

## К ТЕОРИИ КОГЕРЕНТНОЙ ГЕНЕРАЦИИ РЕЗОНАНСНО-ТУННЕЛЬНОГО ДИОДА

*В. Ф. Елесин*

*Московский государственный инженерно-физический институт  
115409, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 31 марта 1999 г.

Дано строгое квантовомеханическое описание когерентной генерации резонансно-туннельного диода для простой модели двухбарьерной структуры. Найдены точные аналитические решения уравнения Шредингера для электронов в присутствии слабого электромагнитного поля. В широком интервале частот вычислены активный и реактивный токи поляризации, которые приведены к простому и наглядному виду. Эти выражения удовлетворяют соотношениям Крамерса—Кронига, общим критериям теории излучения и другим формальным требованиям. Проведен анализ пороговых условий генерации. В частности показано, что генерация возможна на сверхвысокой частоте, превосходящей обратное время жизни электрона в квантовой яме. Таким образом, «квази-классическое» представление о существовании предельной частоты, связанное с конечным временем жизни, оказывается неприменимым для резонансно-туннельного диода, занимающего промежуточное положение между лазерами и генераторами типа Ганна.

PACS: 85.30.Mn; 85.30.Vw; 87.56.Bu

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Резонансное туннелирование и эффект отрицательной дифференциальной проводимости в наноструктурах вызваны чисто квантовыми явлениями пространственного квантования, приводящего к возникновению резонансных энергетических уровней [1]. Далее будем иметь в виду простейшую наноструктуру — квантовую яму, часто называемую резонансно-туннельным диодом.

Как известно, отрицательная дифференциальная проводимость обеспечивает возможность генерации электромагнитного поля. В ряде работ (см. [2, 3]) была продемонстрирована генерация на резонансно-туннельном диоде вплоть до 712 ГГц.

Уже давно возник и обсуждается вопрос (см., например, [3]), существует ли фундаментальное ограничение на частоту генерации в резонансно-туннельном диоде, аналогичное ограничениям, например, в диодах Ганна и в туннельных диодах [4, 5].

В настоящее время нет единого мнения по этому вопросу, что связано, в частности, с отсутствием общепринятой теоретической модели когерентной генерации в резонансно-туннельном диоде. Большинство работ по теории генерации резонансно-туннельного диода выполнено численными методами [3, 6–11]. В них установлен ряд важных закономерностей когерентной генерации (в данной работе мы будем интересоваться только когерентным приближением), но содержится и много противоречивых результатов, причины которых трудно установить (см. обсуждение в [3, 10]).

Аналитическому подходу посвящено сравнительно немного работ [12–15]. Практически во всех известных нам работах используются полуфеноменологические методы, когда вместо строгого решения уравнения Шредингера привлекаются дополнительные подходы (см., например, [12]).

Согласно довольно широко распространенной точке зрения (см. [3]), частота генерации ограничена величиной, обратной характерному времени жизни электрона в квантовой яме  $\tau_\gamma^{-1}$  ( $\tau_\gamma = \hbar/\Gamma$ ,  $\Gamma$  — ширина резонансного уровня). Такая аргументация справедлива для «классических» генераторов (например, туннельных и ганновских диодов [4, 5], в которых отсутствуют резонансные уровни).

Генераторы на резонансно-туннельных диодах занимают промежуточное положение между «классическими» генераторами и лазерами. В их основе лежит «квазирезонансное» взаимодействие электронов с электрическим полем. Имеется в виду, что излучательные переходы идут между состояниями вблизи одного резонансного уровня (а не между двумя уровнями, как в лазере). Можно ожидать, что если частота поля  $\omega$  мала по сравнению с шириной резонансного уровня  $\Gamma$ , то применимо «квазиклассическое» описание. В противоположном пределе необходим только квантовомеханический подход.

Цель настоящей работы — дать строгое квантовомеханическое описание для максимально простой аналитически решаемой модели когерентной генерации в резонансно-туннельных диодах. Как известно, это позволяет глубже понять физическую картину. В работе найдено точное решение уравнения Шредингера для парциальных волновых функций, соответствующих квазиэнергиям электрона в электромагнитном поле. В широком интервале частот вычислены активный (синфазный полю)  $J_c$  и реактивный  $J_s$  токи поляризации в малосигнальном приближении. С использованием естественных для резонансно-туннельных диодов малых параметров  $\omega/\varepsilon_R$  и  $\Gamma/\varepsilon_R$  ( $\varepsilon_R$  — энергия резонансного уровня) выражения для  $J_c$  и  $J_s$  без потери общности приведены к простому и наглядному виду за счет компенсации ряда расходящихся членов. Получаемые выражения для токов удовлетворяют соотношениям Крамерса—Кронига, общим принципам теории излучения и другим формальным требованиям. Они существенно отличаются от полученных ранее результатов, особенно для высоких частот. Показано, в частности, что генерация возможна на сверхвысоких частотах  $\omega \gg \Gamma$ , если энергия электронов (эквивалент постоянного напряжения на резонансно-туннельном диоде) выбрана вне области максимальной отрицательной проводимости, т. е. квазиклассическое представление о предельной частоте, связанной с шириной уровня (см. [3]), по-видимому, неприменимо для резонансно-туннельных диодов. Кроме того, найдены оптимальные условия на пороге генерации в зависимости от параметров структуры.

