}$	$0.204 \cdot 10^{-10}$
11	-2454832.5606990	$0.193 \cdot 10^{-05}$	$0.835 \cdot 10^{-07}$
12	-51297631.6298	$0.762 \cdot 10^{-02}$	$0.286 \cdot 10^{-03}$
13	$-1.339922127 \cdot 10^{+09}$	$0.248 \cdot 10^{+02}$	$0.802 \cdot 10^{+00}$
14	$-4.3097121 \cdot 10^{+09}$	$0.647 \cdot 10^{+05}$	$0.178 \cdot 10^{+04}$
15	$-1.6850 \cdot 10^{+12}$	$0.126 \cdot 10^{+09}$	$0.295 \cdot 10^{+07}$
16	$-7.88 \cdot 10^{+13}$	$0.166 \cdot 10^{+12}$	$0.331 \cdot 10^{+10}$
17	$-4.9 \cdot 10^{+15}$	$0.110 \cdot 10^{+15}$	$0.191 \cdot 10^{+13}$

нейшем увеличении M мы не только не получаем новые коэффициенты, но и теряем предыдущие (см. рис. 1 в [1]).

Точность эмпирической зависимости (1.10) характеризуется среднеквадратичной ошибкой:

$$\Delta c = \langle (c(h) - \bar{c}(h))^2 \rangle^{1/2}, \quad (2.1)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по интервалу интерполяции. Ясно, что в качестве последнего не может быть взят весь эмпирический интервал, поскольку степенная зависимость (1.10) в теории [11] характеризует лишь промежуточную асимптотику. Именно поэтому уклонение

$$\delta c(h) = c(h) - \bar{c}(h) \quad (2.2)$$

содержит наиболее ценную и интересную информацию о дополнительных неадиабатических эффектах, не вошедших в теорию. Таким образом, как и в [1], необходимо было в заданном массиве эмпирических данных выбрать также оптимальный интервал интерполяции $(h_1 - h_2)$, где $h_1 = 0.02$ — минимальное значение в исходных данных. Основным критерием при этом служила наименьшая величина Δc (2.1), а также точность найденных коэффициентов ряда (1.10) (см. табл. 1, 2).

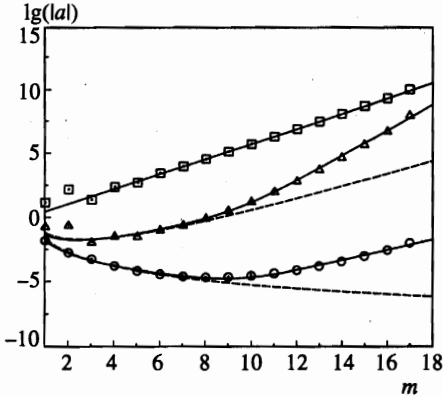


Рис. 2. Закон изменения коэффициентов промежуточной асимптотики (1.10) для угла a_α (треугольники), инварианта a_σ (кружки) и их отношения a_α/a_σ (квадраты). Сплошные линии — эмпирические зависимости (3.1), (3.2) по данным настоящей работы. Жирными точками внутри значков при $m \leq 10$ отмечены значения коэффициентов из работы [1], штриховыми линиями — полученные там же интерполяционные зависимости

Качество интерполяции ухудшается не только при увеличении h_2 , как отмечено выше, но и при его уменьшении из-за малого вклада высоких степеней h при малом h , а также из-за уменьшения числа N_p участвующих в интерполяции точек. Основные результаты получены при стандартной интерполяции путем минимизации дисперсии $(\Delta c)^2$ (см. (2.1)) и представлены в табл. 1, 2 и на рис. 1.

Точность найденных коэффициентов, как и в [1], оценивалась двумя различными методами. Во-первых, вычислялась стандартная среднеквадратичная ошибка интерполяции [14], $\langle \delta \rangle$ (столбец 4 в таблицах), т. е. ожидаемая ошибка коэффициентов при случайной среднеквадратичной ошибке исходных эмпирических данных. Для учета ошибок другой природы — систематических — значения коэффициентов определялись также как средние по нескольким интерполяциям с различным числом входных данных: $N_p = 20-28$ для угла и $N_p = 25-35$ для инварианта. Именно эти значения и приведены в таблицах (столбец 2). Относительно слабая зависимость средних от N_p служила основным критерием при выборе этих двух групп. В качестве ошибки принималась среднеквадратичная ошибка значений коэффициентов в группе, Δ (столбец 3 в таблицах). Видно, что ошибка в группе является наибольшей (и потому определяющей) во всех случаях. Различие обеих ошибок определенно указывает на существенные систематические ошибки. По-видимому, значения среднеквадратичных ошибок в группе и определяют число надежных десятичных знаков коэффициентов.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ВЫВОДЫ

Следуя предложенной в работе [1] схеме, рассмотрим прежде всего поведение самих коэффициентов разложений (1.10), исходя из данных табл. 1, 2.

