ЖЭТФ, 1999, том 116, вып. 3(9), стр. 777–792

О ТЕЛЕПОРТАЦИИ НЕПРЕРЫВНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

С. Н. Молотков, С. С. Назин*

Институт физики твердого тела Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 1 апреля 1999 г.

С точки зрения общей теории квантовомеханических измерений рассмотрены измерения, использующиеся в квантовой телепортации. Показано, что для того чтобы найти телепортированное состояние, достаточно знать лишь порожденное соответствующим инструментом (квантовой операцией, определяющей изменение состояния системы в результате измерения) разложение единицы (положительную операторно-значную меру) в пространстве состояний системы, а не сам инструмент. Предлагается протокол квантовой телепортации состояния системы с невырожденным непрерывным спектром, основанный на измерении, которому соответствует некоторое неортогональное разложение единицы.

PACS: 03.65.Bz, 42.50.Dv

1. ВВЕДЕНИЕ

Один из основных результатов квантовой теории информации состоит в возможности телепортации неизвестного квантового состояния посредством классического и распределенного квантового каналов связи, роль которых играет специальным образом подобранное нелокальное запутанное состояние (entangled state), например, EPR-пара [1]. Квантовая телепортация неизвестного состояния от пользователя A к удаленному пользователю B осуществляется следующим образом [1]. У пользователя A имеется неизвестное ему состояние ρ_1 квантовой системы 1, подлежащее телепортации пользователю B (например, частица со спином 1/2; в [1] дано также обобщение на случай произвольной квантовой системы с конечным числом уровней, т. е. с конечномерным пространством состояний). Кроме того, имеются две другие частицы также со спином 1/2 (системы 2 и 3) в запутанном по спину EPR-состоянии ρ_{23} таком, что пользователь A имеет доступ к частице 2, а пользователь B — к частице 3. Пользователь A выполняет некоторое совместное измерение m_{12} над системой 1 в неизвестном ему состоянии ρ_1 и частицей 2 из EPR-пары. В результате измерения полная система, состоящая из частиц 1, 2 и 3, переходит из состояния $\rho_1 \otimes \rho_{23}$ в некоторое новое состояние ρ'_{123}, зависящее от результата z проведенного измерения. Оказывается, что существуют такие измерения m_{12}, в результате которых состояние ρ'_3 частицы 3 из EPR-пары у пользователя B (которое получается взятием следа по пространству состояний частиц 1 и 2, $\rho'_3 = \mathrm{Tr}_{1,2}\rho'_{123}$) связано с исходным состоянием ρ_1 частицы 1 некоторым унитарным преобразованием, которое не зависит от ρ_1 и определяется только результатом z проведенного измерения m_{12}:

---

*E-mail: molotkov@issp.ac.ru

$$\rho_3' = U_z \rho_1 \tag{1}$$

(здесь и далее мы отождествляем изоморфные пространства состояний частиц 1 и 3). Классический канал связи необходим для того, чтобы пользователь A сообщил B результат измерения z, который указывает B, какое унитарное преобразование U_z^{-1} он должен произвести над состоянием ρ_3' частицы 3, чтобы ее состояние совпало с ρ_1. Заметим, что пользователь A не получает никакой информации о телепортированном состоянии.

В изложенном алгоритме квантовой телепортации существенно используется то обстоятельство, что после проведения измерения система как целое (все три частицы) оказывается в некотором вполне определенном состоянии ρ_{123}', которое определяется результатом измерения; в алгоритме [1] используется так называемое белловское измерение, которому соответствует некоторый самосопряженный оператор с невырожденным спектром в четырехмерном пространстве, и состояние ρ_{123}' легко выписывается в явном виде.

Первый алгоритм телепортации непрерывной квантовой переменной (т. е. волновой функции одномерной нерелятивистской бесспиновой частицы, пространство состояний которой бесконечномерно) был описан в работе [2]. Впоследствии на основе этого подхода был предложен реалистичный алгоритм телепортации одномодового электромагнитного поля [3]. При этом фактически предполагалось, что в случае наблюдаемой с непрерывным спектром система после измерения переходит в состояние, описываемое «собственным вектором», принадлежащим полученному в результате этого измерения «собственному значению» соответствующего самосопряженного оператора.

Однако для непрерывной переменной корректно поставленный вопрос о том, в какое состояние переходит система после измерения, оказывается гораздо более сложным, чем в случае дискретного спектра (см., например, [4]). Дело здесь даже не только в том, что в случае непрерывного спектра в гильбертовом пространстве состояний системы нет корректно определенных собственных векторов. Рассмотрим, например, некоторый самосопряженный оператор A с непрерывным спектром Λ. Пусть точка z принадлежит этому спектру и система до измерения находится в некотором состоянии ρ. Насколько осмысленным является тогда вопрос о том, в каком состоянии ρ_z оказывается система после измерения, выдавшего результат $r = z$? Проблема заключается в том, что, согласно статистической интерпретации квантовой механики, само понятие «состояния» можно относить лишь к некоторому ансамблю идентичных систем, а не к одиночным системам. В данном случае это, казалось бы, означает, что нужно говорить о подансамбле тех систем, которые после измерения отбираются условием $r = z$. Однако в случае непрерывного спектра вероятность получения любого конкретного значения z равна нулю, так как точка имеет меру нуль. Следовательно, выделить подансамбль систем, выдавших результат $r = z$, просто невозможно, так как вероятность получения совпадающих результатов в каких-либо двух измерениях равна нулю. Поэтому вопрос о смысле ρ_z не является вполне тривиальным. Для того чтобы ответить на него, нам потребуются некоторые факты из общей теории квантовомеханических измерений (см., например, [4–6]). Основные положения и некоторые результаты этой теории изложены в разд. 2. В разд. 3 эта общая теория используется для изучения того специального класса измерений, которые представляют интерес для квантовой телепортации. В разд. 4 протокол телепортации непрерывной переменной, описанный в [2], рассмотрен с точки зрения результатов, полученных в предыдущем разделе. В разд. 5 предлагается протокол телепортации состояний некоторой модельной системы с непрерывным спектром, использующий измерение, которому соответствует некоторое неортогональное разложение единицы. Наконец, в последнем разделе кратко изложены основные полученные в статье результаты.

2. КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Для квантовомеханической системы с конечномерным пространством состояний $\mathscr{H}$ (когда спектр любого оператора является чисто дискретным) каноническое (фон-неймановское) измерение некоторой наблюдаемой, которой отвечает самосопряженный оператор A с собственными числами λ_i, $i = 1 \dots n$, приводит к тому, что система, первоначально описывавшаяся матрицей плотности ρ, переходит в состояние ρ_j (редукционный постулат фон Неймана—Людерса [7, 8]),

$$\rho \to \rho_j = \frac{E_j \rho E_j}{\mathrm{Tr}\{E_j \rho\}}, \tag{2}$$

если измерение дало результат λ_j. Здесь E_j — ортогональный проектор на подпространство, отвечающее собственному числу λ_j, так что имеют место разложение единицы

$$\sum_j E_j = I, \tag{3}$$

где I — тождественный оператор в $\mathscr{H}$, и спектральное представление оператора A

$$A = \sum_j \lambda_j E_j. \tag{4}$$

Вероятность получения j-го результата равна

$$\mathrm{Prob}(\lambda_j) = \mathrm{Tr}\{\rho E_j\} = \mathrm{Tr}\{E_j \rho E_j\}. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь наиболее общую ситуацию, когда совокупность всех возможных результатов измерения образует некоторое измеримое пространство $\mathscr{Z}$ с мерой, которая в дальнейшем будет обозначаться dz, а квантовая система S описывается (вообще говоря, бесконечномерным) гильбертовым пространством $\mathscr{H}$, т. е. ее состояния находятся во взаимнооднозначном соответствии с множеством $K(\mathscr{H})$ всех положительных операторов на $\mathscr{H}$ со следом, равным 1 (т. е. матриц плотности; оператор A на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ называется положительным, если $\langle v|A|v\rangle \geq 0$ для любого $v \in \mathscr{H}$). Множество $K(\mathscr{H})$ является подмножеством пространства $B_1(\mathscr{H})$ всех операторов с конечным следом на $\mathscr{H}$. В этом случае адекватным математическим объектом, полностью характеризующим любую конкретную измерительную процедуру с множеством результатов $\mathscr{Z}$, которой может быть подвергнута система S, является инструмент [4] (или, в другой терминологии [5], операция) $\mathbf{T}$, представляющий собой отображение $\Delta \to \mathbf{T}(\Delta)$ множества Γ всех измеримых относительно меры dz подмножеств $\Delta \subset \mathscr{Z}$ в множество неувеличивающих след вполне положительных операторов $P(B_1(\mathscr{H}))$, отображающих $B_1(\mathscr{H})$ в себя и удовлетворяющее следующим двум условиям:

1) $\mathbf{T}(\Delta) = \sum_j \mathbf{T}(\Delta_j)$, если $\Delta = \cup_j \Delta_j$, $\Delta_j \cap \Delta_i = \emptyset$ при $i \neq j$ (аддитивность);

2) $\mathrm{Tr}\{\mathbf{T}(\mathscr{X})\rho\} = \mathrm{Tr}\rho$ для любого $\rho \in B_1(\mathscr{H})$ (нормировка).

Напомним, что линейное отображение $\mathbf{F}$ из $B_1(\mathscr{H})$ в себя называется вполне положительным, если $\mathbf{F}(L) > 0$ для любого $L > 0$ из $B_1(\mathscr{H})$, т.е. переводит положительные операторы из $B_1(\mathscr{H})$ в положительные же, и обладает дополнительно тем свойством, что если $\mathscr{H}_0$ — некоторое другое гильбертово пространство, то отображение

$$\mathbf{F}\otimes\mathbf{I} : B_1(\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}_0) \to B_1(\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}_0),$$

заданное на элементах вида $W \otimes W_0 \in B_1(\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}_0)$ формулой вида

$$\mathbf{F}\otimes\mathbf{I}(W\otimes W_0) = \mathbf{F}(W)\otimes W_0$$

и продолженное по линейности на все пространство $B_1(\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}_0)$, где $\mathbf{I}$ — тождественный оператор на $B_1(\mathscr{H}_0)$, также является положительным для любого $\mathscr{H}_0$. Смысл инструмента $\mathbf{T}$ состоит в том, что для любого измеримого подмножества $\Delta \subset \mathscr{X}$, $\Delta \in \Gamma$ состояние ρ_Δ подансамбля систем, приготовленных первоначально в состоянии $\rho \in K(\mathscr{H})$ и отобранных в ходе многократного повторения данной измерительной процедуры условием попадания результата измерения $r = z$ в множество Δ, есть (для краткости мы пишем $\mathbf{T}(\Delta)\rho$ вместо $[\mathbf{T}(\Delta)](\rho)$)

$$\rho_\Delta = \frac{\tilde{\rho}(\Delta)}{\mathrm{Tr}\{\tilde{\rho}(\Delta)\}} = \frac{\mathbf{T}(\Delta)\rho}{\mathrm{Tr}\{\mathbf{T}(\Delta)\rho\}} \in K(\mathscr{H}), \quad \tilde{\rho}(\Delta) = \mathbf{T}(\Delta)\rho, \tag{6}$$

а вероятность получения при проведении измерения результата $r = z \in \Delta$ есть

$$\mathrm{Prob}(z\in\Delta) = \mathrm{Tr}\{\mathbf{T}(\Delta)\rho\} = \mathrm{Tr}\{\tilde{\rho}(\Delta)\}; \tag{7}$$

здесь и далее мы отмечаем знаком тильды «ненормированные матрицы плотности» (положительные операторы со следом ≤ 1), которые получаются после применения соответствующего рассматриваемому инструменту оператора $\mathbf{T}(\Delta)$ к исходной матрице плотности ρ. В тех случаях, когда это не может вызвать недоразумений, мы будем в дальнейшем для краткости применять термин «матрица плотности» и к этим операторам.

Легко проверить, что при фиксированном $\mathbf{T}$ формула (7) порождает аффинное отображение выпуклого множества $K(\mathscr{H})$ состояний ρ системы S в множество вероятностных мер ν_{Prob} на $\mathscr{X}$: каждому состоянию $\rho \in K(\mathscr{H})$ ставится в соответствие такая мера μ_ρ на $\mathscr{X}$, что для каждого множества $\Delta \in \Gamma$ его мера $\mu_\rho(\Delta)$ есть в точности $\mathrm{Prob}(z \in \Delta)$. Известно [6], что множество всех таких отображений $\rho \to \mu_\rho$ из $K(\mathscr{H})$ в ν_{Prob} находится во взаимнооднозначном соответствии с семействами эрмитовых операторов $M(\Delta)$, $\Delta \in \Gamma$, действующих в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, удовлетворяющих следующим свойствам:

1′) $M(\emptyset) = 0$, $M(\mathscr{X}) = I$ (нормировка);

2′) $M(\Delta) \geq 0$ (положительность);

3′) $M(\Delta) = \sum_j M(\Delta_j)$, если $\Delta = \cup_j \Delta_j$, $\Delta_j \cap \Delta_i = \emptyset$ при $i \neq j$ (аддитивность);

т.е. с разложениями единицы на $\mathscr{X}$ со значениями в множестве положительных операторов на $\mathscr{H}$. При этом мера μ_ρ множества Δ определяется выражением

$$\mu_\rho(\Delta) = \mathrm{Prob}(z\in\Delta) = \mathrm{Tr}\{\rho M(\Delta)\}. \tag{8}$$

Иными словами, $M(\Delta)$ определяют положительную операторно-значную меру. Частным случаем такой меры являются спектральные ортогональные разложения единицы, отвечающие семействам спектральных проекторов самосопряженных операторов в $\mathscr{H}$, для которых имеет место равенство

$$M(\Delta_1)M(\Delta_2) = 0, \text{ если } \Delta_1 \cap \Delta_2 = 0;$$

измерения, описывающиеся такими разложениями единицы, естественно назвать ортогональными.