## 2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ. ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ РЕЗОНАНСНО-ТУННЕЛЬНОГО ДИОДА В ЛИНЕЙНОМ ПО ПОЛЮ ПРИБЛИЖЕНИИ

Мы изучим модель когерентной генерации резонансно-туннельного диода [12, 15, 16]. Для простоты рассматривается одномерная квантовая яма с  $\delta$ -функционными барьерами в точках  $x = 0$  и  $x = a$  (см. рис. 1). Слева ( $x = -\infty$ ) к квантовой яме подводится стационарный поток электронов, пропорциональный  $q^2$ , с энергией  $\varepsilon$ , приблизительно равной  $\varepsilon_R$ . В области квантовой ямы действует переменное электрическое

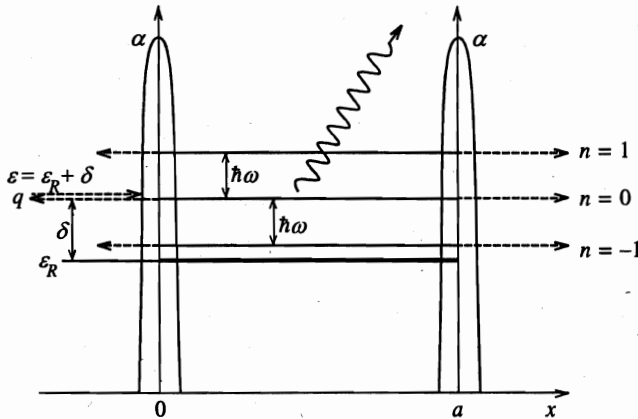


Рис. 1. Двухбарьерная структура с резонансным уровнем  $\epsilon_R$ . Другие обозначения приведены в тексте

поле  $E(t)$  с потенциалом  $V(x, t)$ :

$$V(x, t) = \nu(x) \cos(\omega t + \varphi), \tag{1}$$

$$\nu(x) = \begin{cases} \nu_0 x \theta(x - a), & x < a \\ \nu_0 a, & x > a \end{cases}, \quad \nu_0 = -\frac{eE}{2}.$$

Волновая функция  $\psi(x, t)$  подчиняется уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + [\alpha \delta(x) + \alpha \delta(x - a)] \psi + V(x, t) \psi, \tag{2}$$

здесь положено  $\hbar = 1, 2m = 1$ . Установившееся решение (3) ищем в виде [7, 17]

$$\psi(x, t) = e^{-i\epsilon t} [\psi_0(x) + e^{-i\omega t} \psi_{+1}(x) + e^{i\omega t} \psi_{-1}(x)]. \tag{3}$$

Парциальные функции  $\psi_0(x), \psi_n(x)$  описывают электроны с квазиэнергиями  $\epsilon$  и  $\epsilon + n\omega$  ( $n = \pm 1$ ) соответственно.

Переменное поле вызывает токи поляризации:

$$J_c(x, t) = J_c(x) \cos(\omega t + \varphi),$$

$$J_s(x, t) = J_s(x) \cos(\omega t + \varphi).$$

Синфазный с полем  $J_c$  (активная составляющая) и реактивный  $J_s$  токи можно выразить через функции  $\psi_n(x)$ :

$$\begin{aligned} J_c(x, t) &= J_{+1}^c(x) + J_{-1}^c(x), \\ J_n^c(x) &= -ie [(\psi_0^* \psi_n' + \psi_0' \psi_n^*) + \text{c.c.}], \\ J_s(x, t) &= J_{+1}^s(x) - J_{-1}^s(x), \\ J_n^s(x) &= e [(\psi_0^* \psi_n' - \psi_0' \psi_n^*) + \text{c.c.}]. \end{aligned} \tag{4}$$

Функция нулевого приближения  $\psi_0(x)$  в области  $0 < x < a$  удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon\psi_0(x) + \psi_0''(x) = 0, \quad \psi_0'' \equiv \frac{d^2\psi_0}{dx^2} \quad (5)$$

и граничным условиям (см. [17])

$$\begin{aligned} \psi_0(0)(1 - \beta) + \frac{\psi_0'(0)}{ip} &= q, \\ \psi_0(a)(1 - \beta) - \frac{\psi_0'(a)}{ip} &= 0, \quad \beta = \frac{\alpha}{ip}, \quad p^2 = \varepsilon. \end{aligned} \quad (6)$$

Граничные условия (6) описывают поток электронов слева, пропорциональный  $q^2$ , их отражение и уход в область  $x > a$ .

Соответствующие уравнения для  $\psi_n(x)$  имеют вид

$$\begin{aligned} p_n^2\psi_n + \psi_n'' &= \nu(x)\psi_0(x), \\ p_n^2 &= p^2 + n\omega. \end{aligned} \quad (7)$$

Граничные условия для  $\psi_n$  практически аналогичны (6) с  $q = 0$ .

