ЖЭТФ, 1999, том 116, вып. 3(9), стр. 885–901

ДИНАМИКА ПЛАЗМЕННЫХ СГУСТКОВ В ПЛАВНО-НЕОДНОРОДНЫХ ВНЕШНИХ ПОЛЯХ

Д. С. Дорожкина[*], *В. Е. Семенов*[†]

Институт прикладной физики Российской академии наук
603600, Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 10 марта 1999 г.

В рамках квазинейтрального приближения методом моментов проведен анализ системы кинетических уравнений, описывающих процесс расширения в вакуум плазменного сгустка, содержащего в общем случае несколько сортов заряженных частиц. Для двухкомпонентной бесстолкновительной плазмы во внешних плавно-неоднородных потенциальных полях получено замкнутое описание динамики матриц центрированных вторых моментов функций распределения частиц по скоростям. Построен новый класс автомодельных решений кинетических уравнений, где роль параметров играют моменты функций распределения. Данные решения справедливы при любом соотношении между массами и энергиями составляющих плазму частиц и описывают в общем случае динамику несимметричного в пространстве плазменного сгустка. Для симметричного сгустка найдено также аналитическое решение, отвечающее наличию вихревых электрических токов в плазме, а для несимметричного установлена существенная роль межчастичных столкновений, приводящих к анизотропии процесса расширения плазмы в вакуум. Разработанная методика используется для исследования процессов ускорения и сжатия плазменного сгустка в нестационарных магнитных полях, имеющих пробочную конфигурацию.

PACS: 52.90.+z

1. ВВЕДЕНИЕ

В отсутствие внешних полей общий характер динамики плазмы в вакууме представляется вполне очевидным. Локализованный первоначально в некоторой области пространства сгусток с течением времени неограниченно расширяется и остывает. Используя же внешнее магнитное поле, этот сгусток можно сжимать и ускорять как целое. Подобные процессы представляют значительный интерес как для астрофизиков, так и для исследователей, работающих в области управляемого термоядерного синтеза. Важным элементом их изучения является детальное исследование динамики сгустка в свободном пространстве. Следует отметить, что расширение в вакуум полуограниченной плазмы, рассматривавшееся ранее многими исследователями [1–5], и результаты обобщения этой одномерной задачи на трехмерный случай [6, 7] не описывают в действительности свободной динамики плазменного сгустка. Дело в том, что в исследовавшихся в указанных работах моделях предполагалось наличие неограниченного запаса энергии и частиц в плазме, что в значительной степени соответствует ситуации, когда в определенной области пространства имеются непрерывно действующие источники.

[*]E-mail: dorozh@appl.sci-nnov.ru
[†]E-mail: sss@appl.sci-nnov.ru

Свободное расширение ограниченного сгустка в вакуум всегда сопровождается остыванием плазмы, которое ранее учитывалось лишь в рамках феноменологического гидродинамического описания [8]. В последнее время, однако, в этой области достигнуты заметные успехи [9–14], позволившие в итоге построить для двухкомпонентной плазмы аналитическое решение бесстолкновительных кинетических уравнений в самосогласованном поле разделения зарядов.

В представленной работе дан подробный анализ этих решений с обобщением некоторых их результатов как на случай плотной плазмы, в которой существенную роль играют межчастичные столкновения, так и на случай многокомпонентной плазмы с частицами различных сортов. На основе разработанной методики построено решение кинетических уравнений Власова для плазменного сгустка во внешних плавно-неоднородных потенциальных полях, действующих на частицы плазмы. Полученные результаты используются для исследования ускорения и сжатия плазменного сгустка в нестационарных магнитных полях, имеющих пробочную конфигурацию.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Динамика плазменного сгустка во внешних потенциальных полях в общем случае описывается системой кинетических уравнений для функций распределения частиц каждого сорта по скоростям, $f_\alpha(\mathbf{v},\mathbf{r},t)$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla_\mathbf{r})\,f_\alpha-\frac{Z_\alpha e}{m_\alpha}(\nabla_\mathbf{r}\varphi\cdot\nabla_\mathbf{v})\,f_\alpha-\frac{1}{m_\alpha}(\nabla_\mathbf{r}U_\alpha\cdot\nabla_\mathbf{v})\,f_\alpha=I_\alpha,\\ \nabla_\mathbf{r}\equiv\sum_{k=1}^{3}\mathbf{e}_k\frac{\partial}{\partial r_k},\quad \nabla_\mathbf{v}\equiv\sum_{k=1}^{3}\mathbf{e}_k\frac{\partial}{\partial v_k},\end{gathered}\tag{1}$$

где e — абсолютная величина элементарного заряда; Z_α, m_α — зарядовое число и масса частиц сорта α; $\varphi(\mathbf{r},t)$ — потенциал электрического поля, возникающего в процессе расширения плазмы вследствие разделения зарядов; $U_\alpha(\mathbf{r},t)$ — потенциал внешнего поля, действующего на «α-частицы»; I_α — соответствующий интеграл столкновений; r_k, v_k — компоненты радиуса-вектора $\mathbf{r}$ и вектора скорости $\mathbf{v}$ соответственно; $\mathbf{e}_k$ — единичный вектор в направлении r_k. В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая упругих столкновений между частицами плазмы, полагая, что интегралы столкновений не изменяют концентрации частиц каждого сорта, плотности импульса в плазме и плотности ее кинетической энергии:

$$\int I_\alpha d\mathbf{v}=0\,,\tag{2}$$

$$\sum_\alpha m_\alpha\int v_k I_\alpha d\mathbf{v}=0\quad(k=1,2,3)\,,\tag{3}$$

$$\sum_\alpha\sum_{k=1}^{3}\int m_\alpha v_k^2 I_\alpha d\mathbf{v}=0\,.\tag{4}$$