Следовательно, если интересоваться только распределением вероятности получения того или иного результата и оставить в стороне гораздо более сложный вопрос о том, в каком состоянии оказывается система после измерения, то вместо семейства операторов $\mathbf{T}(\Delta) \in P(B_1(\mathscr{H}))$ достаточно ограничиться рассмотрением положительного разложения единицы $M(\Delta) \in B(\mathscr{H})$, которые связаны между собой таким образом, что вероятность получения при проведении измерения результата $z \in \Delta$ для любого начального состояния ρ системы S, первоначально определенная формулой (7), может быть вычислена с помощью оператора $M(\Delta)$ по формуле (8). Сравнивая между собой формулы (7) и (8), легко убедиться, что они совместны тогда и только тогда, когда

$$M(\Delta) = [\mathbf{T}(\Delta)]^* I, \tag{9}$$

где звездочка означает сопряженное отображение из пространства $B(\mathscr{H})$ в себя, а $I \in B(\mathscr{H})$ — тождественный оператор на $\mathscr{H}$ (напомним, что линейное пространство всех ограниченных операторов $B(\mathscr{H})$ на $\mathscr{H}$ изоморфно пространству, сопряженному к $B_1(\mathscr{H})$, причем соответствующий изоморфизм порождается билинейным отображением

$$B(\mathscr{H}) \times B_1(\mathscr{H}) \to \mathbf{C} : a \in B(\mathscr{H}), b \in B_1(\mathscr{H}) \to \mathrm{Tr}\{a \cdot b\} \in \mathbf{C},$$

где $\mathbf{C}$ — множество комплексных чисел).

В случае канонического измерения наблюдаемой A на конечномерном пространстве $\mathscr{H}$ (т. е. дискретного спектра), описываемого формулами (2)–(4), пространство $\mathscr{X}$ совпадает с конечным множеством собственных чисел $\lambda_i, i = 1 \dots n$, оператора A, множество Γ состоит из всех подмножеств множества $\mathscr{X}$, а для одноточечных множеств $\{\lambda_j\}$ операторы $\mathbf{T}(\{\lambda_j\})$ и $M(\{\lambda_j\})$ имеют вид

$$\mathbf{T}(\{\lambda_j\})\rho = E_j \rho E_j, \quad M(\{\lambda_j\}) = E_j. \tag{10}$$

Ясно, что семейство операторов $\mathbf{T}(\Delta)$ дает гораздо более полное описание процесса измерения, чем соответствующее разложение единицы $M(\Delta)$, поскольку первое не только позволяет вычислить статистику результатов измерения, но и определяет состояние системы после измерения (6); вообще говоря, одно и то же разложение единицы $M(\Delta)$ может порождаться различными инструментами $\mathbf{T}_1 \neq \mathbf{T}_2$.

Далее оказывается [4], что в случае $\mathscr{X} = \mathbf{R}$ (вещественная прямая) при всяком фиксированном ρ для $\tilde{\rho}(\Delta) = \mathbf{T}(\Delta)\rho$ имеется следующее интегральное представление:

$$\tilde{\rho}(\Delta) = \mathbf{T}(\Delta)\rho = \int_{\Delta} \rho_z \mathrm{Tr}\{\rho M(dz)\}, \tag{11}$$

где ρ_z — некоторая функция из пространства $\mathscr{X}$ результатов измерения в множество матриц плотности $K(\mathscr{H})$, а $\mathrm{Tr}\{\rho M(dz)\}$ — «плотность меры μ_ρ (8)» на $\mathscr{X}$, т. е.

$$\mu_\rho(\Delta) = \mathrm{Prob}(z \in \Delta) = \mathrm{Tr}\{\rho M(\Delta)\} = \int\limits_\Delta \mathrm{Tr}\{\rho M(dz)\}, \tag{12}$$

$$\mu_\rho(\Delta) = \int\limits_\Delta d\mu_\rho(z), \quad d\mu_\rho(z) = \mathrm{Tr}\{\rho M(dz)\}. \tag{13}$$

Определенную таким образом функцию ρ_z уже можно интерпретировать как «состояние системы после измерения, которое дало результат z». Это не противоречит статистической интерпретации квантовой механики, так как в действительности ρ_z лишь служит удобным вспомогательным инструментом, позволяющим вычислить конечное состояние системы после измерения. Физическая интерпретация формулы (11) совершенно очевидна, потому что $\mathrm{Tr}\{\rho M(dz)\}$ представляет собой вероятность получения при измерении результата в окрестности dz точки z. Для нас представление вида (11) важно, потому что в случае телепортации состояние системы после измерения корректируется с помощью некоторого унитарного преобразования U_z, зависящего от полученного результата z. Очевидно, что в этом случае подансамбль систем, отобранных условием $z \in \Delta$, после унитарной коррекции описывается матрицей плотности

$$\tilde{\rho}_{U,\Delta} = \int\limits_\Delta U_z \rho_z U_z^+ \mathrm{Tr}\{\rho M(dz)\}, \tag{14}$$

поэтому введение функции ρ_z представляется естественным шагом при попытке перенести алгоритм телепортации состояния конечномерной квантовой системы, описанный в [1], на случай непрерывной переменной.

3. ИЗМЕРЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В КВАНТОВОЙ ТЕЛЕПОРТАЦИИ

Рассмотрим теперь с точки зрения изложенной выше общей квантовомеханической теории те измерения, которые используются в алгоритмах квантовой телепортации. Пусть над частицами 1 и 2 проводится измерение, соответствующее инструменту $\mathbf{T}_{12}$. Тогда по отношению ко всей системе, включая частицу 3, этому измерению соответствует инструмент $\mathbf{T}_{123}(\Delta) = \mathbf{T}_{12}(\Delta) \otimes \mathbf{I}_3$, где $\mathbf{I}_3$ — тождественный оператор на $B_1(\mathcal{H}_3)$. Из сказанного выше следует, что после совместного измерения над первой и второй системами подансамбль систем, отобранных условием $z \in \Delta$, $\Delta \subset \mathcal{X}$, $\Delta \in \Gamma$ (мы пока не конкретизируем пространство результатов $\mathcal{X}$), описывается матрицей плотности

$$\rho'_{123,\Delta} = \frac{\mathbf{T}_{123}(\Delta)\rho}{\mathrm{Tr}_{1,2,3}\{\mathbf{T}_{123}(\Delta)\rho\}}, \tag{15}$$

а вероятность попадания z в Δ есть $\mathrm{Tr}_{1,2,3}\{\mathbf{T}_{123}(\Delta)\rho\}$; при этом редуцированная матрица плотности, описывающая состояние системы 3, имеет вид

$$\rho'_{3,\Delta} = \frac{\mathrm{Tr}_{1,2}\{\mathbf{T}_{123}(\Delta)\rho\}}{\mathrm{Tr}_{1,2,3}\{\mathbf{T}_{123}(\Delta)\rho\}}. \tag{16}$$