Начнем с того обнаруженного в [1] факта, что отношение коэффициентов угла и инварианта имеет экспоненциальный вид (проходящая через квадраты прямая на рис. 2):

$$a_\alpha/a_\sigma(m) = R e^{\gamma m}, \quad R = 0.7471 \pm 0.0539, \quad \gamma = 1.3579 \pm 0.0089. \quad (3.1)$$

С учетом этого и проведенного в [1] анализа интерполяционные зависимости можно описать следующими приближенными выражениями:

$$a_\sigma(m) \approx \frac{A_\sigma}{m^p} (1 + Q e^{\gamma m}) \quad (3.2a)$$

для инварианта (проходящая через кружки кривая на рис. 2) и

$$a_{\alpha}(m) \approx A_{\sigma} R \frac{e^{\gamma m}}{m^p} (1 + Q e^{qm}) \quad (3.2b)$$

для угла (проходящая через треугольники кривая на рис. 2). Используя величины R и γ из (3.1), введем вместо коэффициентов для угла $a_{\alpha}(m)$ их приведенные значения:

$$\tilde{a}_{\alpha}(m) = \frac{a_{\alpha}(m)}{R} e^{-\gamma m} = \frac{A_{\sigma}}{m^p} (1 + Q e^{qm}). \quad (3.3)$$

Сравнение выражений (3.2a) и (3.3) показывает, что определение по методу наименьших квадратов значений неизвестных величин A_{σ} , p , Q , q можно выполнять на объединенном множестве $\{a_{\sigma}(m), \tilde{a}_{\alpha}(m)\}$, предварительно удалив из него несколько первых членов, явно уклоняющихся от интерполяционной зависимости (см. рис. 2 и табл. 1, 2). Фактически интерполяция проводилась не по самим коэффициентам, а по десятичным логарифмам их абсолютных величин (см. рис. 2), в ней участвовало 29 точек, и были получены следующие результаты:

$$\begin{aligned} A_{\sigma} &= -0.01571 \pm 0.00480, & p &= 3.188 \pm 0.171, \\ Q &= 2.224 \cdot 10^{-5} \pm 9.93 \cdot 10^{-6}, & q &= 1.127 \pm 0.028. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Среднеквадратичная ошибка такой интерполяции оказалась равна ≈ 0.092 , а ее результаты представлены на рис. 2.

Сравнение выражений (3.2) (им отвечают сплошные кривые на рис. 2) с формулами (4.2) из [1] (им отвечают штриховые кривые на рис. 2) показывает, что обработка существенно более точного и более обширного экспериментального материала настоящей работы привела к качественно другим экспериментальным зависимостям в отношении коэффициентов рядов (1.10) за счет появления в (3.2) дополнительного множителя $(1 + Q \exp(qm))$. При $m < 8$, однако, оба семейства кривых оказываются достаточно близки. Любопытно отметить, что зависимость (3.1) для отношения коэффициентов угла и инварианта не претерпела при этом никакого изменения.

Важно подчеркнуть, что поскольку полученные здесь эмпирические соотношения (3.2) в промежуточной асимптотике $h \lesssim 0.1$ не демонстрируют никаких «аномалий» (см. рис. 2), их применение не ограничено числом фактически найденных коэффициентов. Это позволяет с помощью (3.2), (3.4) достаточно аккуратно оценить остаточные члены рядов (1.10), не включенные в интерполяцию (сплошные наклонные прямые на рис. 1):

$$R(h, M) = \sum_{m=M+1}^{\infty} a(m) h^{2m} \approx a(M+1) h^{2M+2}. \quad (3.5)$$

Выполненный выше анализ коэффициентов дает возможность полнее представить себе глобальное поведение исследуемых зависимостей. Прежде всего, оба ряда, и для угла, и для инварианта, расходятся внутри исследованного диапазона при некотором $h > h_{cr}$: для угла $h_{cr} \approx \exp(-(\gamma + q)/2) \approx 0.287$, для инварианта $h_{cr} \approx \exp(-q/2) \approx 0.569$. Однако характер этих зависимостей при $1 \gtrsim h \gtrsim 0.1$ (до попадания в область промежуточной асимптотики) качественно различен.

Изменение инварианта очень хорошо описывается «каскадом экспонент». Первая из них (кривая 1 на рис. 1)

$$|\delta c_1(h)| \approx 63 e^{-\pi^2/h}, \quad (3.6)$$

обнаруженная и получившая четкое объяснение уже в работе [1], значительно превышает остаточный член (3.5). Она описывает возмущение сепаратрисы более удаленным резонансом с частотой $2\Omega = 4\pi$. Простая теория [2] предсказывает предэкспоненциальный множитель 8, т. е. почти на порядок меньше. Такое различие, однако, вполне объяснимо очень сложной в рассматриваемом случае системой резонансов высших приближений.