Решения уравнений (5), (7) в области  $0 < x < a$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= A \exp(ipx) + B \exp(-ipx) \equiv \gamma_0 \cos(px) + i\delta_0 \sin(px), \\ \Delta_0 A &= q(2 - \beta) \exp(-2ipa), \quad \Delta_0 \beta = q\beta, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\Delta_0 = \frac{4}{\Gamma} [i(\varepsilon - \varepsilon_R) - \Gamma], \quad \Gamma = \frac{4p^3}{\alpha^2 a}, \quad (9)$$

$$\psi_n(x) = \tilde{\psi}_n(x) - \frac{\nu_0 x}{\omega_n} \psi_0(x) - \frac{2\nu_0}{\omega_n^2} \psi_0'(x), \quad (10)$$

$$\tilde{\psi}_n = A_n \exp(ip_n x) + B_n \exp(-ip_n x) \equiv \gamma_n \cos(p_n x) + i\delta_n \sin(p_n x),$$

$$\Delta_n A_n = 2q_n \exp(-2ip_n a) + \beta_n [\tilde{q}_n - q_n \exp(-2ip_n a)],$$

$$\Delta_n B_n = 2\tilde{q}_n + \beta_n (\tilde{q}_n - q_n), \quad (11)$$

$$\Delta_n = \frac{4}{\Gamma} [i(\varepsilon - \omega - \varepsilon_R) - \Gamma],$$

$$q_n = \frac{2\nu_0 ip}{\omega_n^2} \left[ (A - B)(1 - \beta_n) + (A + B) \left( 1 + \frac{\omega_n^2}{4pp_n(p + p_n)^2} \right) \right], \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}_n &= \frac{2\nu_0 ip}{\omega_n^2} \left[ [A - B \exp(-2ipa)](1 - \beta_n) - [A + B \exp(-2ipa)] \left( 1 + \frac{\omega_n^2}{4pp_n(p + p_n)^2} \right) \right] \times \\ &\times \exp[2i(p - p_n)a], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\beta_n = \frac{\alpha}{ip_n}, \quad \omega_n = -n\omega, \quad \gamma_n = A_n + B_n, \quad \delta_n = A_n - B_n.$$

Величины  $\delta_n$  и  $\gamma_n$  являются ключевыми. Через них выражаются токи поляризации (4). Используя (11) и (13), получим выражение для  $\delta_n$  и  $\gamma_n$ :

$$\Delta_n \delta_n = \beta_n (\bar{q}_n - q_n) + (\beta_n - 2) [\bar{q}_n - q_n \exp(-2ip_n a)], \quad (14)$$

$$\Delta_n \gamma_n = 2 [\bar{q}_n + q_n \exp(-2ip_n a)] + \beta_n q_n [1 - \exp(-2ip_n a)]. \quad (15)$$

Формулы (8)–(15) дают точное решение задачи. После их подстановки в (4) мы получаем точное выражение для токов  $J_c(x)$  и  $J_s(x)$ . К сожалению, эти выражения настолько громоздки и необозримы, что практически бесполезны для анализа. Однако существует возможность преобразовать их (без потери общности) к простым и физически наглядным выражениям, используя естественный для резонансно-туннельного диода малый параметр  $\omega/\varepsilon_R$ . Действительно, малость частоты  $\omega$  по сравнению с энергией  $\varepsilon_R$  (а также с разницей энергий до соседнего уровня) присуща генератору на резонансно-туннельном диоде.

Чтобы провести вышеупомянутое преобразование, представим  $\gamma_n$  и  $\delta_n$  в виде суммы двух слагаемых:

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \gamma_n^{(1)} + \gamma_n^{(2)}, \\ \delta_n &= \delta_n^{(1)} + \delta_n^{(2)}. \end{aligned} \quad (16)$$

В слагаемых  $\gamma_n^{(1)}$  и  $\delta_n^{(1)}$  полагаем  $p = p_n$  в экспоненциальных множителях, а в  $\gamma_n^{(2)}$  и  $\delta_n^{(2)}$  формируем разность между полными и выделенными выражениями. В слагаемых  $\gamma_n^{(1)}$  и  $\delta_n^{(1)}$  происходит точная компенсация целого ряда членов, так что в результате получаем

$$\gamma_n^{(1)} = \frac{2\nu_0 ip}{\omega_n^2} \delta_0, \quad \delta_n^{(1)} = \frac{2\nu_0 ip}{\omega_n^2} \gamma_0. \quad (17)$$

Отметим, что слагаемые  $\gamma_n^{(1)}$  и  $\delta_n^{(1)}$  расходятся при  $\omega \rightarrow 0$ . Оставшиеся слагаемые оказываются конечными в низкочастотном пределе и равны

$$\Delta_n \gamma_n^{(2)} = -\frac{4\nu_0 ip}{\omega_n^2} [Z_n \beta_n A + Z_n^* B \exp(-2ip_n a)(2 - \beta_n)], \quad Z_n = \exp[ip(p - p_n)a] - 1, \quad (18)$$

$$\delta_n^{(2)} = (\beta_n - 1)\gamma_n^{(2)}. \quad (19)$$

В (18), (19) отброшены малые члены, пропорциональные  $\omega/\varepsilon_R$  и  $\Gamma/\varepsilon_R$ . Для упрощения выражений мы рассматриваем наиболее интересный случай квантовой ямы с «сильными барьерами», когда  $\Gamma \ll \varepsilon_R$ . Именно в этом пределе реализуются важные свойства квантовой ямы.

С учетом малости  $\omega/\varepsilon_R$  и  $\Gamma/\varepsilon_R$  выражение (18) приводится к виду

$$\Delta_n \gamma_n^{(2)} = \frac{\nu_0 a^2 \alpha A}{p^2}, \quad (20)$$

из которого следует, что величина  $\gamma_n^{(2)}$  конечна при  $\omega \rightarrow 0$ . Конечной оказывается и функция  $\psi_n(x)$ , в частности

$$\psi_n(0) = \psi_n(a) = \gamma_n^{(2)}. \quad (21)$$

Отсюда нетрудно показать, что используемое приближение слабого поля справедливо, если  $eEa \ll \Gamma$ .