Мы имеем здесь частный случай следующей более общей ситуации. Пусть имеется составная система S, состоящая из двух систем A и B и находящаяся в состоянии ρ_{AB} (в случае телепортации роль системы A играют рассматриваемые совместно частицы 1 и 2, а роль системы B — частица 3). Пусть далее над системой A проводится некоторое измерение с помощью инструмента $\mathbf{T}_A$ и мы хотим найти состояние $\rho'_{B,\Delta}$ системы B после измерения (здесь и далее штрих указывает на то, что рассматриваемое состояние есть состояние той или иной системы сразу после измерения). Ясно, что инструмент $\mathbf{T}_{AB}$, описывающий изменение состояния всей системы, есть $\mathbf{T}_A \otimes \mathbf{I}_B$ и, следовательно,

$$\rho'_{B,\Delta} = \frac{\mathrm{Tr}_A\{\mathbf{T}_{AB}(\Delta)\rho_{AB}\}}{\mathrm{Tr}_{AB}\{\mathbf{T}_{AB}(\Delta)\rho_{AB}\}}. \tag{17}$$

Рассмотрим теперь числитель этой формулы, который в соответствии с принятыми выше соглашениями обозначим через $\tilde{\rho}'_{B,\Delta} = \mathrm{Tr}_A\{\mathbf{T}_{AB}(\Delta)\rho_{AB}\}$ (тогда вероятность попадания результата измерения z в Δ есть $\mathrm{Tr}_B\tilde{\rho}'_{B,\Delta}$). Пусть u_B — произвольный оператор из $B(\mathscr{H})$. Вычислим след $\mathrm{Tr}_B\{u_B\tilde{\rho}'_B\}$ (для краткости мы везде опускаем индекс Δ):

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_B\{u_B\tilde{\rho}'_B\} &= \\
= \mathrm{Tr}_B\{u_B \mathrm{Tr}_A\{\mathbf{T}_A \otimes \mathbf{I}_B\ \rho_{AB}\}\} &= \\
= \mathrm{Tr}_B\{\mathrm{Tr}_A\{I_A \otimes u_B \cdot \mathbf{T}_A \otimes \mathbf{I}_B\ \rho_{AB}\}\} &= \\
= \mathrm{Tr}_{AB}\{I_A \otimes u_B \cdot \mathbf{T}_A \otimes \mathbf{I}_B\ \rho_{AB}\} &= \\
= \mathrm{Tr}_{AB}\{\left[(\mathbf{T}_A \otimes \mathbf{I}_B)^* I_A \otimes u_B\right] \cdot \rho_{AB}\} &= \\
= \mathrm{Tr}_{AB}\{\left[(\mathbf{T}^*_A I_A) \otimes \mathbf{I}^*_B u_B\right] \cdot \rho_{AB}\} &= \\
= \mathrm{Tr}_{AB}\{[M_A \otimes u_B] \cdot \rho_{AB}\} &= \\
= \mathrm{Tr}_{AB}\{[(M_A \otimes I_B) \cdot (I_A \otimes u_B)] \cdot \rho_{AB}\} &= \\
= \mathrm{Tr}_{AB}\{[(I_A \otimes u_B) \cdot (M_A \otimes I_B)] \cdot \rho_{AB}\} &= \\
= \mathrm{Tr}_B\{\mathrm{Tr}_A\{[(I_A \otimes u_B) \cdot (M_A \otimes I_B)] \cdot \rho_{AB}\}\} &= \\
= \mathrm{Tr}_B\{u_B \mathrm{Tr}_A\{(M_A \otimes I_B) \cdot \rho_{AB}\}\}&.
\end{aligned} \tag{18}$$

Следовательно,

$$\tilde{\rho}'_{B,\Delta} = \mathrm{Tr}_A\{\mathbf{T}_{AB}(\Delta)\rho_{AB}\} = \mathrm{Tr}_A\{(M_A(\Delta) \otimes I_B) \cdot \rho_{AB}\}. \tag{19}$$

Таким образом, для того чтобы найти состояние системы B после измерения, проведенного над системой A, достаточно знать лишь порождаемое инструментом $\mathbf{T}_A$ разложение единицы в $\mathscr{H}_A$ на $\mathscr{Z}$, а не сам инструмент $\mathbf{T}_A$.

Отметим, что впервые аппарат квантовых операций был, по-видимому, применен к задаче о телепортации в [9], где рассматривался простейший случай «идеальной» телепортации с дискретным пространством $\mathscr{Z}$ исходов измерения, когда изменение состояния системы, вызванное измерением, описывается инструментом вида

$$\rho \to A_i \rho A_i^+, \tag{20}$$

где A_i — некоторый положительный оператор, а $i = 1, 2\ldots$ нумерует различные исходы измерения, т. е. точки $\mathscr{Z}$. Однако при этом телепортированное состояние было выражено через операторы A_i, полностью задающие сам инструмент.

Нас интересует возможность представления $\tilde{\rho}'_{B,\Delta}$ в виде

$$\tilde{\rho}'_{B,\Delta} = \int\limits_{\Delta} \rho_{z,B}\, d\mu_{\rho_{AB}}(z), \tag{21}$$

где $\rho_{z,B} \in K(\mathcal{H}_B)$, а мера $d\mu_{\rho_{AB}}(z)$ представляет собой плотность вероятности попадания результата измерения в окрестность точки z, т. е. удовлетворяет условию

$$\mathrm{Tr}_B \tilde{\rho}'_{B,\Delta} = \int_\Delta d\mu_{\rho_{AB}}(z). \tag{22}$$

Формально такое представление легко найти в том случае, когда мера $\mu_{\rho_{AB}}$ абсолютно непрерывна относительно исходной меры dz на $\mathcal{Z}$, а матричные элементы оператора $M_A(\Delta)$ по некоторому ортонормированному базису $|\varphi_{nA}\rangle$ системы A могут быть представлены в виде

$$\langle\varphi_{mA}|M_A(\Delta)|\varphi_{nA}\rangle = \int_\Delta dz F_{mn}(z), \tag{23}$$

где $F_{mn}(z)$ — некоторые комплекснозначные функции на $\mathcal{Z}$ (например, если измерение M соответствует одновременному измерению полной системы коммутирующих наблюдаемых с непрерывным спектром, так как в этом случае $\mathcal{H}_A = L^2(\mathcal{Z})$, а само $\mathcal{Z}$ представляет собой прямое произведение спектров операторов, входящих в эту систему, так что $F_{mn}(z) = \varphi_{mA}(z)^*\psi_{nA}(z)$). Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}'_{B,\Delta} &= \mathrm{Tr}_A\{(M_A(\Delta)\otimes I_B)\cdot\rho_{AB}\} = \sum_{mn}\langle\varphi_{mA}|M_A(\Delta)|\varphi_{nA}\rangle\rho_{nm,B} = \\ &= \sum_{mn}\int_\Delta dz\, F_{mn}(z)\,\rho_{nm,B} = \int_\Delta dz\left[\sum_{mn}F_{mn}(z)\,\rho_{nm,B}\right] = \int_\Delta dz\,\tilde{\rho}_{z,B},\end{aligned} \tag{24}$$