Вторая экспонента (кривая 2 на рис. 1, интерполяция по 34 точкам, среднеквадратичная ошибка ≈ 0.13)

$$|\delta c_2(h)| = A_2 e^{-\beta_2/h}, \quad \lg(A_2) = -23.45 \pm 0.11, \quad \beta_2 = 3.512 \pm 0.017, \quad (3.7)$$

напротив, располагается целиком ниже остаточного члена. Механизм ее появления при сегодняшнем состоянии теории совершенно неясен. Обращает на себя внимание близость значения β_2 показателя к числу π .

Любопытная ситуация возникает для угла: в области расходимости представляющего его ряда вообще не наблюдается никаких сингулярностей или аномалий в поведении функции $c_\alpha(h)$ или ее уклонения $\delta c_\alpha(h)$ от интерполяции. Более того, последнее вполне удовлетворительно описывается остаточным членом (3.5), который к тому же представлен на рис. 1 только своим первым слагаемым. И здесь переход в область промежуточной асимптотики реализуется через экспоненту (кривая 3 на рис. 1, интерполяция по 22 точкам, среднеквадратичная ошибка ≈ 0.12):

$$|\delta c_3(h)| = A_3 e^{-\beta_3/h}, \quad \lg(A_3) = -15.84 \pm 0.15, \quad \beta_3 = 2.906 \pm 0.018. \quad (3.8)$$

В этом случае показатель β_3 также близок к π .

Из всего сказанного следует, что поведение и угла, и инварианта при больших $h \sim 1$ существенно отличается от их поведения в области промежуточной асимптотики $h \lesssim 0.1$.

В заключение отметим, что полученные в настоящей работе данные во многом подтверждают и уточняют выводы более ранней работы [1]. Но главным результатом здесь следует, по-видимому, считать построение качественно новых экспериментальных зависимостей (3.1)–(3.4), что позволяет надежно экстраполировать ряды (1.10) за пределы исследованной области прямых измерений. Это, по нашему мнению, может заметно способствовать дальнейшему развитию современной теории расщепления сепаратрисы и образования хаотического слоя нелинейного резонанса.

Автор глубоко благодарен Б. В. Чирикову за обсуждения и советы. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-01-00865).

Литература

1. В. В. Вечеславов, Б. В. Чириков, ЖЭТФ **114**, 1516 (1998).
2. В. В. Chirikov, Phys. Rep. **52**, 263 (1979).
3. Г. М. Заславский, Б. В. Чириков, УФН **105**, 3 (1971).
4. Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику*, Наука, Москва (1988).

5. A. Lichtenberg and M. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer (1992).
6. A. Poincaré, *Les methodes nouvelles de la mecanique celeste*, Paris (1892), p. 226 (А. Пуанкаре, *Избранные труды*, Наука, Москва (1971), т. 1, с. 728).
7. В. К. Мельников, Труды Моск. мат. общества 12, 3 (1963).
8. N. N. Filonenko, R. Z. Sagdeev, and G. M. Zaslavsky, *Nuclear Fusion* 7, 253 (1967).
9. Г. М. Заславский, Н. Н. Филоненко, ЖЭТФ 54, 1590 (1968).
10. В. Ф. Лазуткин, *Расщепление сепаратрис стандартного отображения Чирикова*, Деп. ВИНТИ 6372-84 (1984). V. F. Lazutkin, I. G. Schachmanski, and M. V. Tabanov, *Physica D* 40, 235 (1989). V. G. Gelfreich, V. F. Lazutkin, and M. V. Tabanov, *Chaos* 1, 137 (1991).
11. V. G. Gelfreich, V. F. Lazutkin, and N. V. Svanidze, *Physica D* 71, 82 (1994).
12. V. G. Gelfreich, *A proof of the exponentially small transversality of the separatrices for the standard map*. Freie Universität Berlin, Preprint 9/98 (1998), p. 56 (to appear in *Communic. Math. Physics*).
13. D. H. Bailey, *ACM transaction on mathematical software*, Vol. 19 (1993), p. 288.
14. В. Г. Гельфрейх, *Частное сообщение*.
15. Б. М. ЩигOLEV, *Математическая обработка наблюдений*, Физматгиз, Москва (1960); D. Hudson, *Statistics*, Geneva (1964) (Д. Худсон, *Статистика для физиков*, МИР, Москва (1970)).
16. К. Ланцош, *Практические методы прикладного анализа*, Физматгиз, Москва (1961).