## 3. ТОКИ ПОЛЯРИЗАЦИИ

Вначале найдем активную составляющую тока  $J_c(x)$ . Подставляя (10) в (4), получим

$$J_n^c(x) = -ie \left[ (\psi_0^* \bar{\psi}'_n + \psi'_0 \bar{\psi}_n^*) - \text{с.с.} \right] - 2\pi\nu_0 e \delta(\omega_n) |\psi_0|^2. \quad (22)$$

В (22) оставлены слагаемые четные по  $\omega_n$ , так как нечетные сокращаются в полном токе  $J_c(x)$ . Последний член, отличный от нуля только при  $\omega = 0$ , далее опускаем, поскольку он компенсируется соответствующим вкладом из первого слагаемого. Пренебрегая малыми поправками порядка  $\omega/\varepsilon_R$ , выражение (22) можно свести к виду

$$J_n^c(x) = ep \cos[(p - p_n)x] [K_n + \text{с.с.}] - iep [F_n - \text{с.с.}] \sin[(p - p_n)x], \quad (23)$$

$$K_n = \delta_0^* \gamma_n + \gamma_0^* \delta_n, \quad F_n = \delta_0^* \delta_n + \gamma_0^* \gamma_n. \quad (24)$$

Расходящиеся при  $\omega \rightarrow 0$  слагаемые, возникающие из  $\gamma_n^{(1)}$  и  $\delta_n^{(1)}$ , являются чисто мнимыми. Поэтому они не дают вклада в  $[K_n + \text{с.с.}]$ ; в  $[F_n - \text{с.с.}]$  они пропадают из-за четности по  $\omega_n$ . Остающиеся слагаемые оказываются пропорциональными комбинации

$$\frac{1}{\Delta_n} + \frac{1}{\Delta_n^*} = \frac{-\Gamma^2}{2[(\varepsilon - \varepsilon_R + n\omega)^2 + \Gamma^2]}. \quad (25)$$

Таким образом, ток  $J_c$ , описывающий усиление (поглощение) поля, пропорционален, как и следует из общей теории излучения, затуханию электрона. Окончательные выражения для тока  $J_c(x)$  и приведенного тока  $J_c$  (см. [17]) имеют вид

$$J_c(x) = -\frac{eEaQ\Gamma^2(\varepsilon - \varepsilon_R)}{4[(\varepsilon - \varepsilon_R + \omega)^2 + \Gamma^2][(\varepsilon - \varepsilon_R - \omega)^2 + \Gamma^2][(\varepsilon - \varepsilon_R)^2 + \Gamma^2]} \times \\ \times \left\{ \cos\left(\frac{\omega}{2p}x\right) [(\varepsilon - \varepsilon_R)^2 + \Gamma^2 + \omega^2] - \sin\left(\frac{\omega}{2p}x\right) \left(\frac{4\omega p}{a}\right) \right\}, \quad (26)$$

$$J_c = \frac{1}{a} \int_0^a J_c(x) dx = -\frac{e^2 E a Q \Gamma^2 (\varepsilon - \varepsilon_R)}{4 [(\varepsilon - \varepsilon_R + \omega)^2 + \Gamma^2] [(\varepsilon - \varepsilon_R - \omega)^2 + \Gamma^2]}, \quad (27)$$

$$Q = q^2 p.$$

Из (27) видно, что при  $\varepsilon > \varepsilon_R$  ток  $J_c$  отрицателен, что соответствует усилению во всей области частот. В низкочастотном пределе  $\omega \ll \Gamma$  ток  $J_c$  выражается через дифференциальную проводимость постоянного тока:

$$J_c = -\frac{e^2 E a \delta \Gamma^2}{4(\delta^2 + \Gamma^2)} = \frac{e^2 E a}{4} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J_0(\varepsilon), \quad (28)$$

$$J_0(\varepsilon) = \frac{Q\Gamma^2}{2(\delta^2 + \Gamma^2)}, \quad \delta \equiv \varepsilon - \varepsilon_R. \quad (29)$$

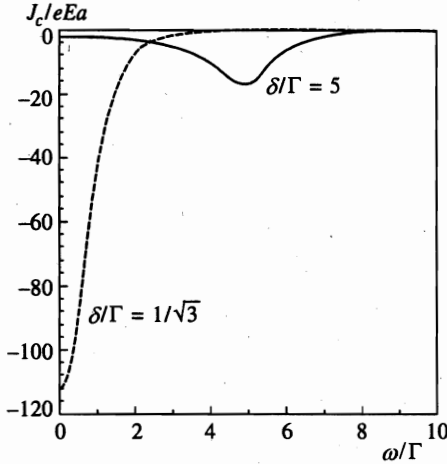


Рис. 2. Зависимость активного тока поляризации  $J_c$  от частоты  $\omega/\Gamma$  для  $\delta/\Gamma = 1/\sqrt{3}$  и  $\delta/\Gamma = 5$

В низкочастотном пределе (27) переходит в квазиклассическое выражение и практически совпадает с результатами, полученными в [12, 15], однако для конечных частот имеются существенные отличия от данных работ [12].