где оператор $\rho_{nm,B}$ на $\mathcal{H}_B$ получается из оператора ρ_{AB} взятием «частичного матричного элемента» по векторам φ_{nA} и φ_{mA} из $\mathcal{H}_A$,

$$\rho_{nm,B} = \langle\varphi_{nA}|\rho_{AB}|\varphi_{mA}\rangle, \tag{25}$$

и

$$\tilde{\rho}_{z,B} = \sum_{mn} F_{mn}(z)\,\rho_{nm,B}. \tag{26}$$

Поэтому

$$\mathrm{Tr}_B\{\tilde{\rho}'_{B,\Delta}\} = \int_\Delta d\mu_{\rho_{AB}}(z) = \int_\Delta dz\,\mathrm{Tr}_B\{\tilde{\rho}_{z,B}\}. \tag{27}$$

Следовательно, умножив и разделив подынтегральное выражение в последнем интеграле в формуле (24) на $H(z) = \mathrm{Tr}\{\tilde{\rho}_{z,B}\} > 0$, мы получаем формулу (21), где

$$\rho_{z,B} = \frac{\tilde{\rho}_{z,B}}{\mathrm{Tr}\{\tilde{\rho}_{z,B}\}} = \frac{\tilde{\rho}_{z,B}}{H(z)}, \tag{28}$$

так что $\mathrm{Tr}\{\rho_{z,B}\} = 1$, а $d\mu\rho_{AB}(z) = H(z)dz$, т. е. $H(z)$ представляет собой производную Радона—Никодима меры $d\mu_{\rho_{AB}}(z)$ по мере dz. Мы не будем специально останавливаться на обосновании корректности перестановки суммирования бесконечного ряда и интегрирования в (24) и других подобных операций, так как в конкретных случаях, рассмотренных в оставшейся части статьи, интегральное представление вида (24) следует из конкретного вида операторов $M(\Delta)$.

4. ТЕЛЕПОРТАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ ОРТОГОНАЛЬНОГО ИЗМЕРЕНИЯ

В качестве иллюстрации изложенной выше общей схемы рассмотрим сначала телепортацию неизвестного квантового состояния $|\psi\rangle$ одномерной нерелятивистской бесспиновой частицы в координатном представлении. Для того чтобы избежать усложнений, связанных с учетом симметрии относительно перестановок частиц, мы будем считать все три частицы различными. Достаточно рассмотреть тот случай, когда исходное состояние частицы 1 является чистым:

$$\rho_1 = \rho_\psi = |\psi;1\rangle\langle\psi;1|, \quad |\psi;1\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\psi(x)|x;1\rangle. \tag{29}$$

Запутанное состояние частиц 2 и 3 выберем в виде EPR-состояния (с бесконечной нормой)

$$\rho_{23} = |\psi_{23}\rangle\langle\psi_{23}|, \quad |\psi_{23}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx|x;2\rangle|x;3\rangle, \tag{30}$$

которое может быть представлено как предел нормированного состояния

$$|\Psi_{23}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxdy\Psi(x,y)|x;2\rangle|y;3\rangle, \tag{31}$$

где $\Psi(x,y) \to \delta(x-y)$ (в импульсном представлении $\Psi_{23}(p_1,p_2) \to \delta(p_1+p_2)$); формально состояние (30) является собственным вектором оператора разности координат второй и третьей частиц: $(X_2 - X_3)|\psi_{23}\rangle = 0$.

Рассмотрим совместное измерение над одной из частиц из EPR-пары и системой в неизвестном состоянии, определяемое следующим разложением единицы:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_{12}(dXdP) = I, \tag{32}$$

$$E_{12}(dXdP) = |\Phi_{XP}\rangle\langle\Phi_{XP}|\frac{dXdP}{2\pi} = \tag{33}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{iP(x-x')}|x+X;1\rangle|x;2\rangle\langle x'+X;1|\langle x';2|dXdP, \tag{34}$$

где

$$|\Phi_{XP}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{iPx}|x+X;1\rangle|x;2\rangle; \tag{35}$$

отметим, что формально состояние (35) является общим собственным вектором для пары коммутирующих наблюдаемых $X_1 - X_2$ и $P_1 + P_2$ (разность координат и полный импульс), образующих полный набор коммутирующих операторов на пространстве состояний двух частиц:

$$(X_1 - X_2)|\Phi_{XP}\rangle = X|\Phi_{XP}\rangle, \quad (P_1 + P_2)|\Phi_{XP}\rangle = P|\Phi_{XP}\rangle;$$

поэтому телепортация с ρ_{23} вида (30) и измерением (33) в точности совпадает с алгоритмом [2]. В данном случае пространством результатов измерения $\mathcal{X}$ является множество упорядоченных пар (X, P) точек $(-\infty < X < \infty, -\infty < P < \infty)$, образующих плоскость $\mathbf{R}^2$, которая является прямым произведением двух экземпляров вещественной прямой $\mathbf{R}_X$ и $\mathbf{R}_P$, соответствующих «координате» X и «импульсу» P: $\mathcal{X} = \mathbf{R}_X \times \mathbf{R}_P$.

Точный смысл формулы (33) заключается в том, что матричные элементы положительного оператора $E(\Delta)$, сопоставляемого множеству Δ, могут быть вычислены по формуле

$$\langle\Phi|E_{12}(\Delta)|\Psi\rangle = \int\limits_{\Delta} \frac{dXdP}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx' e^{iP(x-x')} \Phi^*(x+X, x)\Psi(x'+X, x'), \tag{36}$$

аналогичной формуле (23).

Простые вычисления показывают, что телепортированная матрица плотности в канале 3 принимает вид

$$\tilde{\rho}'_{3,\Delta} = \mathrm{Tr}_{1,2}\{(\rho_1 \otimes \rho_{23})E_{12}(\Delta)\} = \int\limits_{\Delta} \rho_{XP} \frac{dXdP}{2\pi}, \tag{37}$$

где

$$\rho_{XP} = |\psi_{XP}; 3\rangle\langle\psi_{XP}; 3|, \quad \psi_{XP}(x) = e^{iPx}\psi(x+X). \tag{38}$$

Поскольку

$$\mathrm{Tr}_3\{\rho_{XP}\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi(x+X)|^2 = 1, \tag{39}$$

ясно, что плотность вероятности получить при измерении значения в окрестности точки (X, P) в интервале (dX, dP) есть $1/2\pi$ и не зависит от $|\psi; 1\rangle$, так что измерение не дает никакой информации о телепортированном состоянии. Полная вероятность получения какой бы то ни было пары (X, P) оказывается бесконечной вследствие ненормируемости состояния (30).