Проанализируем частотную зависимость тока  $J_c(\omega, \delta)$ , характер которой зависит критически от отношения  $\delta/\Gamma$ . Если  $\delta < \Gamma$ , ток  $J_c$  максимален при нулевой частоте (см. рис. 2), а при больших частотах  $\omega \gg \Gamma$  быстро уменьшается как  $1/\omega^4$ :

$$\bar{J}_c = -\frac{4J_c}{e^2 E a Q} \approx -\frac{\delta \Gamma^2}{\omega^4}, \quad \omega \gg \Gamma. \tag{30}$$

Если же  $\delta > \Gamma$ , ток  $J_c$  становится максимальным при частоте (см. рис. 2)

$$\omega_m^2 = \delta^2 - \Gamma^2 \tag{31}$$

и равным

$$\bar{J}_c(\omega_m) = -1/4\delta. \tag{32}$$

Новый максимум  $J_c$  соответствует квазирезонансным переходам между состояниями  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_R$ , так как при  $\omega \gg \Gamma$  равенство (31) дает условие «квазирезонанса»  $\omega = \varepsilon - \varepsilon_R$ .

Исследуем теперь зависимость тока  $J_c$  от  $\delta$ . Нетрудно показать, что ток  $J_c$  достигает максимума, если  $\delta = \delta_m$ :

$$\delta_m^2 = -\frac{1}{3}(\Gamma^2 - \omega^2) + \frac{2}{3}(\Gamma^4 + \omega^4 + \omega^2 \Gamma^2)^{1/2}. \tag{33}$$

В низкочастотном пределе получаем известный результат

$$\delta_m^2 \approx \Gamma^2/3, \tag{34}$$

при котором низкочастотная отрицательная дифференциальная проводимость достигает максимальной величины.

Именно такой выбор напряжения смещения обычно делается в экспериментальных и теоретических работах. В этом случае  $\delta < \Gamma$  и, согласно (30), ток  $J_c$  быстро убывает

с частотой. Отсюда следует, что усиление практически ограничивается «предельной» частотой  $\omega \approx \Gamma$ .

Однако, если выбрать  $\delta > \Gamma$  в соответствии с условиями квазирезонансного перехода (31), то  $J_c$ , согласно (32), убывает с частотой гораздо медленнее:

$$\bar{J}_c = -1/4\omega. \quad (35)$$

Таким образом, если выбрать  $\delta^2 = \omega^2 + \Gamma^2$  и вдали от области максимальной отрицательной дифференциальной проводимости, то возможна генерация при частотах, значительно превышающих «предельную частоту»  $\Gamma$ . Физически это связано с «квазирезонансными» излучательными переходами электронов с квазиуровня  $\varepsilon = \varepsilon_R + \omega$  на резонансный уровень  $\varepsilon_R$ . Указание на возможность такого поведения  $J_c(\omega)$  было сделано нами в [11] на основании численного решения уравнений аналогичных (5) и (7).

Выражение (27) для тока  $J_c$  можно получить и другим способом. Прежде всего, заметим, что мощность, передаваемая электронами полю за период, равна

$$P_c = a \int_0^{2\pi/\omega} J_c(t)E(t)dt = -\frac{e^2 E^2 a^2 Q \Gamma^2 \delta}{4 [(\delta + \omega)^2 + \Gamma^2] [(\delta - \omega)^2 + \Gamma^2]}. \quad (36)$$

С другой стороны, можно найти мощность исходя из баланса числа электронов, вылетающих из квантовой ямы с энергиями  $\varepsilon \pm \omega$ :

$$P_T = \omega [(T_{+1}(a) - T_{-1}(a)) + (T_{+1}(0) - T_{-1}(0))], \quad (37)$$

где  $T_n(x)$  — поток электронов из квантовой ямы в точках  $x = 0$  и  $x = a$  с энергиями  $\varepsilon \pm \omega$ .

Используя найденные решения для  $\psi_n$ , можно показать, что  $P_T$  в точности совпадает с  $P_c$  во всем интервале частот (в отличие от [12], где совпадение имеет место только для  $\omega \rightarrow 0$ ).

Выражению для тока  $J_c$  можно придать и другую форму:

$$J_c = \frac{e^2 E a}{4} \frac{J_0(\varepsilon + \omega) - J_0(\varepsilon - \omega)}{2\omega}, \quad (38)$$

где  $J_0(\varepsilon)$  определяется формулой (29).

Представляется весьма вероятным, что формула (38) ввиду простоты и симметрии справедлива и в более сложных моделях резонансно-туннельного диода.

Интересно, что выражение (38) совпадает по форме с выражением для высокочастотного тока в сверхрешетке, полученным в работе [18]. Последнее описывает ток, возникающий за счет резонансных переходов электронов между резонансными уровнями в двух соседних квантовых ямах в присутствии постоянного электрического поля. Ток обусловлен процессами рассеяния импульса на примесях, а также энергетической релаксацией с возбужденного уровня. При расчете использовался метод квантового кинетического уравнения без учета граничных эффектов.

Несмотря на то что в данной работе рассматривается краевая задача уравнения Шредингера с открытыми граничными условиями для одной квантовой ямы в когерентном приближении, факт совпадения формул представляется поучительным и свидетельствующим в пользу общности выражения (38).



Теперь вычислим реактивную составляющую тока. Подставляя (10) в (4) и опуская четные по  $\omega_n$  члены, найдем

$$J_s^n(x) = ep \{i [K_n - \text{с.с.}] \cos [(p - p_n)x] + [F_n + \text{с.с.}] \sin [(p - p_n)x]\}, \quad (39)$$

где  $K_n$  и  $F_n$  определяются из (24) и (16)–(20). Можно показать, что члены, происходящие из  $\gamma_n^{(1)}$  и  $\delta_n^{(1)}$ , снова выпадают, а остающиеся пропорциональны комбинации

$$\frac{1}{\Delta_n} - \frac{1}{\Delta_n^*} = \frac{-i\Gamma(\varepsilon - \varepsilon_R + n\omega)}{2[(\varepsilon - \varepsilon_R + n\omega)^2 + \Gamma^2]}, \quad (40)$$

т. е. реактивный ток  $J_s$  определяется «расстройкой»  $\varepsilon - \varepsilon_R + n\omega$ , как и должно быть в силу теории излучения.

Собирая результаты, для приведенного реактивного тока получаем

$$J_s = \frac{1}{a} \int_0^a J_s(x) dx = \frac{e^2 EaQ\Gamma\delta(\delta^2 - \omega^2 - 3\Gamma^2)\omega}{4(\delta^2 + \Gamma^2)[(\delta - \omega)^2 + \Gamma^2][(\delta + \omega)^2 + \Gamma^2]}. \quad (41)$$

В низкочастотном пределе ток  $J_s$  проявляет индуктивный характер в согласии с [3, 12, 19], если  $\delta^2 < 3\Gamma^2$ :

$$\tilde{J}_s = \frac{4J_s}{e^2 EaQ} = \frac{\Gamma\delta\omega(\delta^2 - 3\Gamma^2)}{(\delta^2 + \Gamma^2)^3}. \quad (42)$$

При  $\delta^2 > 3\Gamma^2$  происходит смена знака (см. [10]). Если выбрать  $\delta$  согласно условию квазирезонансного перехода, ток  $J_s$  сохраняет индуктивный характер во всем интервале частот.

Выражение (41) для тока  $J_s$  существенно отличается от соответствующего выражения в [12], в частности, при  $\omega \rightarrow 0$ .

Нетрудно показать, что токи  $J_s(\omega)$  и  $J_c(\omega)$  удовлетворяют соотношениям Крамерса—Кронига:

$$J_s(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} J_c(\omega'). \quad (43)$$

Это доказывает согласованность выражений для  $J_s$  и  $J_c$  и свидетельствует в пользу их правильности во всем частотном интервале.

#### 4. ПОРОГОВЫЕ УСЛОВИЯ ГЕНЕРАЦИИ РЕЗОНАНСНО-ТУННЕЛЬНОГО ДИОДА

В целях иллюстрации рассмотрим простую модель, когда уравнения для поля имеют вид (см. [16])

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{E}{2\tau_0} &= -\frac{2\pi}{\chi} J_c, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} E + \frac{(\omega^2 - \Omega^2)E}{2\omega} &= -\frac{2\pi}{\chi} J_s, \end{aligned} \quad (44)$$

где  $\tau_0$  — время, характеризующее потери в резонаторе (контуре) с собственной частотой  $\Omega$ ,  $\chi$  — диэлектрическая постоянная. Зная  $J_c(\omega\delta)$  и  $J_s(\omega\delta)$ , можно анализировать и другие схемные решения.

В стационарном случае после подстановки  $J_c$  и  $J_s$  из (27), (41) получаем уравнения для значений  $\tilde{Q}_{th}$ ,  $\delta$  и  $\omega$  на пороге генерации:

$$\frac{1}{\tau_0} = \frac{\tilde{Q}_{th}\delta\Gamma^2}{[(\delta - \omega)^2 + \Gamma^2][(\delta + \omega)^2 + \Gamma^2]}, \quad \tilde{Q}_{th} = \frac{\pi e^2 a Q_{th}}{\chi}, \quad (45)$$

$$\frac{\omega^2 - \Omega^2}{2\omega} = -\frac{\tilde{Q}_{th}\Gamma\delta\omega[\delta^2 - \omega^2 - 3\Gamma^2]}{2(\delta^2 + \Gamma^2)[(\delta + \omega)^2 + \Gamma^2][(\delta - \omega)^2 + \Gamma^2]}. \quad (46)$$

Воспользовавшись соотношениями (45), исключим  $\tilde{Q}_{th}$  из (46):

$$\omega^2 - \Omega^2 = -\frac{\omega^2(\delta^2 - \omega^2 - 3\Gamma^2)S}{\delta^2 + \Gamma^2}, \quad S = \frac{1}{\Gamma\tau_0}, \quad (47)$$

где  $S$  — аналог параметра стабилизации в лазерной теории [20].