Из формул (37), (38) следует, что применяя к частице 3 унитарное преобразование

$$U_{XP}: \ \psi(x) \to e^{iP(x-X)}\psi(x-X), \tag{40}$$

которое зависит только от результата измерения над частицами 1 и 2, мы получим в канале 3 состояние, совпадающее с исходным состоянием частицы 1, т. е. осуществим телепортацию состояния системы 1. Отметим, что в данном примере унитарная коррекция (не зависящая от ρ_1) состояния третьей частицы до состояния ρ_1 возможна для любого входного состояния ρ_1 при любом исходе измерения, т. е. при любой паре (X, P). Однако, вообще говоря, имеет смысл рассматривать и такие алгоритмы телепортации, которые позволяют телепортировать не все возможные состояния частицы 1, а лишь некоторое их подмножество $K'(\mathscr{H}_1)$, например, состояния, принадлежащие некоторому подпространству $\mathscr{H}'_1 \subset \mathscr{H}_1$ [9] (пример такого рода рассматривается в следующем разделе.) Кроме того, требование того, что нужная унитарная коррекция U_z существует при любом исходе измерения, также не является обязательным. Действительно, все пространство возможных исходов измерения $\mathscr{X}$ всегда можно разбить на два непересекающихся подмножества $\mathscr{X}_1$ и $\mathscr{X}_2$,

$$\mathscr{X} = \mathscr{X}_1 \cap \mathscr{X}_2 = \emptyset, \quad \mathscr{X} = \mathscr{X}_1 \cup \mathscr{X}_2,$$

следующим образом: произвольная точка $z \in \mathscr{X}$ принадлежит множеству $\mathscr{X}_1$ тогда и только тогда, когда существует унитарное преобразование U_z с нужными нам свойствами. Достаточным условием для телепортации тогда будет ненулевая мера $\mu_\rho(\mathscr{X}_1)$ для всех $\rho \in K'(\mathscr{H}_1)$. При этом алгоритм телепортации имеет следующий вид: ансамбль систем, представляющих исходное состояние ρ_1, подвергается совместному с частицей 2 измерению m_{12}. Если получен результат $z \in \mathscr{X}_2$, то данный экземпляр системы 3 отбрасывается. Если $z \in \mathscr{X}_1$, то система 3 подвергается унитарной коррекции U_z. Тогда подансамбль таким образом отобранных и скорректированных частиц 3 находится в том же исходном состоянии ρ_1.

5. ТЕЛЕПОРТАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ НЕОРТОГОНАЛЬНОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Рассмотрим теперь пример телепортации неизвестного состояния с помощью измерения, описываемого неортогональным разложением единицы. Рассмотрим модельную квантовую систему, гамильтониан которой имеет чисто непрерывный невырожденный спектр, совпадающий с интервалом $(0, +\infty)$ (примером может служить свободная нерелятивистская одномерная бесспиновая частица, допустимые состояния которой ограничены тем условием, что в их разложение входят плоские волны, бегущие в одном произвольно выбранном направлении). Таким образом, мы будем предполагать, что произвольное чистое состояние системы 1 задается волновой функцией, определенной на положительной полуоси:

$$|\psi; 1\rangle = \int_0^\infty \psi(E)|E; 1\rangle dE, \quad \langle E|E'\rangle = \delta(E - E'). \tag{41}$$

EPR-состояние в энергетическом представлении может быть выбрано, например, в виде

$$|\psi_{23}\rangle = \int_0^{\varepsilon_0} d\varepsilon|\varepsilon; 2\rangle|\varepsilon_0 - \varepsilon; 3\rangle. \tag{42}$$

Такая EPR-пара может рассматриваться как предел нормированного состояния

$$|\Psi_{23}\rangle = \int_0^{\varepsilon_0}\int_0^{\varepsilon_0} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)|\varepsilon_1; 1\rangle|\varepsilon_2; 2\rangle, \tag{43}$$

где $\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \to \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_0)$. Подобное состояние получается при параметрической конверсии вниз по энергии, если частота накачки равна ε_0. Формально EPR-состояние может быть также выбрано в виде $\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \to \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$; при этом, однако, не очень понятно, как такое состояние можно было бы реализовать экспериментально.

Рассмотрим теперь совместное измерение $M_{12}(d\Omega dT)$ над частицами 1 и 2, которое может быть представлено в виде неортогонального разложения единицы

$$M_{12}(d\Omega dT) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\Omega}^{\Omega} d\omega e^{i\omega T}|\Omega+\omega;1\rangle|\Omega-\omega;2\rangle\right)\left(\int_{-\Omega}^{\Omega} d\omega' e^{-i\omega' T}\langle\Omega+\omega';1|\langle\Omega-\omega';2|\right) d\Omega dT = \quad (44)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}\int_{-\Omega}^{\Omega} d\omega d\omega' e^{i(\omega-\omega')T}|\Omega+\omega;1\rangle|\Omega-\omega;2\rangle\langle\Omega+\omega';1|\langle\Omega-\omega';2|d\Omega dT; \quad (45)$$

здесь Ω и T меняются в интервалах $\mathbf{R}_\Omega^+ = (0; +\infty)$ и $\mathbf{R}_T = (-\infty; +\infty)$ соответственно, так что пространство всех возможных результатов измерения есть $\mathcal{R} = \mathbf{R}_\Omega^+ \times \mathbf{R}_T$. Величины Ω и ω имеют смысл полусуммы и полуразности энергий (мы не делаем различий между частотой и энергией) двух частиц, например, фотонов в бифотоне. Такое измерение, в определенном смысле являющееся промежуточным между измерениями частоты и параметра времени для двухчастичных состояний, может быть для фотонов в принципе реализовано экспериментально с использованием параметрической конверсии вверх по энергии [11].

Несложно проверить, что $M_{12}(d\Omega dT)$ действительно является разложением единицы:

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty M_{12}(d\Omega dT) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\Omega\int_{-\infty}^\infty dT\int_{-\Omega}^{\Omega} d\omega\int_{-\Omega}^{\Omega} d\omega' e^{i(\omega-\omega')T}|\Omega+\omega;1\rangle|\Omega-\omega;2\rangle\langle\Omega+\omega';1|\langle\Omega-\omega';2| =$$

$$= 2\int_0^\infty d\Omega\int_{-\Omega}^{\Omega} d\omega\int_{-\Omega}^{\Omega} d\omega'\delta(\omega-\omega')|\Omega+\omega;1\rangle|\Omega-\omega;2\rangle\langle\Omega+\omega';1|\langle\Omega-\omega';2| =$$

$$= \int_0^\infty d\omega_1\int_0^\infty d\omega_2|\omega_1;1\rangle|\omega_2;2\rangle\langle\omega_1;1|\langle\omega_2;2| = I_{12},$$

где $\omega_1 = \Omega + \omega$ и $\omega_2 = \Omega - \omega$.