Мы получили биквадратное уравнение для  $\omega^2$ , которое имеет следующее решение:

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta^2 + \Gamma^2}{S} + \delta^2 - 3\Gamma^2 \right] \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left[ \frac{\delta^2 + \Gamma^2}{S} + \delta^2 - 3\Gamma^2 \right]^2 - \frac{(\delta^2 + \Gamma^2)\Omega^2}{S}}. \quad (48)$$

Если  $S \ll 1$ , то частота генерации мало отличается от  $\Omega$ :

$$\omega^2 - \Omega^2 = -\frac{S\Omega^2(\delta^2 - \Omega^2 - 3\Gamma^2)}{\delta^2 + \Gamma^2}. \quad (49)$$

В этом случае, подставляя  $\omega \simeq \Omega$  в пороговое условие, получаем

$$\frac{1}{\tau_0} = \frac{\tilde{Q}_{th}\delta\Gamma^2}{[(\delta - \Omega)^2 + \Gamma^2][(\delta + \Omega)^2 + \Gamma^2]}. \quad (50)$$

Оптимальные условия генерации (т. е. максимума усиления) на частоте  $\Omega$  можно найти, воспользовавшись проведенным в разд. 3 анализом. Из него вытекает, что при низких частотах  $\Omega \ll \Gamma$  оптимально значение  $\delta = \Gamma/\sqrt{3}$ . При высоких частотах, когда  $\Omega \gg \Gamma$ , следует выбирать смещение  $\delta \simeq \Omega$ .

В обратном предельном случае  $S \gg 1$  из (48) нетрудно получить, опуская поправки  $\sim 1/S$ ,

$$\omega^2 = \delta^2 - 3\Gamma^2, \quad \delta^2 > 3\Gamma^2, \quad (51)$$

т. е. частота определяется разностью энергий  $\epsilon - \epsilon_R$  при квазирезонансных переходах. В интервале  $0 < S < \infty$  частота равна средневзвешенному значению между  $\Omega$  и  $\delta$ , по аналогии с лазерной теорией [20]. Отличие состоит в том, что в резонансно-туннельном диоде роль энергетической разности играет  $\delta = \epsilon - \epsilon_R$ .

Все это подтверждает наш вывод, что генератор на резонансно-туннельном диоде является квантовым генератором с излучательными переходами вблизи одного резонансного уровня.

Если  $\delta^2 < 3\Gamma^2$ , то на параметр  $S$  накладывается ограничение

$$S < S_c = \frac{\delta^2 + \Gamma^2}{(\Omega + \sqrt{\Omega^2 + 3\Gamma^2 - \delta^2})^2}. \quad (52)$$

Для частоты генерации при  $S = S_c$  имеем

$$\omega^2 = \Omega \left( \Omega + \sqrt{\Omega^2 + 3\Gamma^2 - \delta^2} \right). \quad (53)$$

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Во Введении уже отмечалось, что вычислению токов поляризации в когерентном приближении было посвящено значительное число теоретических работ. Удобно их разделить на работы, выполненные с помощью численного решения уравнений Шредингера [7–11] или уравнений для функций Вигнера [6] (первая группа), и аналитические работы (вторая группа). Результаты для активной составляющей тока  $J_c$  качественно схожи в области частот до  $\omega \approx \Gamma$ : слабая зависимость от частоты в интервале  $0 \ll \omega \ll \Gamma$ , затем спад (по абсолютной величине) при  $\omega \sim \Gamma$ . В области  $\omega > \Gamma$  предсказывается либо смена знака тока  $J_c$ , либо быстрое убывание отрицательного тока. Обратим внимание на то, что в этих работах напряжение смещения (или энергия влетающих электронов) выбиралось в области максимальной отрицательной дифференциальной проводимости.

Гораздо более запутанная ситуация с реактивным током  $J_s$  (см., например, подробное обсуждение в [3, 10]). Частотная зависимость, зависимость от  $\delta$ , знак тока  $J_s$  не совпадают. Установить причину расхождения довольно трудно, особенно в работах первой группы. Поэтому мы остановимся на сопоставлении результатов с работами второй группы (аналитические работы).

Наиболее детальными и близкими по постановке задачи, являются работы [12, 3] (см. там ссылки на предыдущие работы). Но используемый в [12] подход к решению сильно отличается от нашего. Автор не находит явного решения уравнения Шредингера в области квантовой ямы. Он записывает волновую функцию на коллекторной границе ямы ( $x = a$ ) в виде

$$\psi_{tr} = \{t_0 \exp(ipx) + t_{+1} \exp(ip_{+1}x - i\omega t) + t_{-1} \exp(ip_{-1}x + i\omega t)\} \exp(-i\epsilon t)U, \quad (54)$$

$$U = \exp \left[ \frac{i\nu_0 q}{\omega} \sin(\omega t) \right]. \quad (55)$$

Здесь  $t_0, t_{\pm 1}$  — амплитуды перехода электрона через квантовую яму без поля и с полем (первый порядок по переменному полю) соответственно. Амплитуды находятся суммированием проходящих и отраженных волн (модель Фабри—Перо). Потенциал взаимодействия с полем (1) считается постоянным в малых промежутках, на которые разбивается квантовая яма. Кроме того, предполагается, что излучение происходит в центре ямы. Делаются и другие приближения, в частности, относительно вклада матричных элементов. Таким образом, в [12] используется достаточно много приближений, хотя подход обладает известной общностью (например, к форме барьеров и др.).

Как уже отмечалось в разд. 3, полученные в [12] выражения для  $J_c$  и  $J_s$  существенно отличаются от (27) и (39). В частности, при  $\delta = \omega$  в [12]  $J_c \propto -1/\omega^3$  вместо  $J_c \propto -1/\omega$

(см. (35)), т. е., согласно [12], генерация на больших частотах практически невозможна. Сильно различаются токи поляризации  $J_s$ . В частности, (41) меняет знак с ростом  $\delta$  или  $\omega$  в отличие от аналогичного тока в [12].