Легко проверить, что теперь телепортированная матрица плотности имеет вид

$$\tilde{\rho}'_{3,\Delta} = \mathrm{Tr}_{1,2}\{(\rho_1 \otimes \rho_{23})M_{12}(\Delta)\} = \int_\Delta \rho_{\Omega T}\frac{d\Omega dT}{\pi}, \quad \rho_{\Omega T} = |\psi_{\Omega T};3\rangle\langle\psi_{\Omega T};3|, \quad (46)$$

где (для краткости мы пишем $|\psi_3\rangle$ вместо $|\psi_{\Omega T};3\rangle$)

$$|\psi_{\Omega T};3\rangle = |\psi_3\rangle = \int\limits_{\varepsilon_0-\min\{\varepsilon_0,2\Omega\}}^{\varepsilon_0} d\varepsilon e^{-i(2\Omega-\varepsilon_0+\varepsilon)T}\psi(2\Omega-\varepsilon_0+\varepsilon)|\varepsilon;3\rangle. \tag{47}$$

Вероятность получить при измерении значения в интервале $(\Omega, \Omega+d\Omega; T, T+dT)$ равна

$$\mathrm{Tr}\{\tilde{\rho}'_{d\Omega dT}\} = \mathrm{Tr}_{1,2,3}\{(\rho_1\otimes\rho_{23})M_{12}(d\Omega dT)\} = \frac{d\Omega dT}{\pi}\int\limits_{\varepsilon_0-\min\{\varepsilon_0,2\Omega\}}^{\varepsilon_0}|\psi(2\Omega-\varepsilon_0+\varepsilon)|^2 d\varepsilon. \tag{48}$$

Заметим, что соответствующая плотность вероятности не зависит от T. Поскольку T изменяется в бесконечных пределах, полная вероятность, как и в предыдущем разделе, оказывается бесконечной. Формально это связано с тем, что состояние (42) имеет бесконечную норму. Однако это не приводит к каким-либо трудностям, так как для получения физически осмысленных результатов вполне достаточно знания относительных вероятностей осуществления различных событий.

Допустим теперь, что нам известно, что носитель функции ψ системы 1 сосредоточен в некотором отрезке $[E_{min}, E_{max}]$, т. е. $\psi(E) = 0$ при $E > E_{max}$ и $E < E_{min}$. При этом плотность вероятности (48) уже начинает зависеть от Ω; так, она обращается в нуль при $2\Omega > E_{max} + \varepsilon_0$, так как в этом случае функция ψ тождественно равна нулю на всем интервале интегрирования. Ясно, что условием осуществления точной телепортации является принадлежность носителя функции ψ интервалу интегрирования в (47); при этом плотность вероятности получения того или иного значения Ω не зависит от $|\psi;1\rangle$, так как при этом интеграл в (48) тождественно равен единице в силу нормировки $|\psi;1\rangle$.

Дальнейший анализ удобно провести отдельно для случаев $\varepsilon_0 > E_{max}$ и $\varepsilon_0 < E_{max}$. Рассмотрим сначала случай $\varepsilon_0 > E_{max}$. Если измерение дало результат $2\Omega < \varepsilon_0$ (случай 1а), то состояние системы 3 будет иметь вид $|\psi_3\rangle\langle\psi_3|$, где

$$|\psi_3\rangle = \int\limits_{\gamma}^{\varepsilon_0} d\varepsilon e^{-i(\varepsilon-\gamma)T}\psi(\varepsilon-\gamma)|\varepsilon;3\rangle, \quad \gamma = \varepsilon_0 - 2\Omega. \tag{49}$$

При этом аргумент функции ψ в подынтегральном выражении меняется в интервале от 0 до 2Ω. Отсюда следует, что телепортация состояния ψ возможна только в том случае, если его носитель $[E_{min}, E_{max}] \subset [0, 2\Omega]$, т. е. если $E_{max} < 2\Omega$. Таким образом, $[E_{max}, \varepsilon_0] \subset \mathscr{K}_1$ (мы опускаем тривиальный прямой сомножитель $\mathbf{R}_T$ в $\mathscr{K}_1$, поскольку от значения T ничего не зависит).

Если же измерение дало результат $2\Omega > \varepsilon_0$ (случай 1б), то состояние системы 3 будет иметь вид $|\psi_3\rangle\langle\psi_3|$, где

$$|\psi_3\rangle = \int\limits_{0}^{\varepsilon_0} d\varepsilon e^{-i(\varepsilon+\gamma)T}\psi(\varepsilon+\gamma)|\varepsilon;3\rangle, \quad \gamma = 2\Omega - \varepsilon_0. \tag{50}$$

Теперь аргумент функции ψ в подынтегральном выражении меняется в интервале от γ до 2Ω и телепортация состояния ψ возможна только в том случае, если его носитель

$[E_{min}, E_{max}] \subset [\gamma, 2\Omega]$, т. е. если $\gamma < E_{min}$, или, иными словами, $2\Omega < \varepsilon_0 + E_{min}$ (условие $E_{max} < 2\Omega$ выполняется автоматически, поскольку $2\Omega > \varepsilon_0 > E_{max}$). Таким образом, $[\varepsilon_0, \varepsilon_0 + E_{min}] \subset \mathscr{K}_1$. Объединяя случаи 1а и 1б, мы получаем $\mathscr{K}_1 = [E_{max}, \varepsilon_0 + E_{min}]$.

Из уравнений (49) и (50) видно, что в случаях 1а и 1б система 3 переходит в состояние, тождественное состоянию системы 1 перед измерением, если сразу после измерения ее подвергнуть унитарным преобразованиям

$$\psi(\varepsilon) \to \tilde{\psi}(\varepsilon) = \begin{cases} \psi(\varepsilon), & \text{если} \ \ \varepsilon > \varepsilon_0, \\ \psi(\varepsilon + \gamma) e^{i\varepsilon T}, & \text{если} \ \ 0 < \varepsilon < 2\Omega, \\ \psi(\varepsilon - 2\Omega), & \text{если} \ \ 2\Omega < \varepsilon < \varepsilon_0, \end{cases} \tag{51}$$

и

$$\psi(\varepsilon) \to \tilde{\psi}(\varepsilon) = \begin{cases} \psi(\varepsilon), & \text{если} \ \ \varepsilon > 2\Omega, \\ \psi(\varepsilon + \gamma) e^{i\varepsilon T}, & \text{если} \ \ \gamma < \varepsilon < 2\Omega, \\ \psi(\varepsilon - 2\Omega), & \text{если} \ \ 0 < \varepsilon < \gamma, \end{cases} \tag{52}$$

соответственно. Рассмотрим теперь ситуацию, когда $\varepsilon_0 < E_{max}$. В этом случае измерения, давшие результат $2\Omega < \varepsilon_0$, заведомо не подходят для телепортации, так как интервал изменения аргумента функции ψ в (49) не покрывает носителя функции ψ. Однако если измерение дало результат $2\Omega > \varepsilon_0$, то, так же как и в случае 1б, телепортация возможна (с использованием унитарного преобразования (50)), если $[E_{min}, E_{max}] \subset [\gamma, 2\Omega]$, т. е. если одновременно выполняются условия $\gamma < E_{min}$ (т. е. $2\Omega < \varepsilon_0 + E_{min}$) и $E_{max} < 2\Omega$ (теперь это неравенство накладывает еще одно дополнительное условие, а не выполняется автоматически). Для того чтобы существовал некоторый интервал значений Ω, в котором одновременно выполнялись бы условия $2\Omega < \varepsilon_0 + E_{min}$ и $E_{max} < 2\Omega$, требуется соблюдение неравенства $E_{max} < E_{min} + \varepsilon_0$, или, иными словами, $\varepsilon_0 > E_{max} - E_{min}$. При этом опять $\mathscr{K}_1 = [E_{max}, \varepsilon_0 + E_{min}]$. Таким образом, в предлагаемой схеме телепортация возможна тогда и только тогда, когда ширина спектра EPR-пары (42) превосходит спектральную ширину носителя функции ψ.

Отметим, что вопрос о телепортации широкополосного однофотонного волнового пакета впервые рассматривался в [10, 11]. Кроме того, недавно алгоритм телепортации одномодового электромагнитного поля с помощью сжатого состояния [3] был обобщен на случай входного широкополосного состояния [12], спектральная плотность которого предполагалась сосредоточенной в окрестности половинной частоты поля накачки, порождающего вышеупомянутое сжатое состояние. При этом, в отличие от изложенного выше алгоритма, схема [12] основана на ортогональных измерениях. С физической точки зрения неортогональное измерение (44) естественно возникает при рассмотрении состояний системы в энергетическом представлении: точно так же, как в первоначально предложенной схеме телепортации, описанной в координатном представлении [2], используется одновременное измерение координаты и импульса; естественно предположить, что аналогичная процедура может быть реализована с помощью измерения энергии и сопряженной ей величины, т. е. времени. Однако в связи с тем, что в квантовой механике наблюдаемой времени не соответствует никакой самосопряженный оператор, получающееся измерение оказывается неортогональным (при этом, естественно, используется EPR-пара, в которой состояния частиц запутаны по энергии, а не по координате).

Отметим, что в работе [3] исследовалась телепортация квантового состояния, описываемого динамическими переменными (x, p) (неизвестное состояние в [3] соответствует одномодовому состоянию фотона) для случая неидеальной EPR-пары (сжатого состояния). Неидеальность EPR-корреляций ведет к уменьшению точности (fidelity) телепортации. Как видно из примера, основанного на ортогональном измерении, с сингулярным EPR-состоянием можно добиться безусловной точной (fidelity = 1) телепортации. Под безусловной телепортацией здесь понимается такая ситуация, когда любой исход измерения приводит к точной телепортации. В случае рассмотренного выше неортогонального измерения безусловная точная телепортация оказывается невозможной даже для сингулярной EPR-пары: для некоторых исходов измерений не существует унитарного преобразования, применение которого к телепортируемому состоянию переводит его в точную копию исходного состояния; такие исходы должны быть отброшены. Для оставшихся исходов измерений имеет место точная телепортация.

В экспериментах по телепортации может возникнуть ситуация, когда вместо измерения, которое теоретически приводит при любом исходе к точной и безусловной телепортации, в действительности реализуется некоторое его приближение, и телепортация становится условной (даже если допустить, что в экспериментах используется идеальная EPR-пара). Формально любое измерение описывается разложением единицы; при экспериментальной реализации того или иного разложения единицы требуется подобрать такое взаимодействие с прибором, чтобы исходы измерений давали распределение вероятностей, предписываемое данным разложением единицы, и этими исходами исчерпывались все возможные результаты измерений. Как правило, такое взаимодействие подобрать трудно даже для систем с дискретной переменной (например, спином или поляризаций), поэтому возникают ненужные исходы, которые должны быть отброшены. Например, неортогональное разложение единицы (44) может быть реализовано путем слияния пары фотонов в один при прохождении через нелинейный кристалл (параметрическая конверсии вверх по энергии) и дальнейшей его регистрацией фотодетектором [11]. Однако из-за малой нелинейной восприимчивости возникает множество холостых результатов, которые следует отбросить.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе с точки зрения общей теории квантовомеханических измерений рассмотрены измерения, использующиеся в квантовой телепортации. Показано, что телепортированное состояние полностью определяется порождаемым соответствующим инструментом (квантовой операцией, описывающей изменение состояние системы в результате измерения) разложением единицы (положительной операторнозначной мерой) в пространстве состояний системы, так что в действительности нет необходимости полностью задавать сам инструмент, который дает наиболее полное описание воздействия процедуры измерения на квантовую систему. Предложен протокол квантовой телепортации состояния системы с невырожденным непрерывным спектром, основанный на неортогональных измерениях. В этом протоколе, как и во всех других известных протоколах, обеспечивающих точную телепортацию, приходится использовать идеальную EPR-пару с сингулярными корреляциями, которой отвечает ненормируемая волновая функция[1]). При этом вопрос о возможности точной телепортации непрерывной квантовой переменной с помощью физически реализуемых (нормированных) состояний остается открытым; так, до сих пор не известно ни одного алгоритма точной телепортации непрерывной переменной для несингулярных EPR-состояний.

В заключение авторы благодарят К. А. Валиева за обсуждение полученных в статье результатов. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 99-02-18127) и грантом № 02.04.5.2.40.Т.50 программы «Перспективные технологии и устройства микро- и наноэлектроники».

Литература

1. C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).
2. L. Vaidman, Phys. Rev. A **49**, 1473 (1994).
3. S. Braunstein and H. J. Kimble, Phys. Rev. Lett. **80**, 869 (1998).
4. M. Ozawa, J. Math. Phys. **34**, 5596 (1993).
5. K. Kraus, *States, Effects and Operations*, Springer-Verlag, Berlin (1983).
6. А. С. Холево, *Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории*, Наука, Москва (1980).
7. J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University, Princeton, NJ (1955).
8. G. Lüders, Ann. Physik **8**(6), 322 (1951).
9. M. A. Nielsen and C. M. Caves, E-print archives http://xxx.lanl.gov/quant-ph/9608001.
10. S. N. Molotkov, Phys. Lett. A **245**, 339 (1998); E-print archives http://xxx.lanl.gov/quant-ph/9805045.
11. S. N. Molotkov, Письма в ЖЭТФ **68**, 248 (1998); E-print archives http://xxx.lanl.gov/quant-ph/9807013.
12. P. van Loock, S. Braunstein, and H. J. Kimble, E-print archives http://xxx.lanl.gov/quant-ph/9902030.

[1]) Вообще говоря, корректное рассмотрение таких состояний требует привлечения аппарата оснащенных гильбертовых пространств; в нашем рассмотрении вопрос о бесконечной норме используемых EPR-состояний удается обойти, в силу того что для нас существенными оказываются только относительные вероятности попадания результата измерения в то или иное множество.