Резко отличаются в [12] и амплитуды перехода электронов через квантовую яму  $t_{\pm 1}$  от наших  $\psi_{\pm 1}(a)$ :

$$|\psi_{\pm 1}(a)|^2 = |\gamma_{\pm}|^2 = \frac{(\nu_0 a)^2 \Gamma^2}{16(\delta^2 + \Gamma^2) [(\delta \pm \omega)^2 + \Gamma^2]}, \quad (56)$$

$$|t_{\pm 1}|^2 = \left(\frac{V_{ac}}{2\omega}\right)^2 \frac{\Gamma^2 [(\delta \pm \omega/2)^2 + \Gamma^2]}{(\delta^2 + \Gamma^2) [(\delta \pm \omega)^2 + \Gamma^2]}. \quad (57)$$

Следует подчеркнуть, что  $|t_{\pm 1}|^2 \propto 1/\omega^2 \rightarrow \infty$ ,  $\omega \rightarrow 0$ , расходится в низкочастотном пределе. Наконец, отметим, что токи  $J_c$  и  $J_s$  в [12] не удовлетворяют требованиям (25) и (40) теории излучения.

В работе [13] токи поляризации были найдены в общей форме для любого поля. К сожалению, в [13] полностью отсутствует вывод и аналитический анализ выражений для токов. Кроме того,  $J_c$  и  $J_s$  не удовлетворяют требованиям (25), (40). Все это затрудняет детальное сравнение наших результатов с результатами работы [13]. В остальных известных нам работах второй группы не приведено замкнутых выражений для  $J_c$  и  $J_s$ .

Подводя итог анализу известных нам работ и сравнению с нашими результатами, можно заключить, что выражения для токов  $J_c$  (27) и  $J_s$  (39) представляются достаточно обоснованными и надежными. Действительно, они получены на основе точного аналитического решения граничной задачи для уравнения Шредингера, сведены к простым выражениям с известной степенью точности. Эти выражения удовлетворяют соотношениям Крамерса—Кронига (43), требованиям теории излучения (25), (40), подтверждены независимым выводом из соотношений баланса (37), выражаются через универсальную форму (38), имеют правильный низкочастотный классический предел (28). На основании (27) и (35) можно сделать вывод о том, что ширина  $\Gamma$  не является предельной частотой. Естественно, что для детального описания эксперимента требуется учет конкретных особенностей структуры резонансно-туннельного диода, эффектов накопления заряда и других явлений.

Автор благодарен Ю. В. Копаеву, Р. А. Сурису и А. В. Крашенинникову за плодотворное обсуждение работы.

Работа выполнена в рамках программы «Физика твердотельных наноструктур» Министерства науки и технологий РФ (проект 96-1030), а также при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-02-17363) и Государственной программы «Интеграция».

## Литература

1. L. Esaki and R. Tsu, Appl. Phys. Lett. **22**, 562 (1973).
2. E. R. Brown, T. C. L. G. Sollner, C. D. Parker et al., Appl. Phys. Lett. **55**, 1777 (1989); E. R. Brown, J. R. Södestrom, C. D. Parker et al., Appl. Phys. Lett. **58**, 2291 (1991).
3. H. C. Liu and T. C. L. G. Sollner, Semicond. Semimet. **41**, 359 (1994).

4. В. Ф. Чжоу, *Принципы построения схем на туннельных диодах*, Мир, Москва (1966), с. 177.
5. А. М. Георгиевский, Д. В. Громов, К. В. Дудинов и др., *Микроэлектроника* 25, 249 (1996).
6. W. R. Frensley, *Appl. Phys. Lett.* 51, 448 (1987); *Rev. Mod. Phys.* 62, 745 (1990).
7. R. K. Mains and G. I. Haddad, *J. Appl. Phys.* 64, 3564 (1988).
8. R. K. Mains and G. I. Haddad, *J. Appl. Phys.* 64, 504 (1988).
9. C. L. Fernando and W. R. Frensley, *Phys. Rev. B* 52, 5092 (1995).
10. F. A. Buot and A. K. Rajagopal, *Phys. Rev. B* 48, 17217 (1993).
11. V. F. Elesin, D. V. Melnikov, and A. I. Podlivaev, *Phys. Low-Dim. Struct.* 1, 23 (1996).
12. H. C. Liu, *Phys. Rev. B* 43, 12538 (1991); *Erratum* 48, 4977 (1993).
13. V. Kislov and A. Kamenev, *Appl. Phys. Lett.* 59, 1500 (1991).
14. D. Sokolovski, *Phys. Rev. B* 37, 4201 (1988).
15. V. F. Elesin, *Phys. Low-Dim. Struct.* 5/6, 79 (1998).
16. В. Ф. Елесин, *ЖЭТФ* 112, 483 (1997).
17. В. И. Сифоров, *Радиоприемные устройства*, Изд-во МО СССР, Москва (1954).
18. Р. Ф. Казаринов, Р. А. Сурис, *ФТП* 6, 148 (1972).
19. E. R. Brown, C. D. Parker, and T. C. L. G. Sollner, *Appl. Phys. Lett.* 54, 934 (1989).
20. W. E. Lamb, *Phys. Rev.* 134, 1429 (1964).