При анализе расширения достаточно плотной плазмы потенциал поля разделения зарядов φ определяется из условия квазинейтральности:

$$\sum_\alpha Z_\alpha n_\alpha = 0\,, \quad n_\alpha(\mathbf{r},t) \equiv \int f_\alpha(\mathbf{v},\mathbf{r},t)\,d\mathbf{v}\,, \tag{5}$$

где $n_\alpha(\mathbf{r},t)$ — концентрация «α-частиц». В простейшем случае отсутствия в плазме вихревых токов соотношение (5) позволяет получить выражение для напряженности амбиполярного электрического поля через функции распределения частиц в явном виде:

$$e\,\frac{\partial\varphi}{\partial r_j} = -\frac{\displaystyle\sum_\alpha\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial r_k}\int v_k v_j Z_\alpha f_\alpha d\mathbf{v} + \sum_\alpha \frac{Z_\alpha}{m_\alpha}\frac{\partial U_\alpha}{\partial r_j}\int f_\alpha(\mathbf{v},\mathbf{r},t)d\mathbf{v}}{\displaystyle\sum_\alpha \frac{Z_\alpha^2}{m_\alpha}\int f_\alpha(\mathbf{v},\mathbf{r},t)d\mathbf{v}}. \tag{6}$$

Подставляя (6) в исходные кинетические уравнения, получим систему интегро-дифференциальных уравнений, поиск решений которой при некоторых заданных начальных распределениях частиц каждого сорта по скоростям и является целью дальнейших исследований.

В работе [14] в рамках квазинейтрального приближения (5) построено автомодельное решение бесстолкновительных ($I_\alpha = 0$) кинетических уравнений Власова (1), описывающее свободное ($U_\alpha = 0$) расширение в вакуум сгустка двухкомпонентной плазмы с произвольным соотношением между массами частиц и энергиями их хаотического теплового движения. Найденные при этом закономерности процесса расширения оказываются достаточно универсальными и могут быть выведены для произвольных начальных функций распределения частиц по скоростям, в том числе не соответствующих автомодельному решению, но совместимых с условием квазинейтральности (5). Данное обстоятельство представляется весьма важным для анализа более общих случаев процесса расширения плазмы в вакуум с учетом межчастичных столкновений, а также динамики плазменного сгустка во внешних полях. Поэтому в первую очередь ниже приведены результаты общего исследования методом моментов уравнений (1), (5), (6), которые затем будут использованы для построения точных решений.

3. МЕТОД МОМЕНТОВ

Определим операцию усреднения произвольной функции $\Psi(\mathbf{v},\mathbf{r},t)$ по функции распределения f_α как вычисление функционала:

$$\langle\Psi\rangle_\alpha \equiv \frac{1}{N_\alpha}\iint \Psi(\mathbf{v},\mathbf{r},t) f_\alpha(\mathbf{v},\mathbf{r},t)d\mathbf{v}d\mathbf{r}\,, \tag{7}$$

где $N_\alpha \equiv \iint f_\alpha(\mathbf{v},\mathbf{r},t)d\mathbf{v}d\mathbf{r}$ — сохраняющееся число частиц сорта α. Тогда вследствие квазинейтральности плазмы (5) для любой функции $\tilde\Psi(\mathbf{r},t)$, не зависящей явно от скорости частиц $\mathbf{v}$, справедливы соотношения

$$\begin{gathered}\sum_\alpha Z_\alpha N_\alpha \left\langle\tilde\Psi(\mathbf{r},t)\right\rangle_\alpha = 0,\\ \sum_\alpha Z_\alpha N_\alpha \sum_{k=1}^{3}\left\langle v_k\frac{\partial\tilde\Psi}{\partial r_k}\right\rangle_\alpha = \sum_\alpha Z_\alpha N_\alpha\left[\frac{d}{dt}\langle\tilde\Psi\rangle_\alpha - \left\langle\frac{\partial}{\partial t}\tilde\Psi\right\rangle_\alpha\right] = 0\,.\end{gathered} \tag{8}$$

С другой стороны, для модели упругих столкновений (2)–(4) нетрудно получить, что

$$\iint \tilde{\Psi}(\mathbf{r},t) I_\alpha d\mathbf{v}\, d\mathbf{r} = 0, \quad \sum_\alpha M_\alpha \iint v_k \tilde{\Psi} I_\alpha d\mathbf{v}\, d\mathbf{r} = 0, \quad k = 1,2,3,$$
$$\sum_\alpha M_\alpha \sum_{k=1}^{3} \iint v_k^2 \tilde{\Psi}(\mathbf{r},t) I_\alpha d\mathbf{v}\, d\mathbf{r} = 0, \tag{9}$$

где $M_\alpha \equiv m_\alpha N_\alpha$ — полная масса α-компоненты плазмы.

В отсутствие внешних полей ($U_\alpha = 0$), используя (8), (9), из кинетических уравнений (1) можно вывести следующие дифференциальные соотношения между различными моментами функций распределения частиц:

$$\frac{d}{dt}\langle r_k\rangle_\alpha = \langle v_k\rangle_\alpha, \tag{10}$$

$$\sum_\alpha M_\alpha \frac{d}{dt}\langle v_k\rangle_\alpha \equiv M\frac{d^2}{dt^2}R_k = 0, \tag{11}$$

$$\frac{d}{dt}\langle \tilde{r}_k\tilde{r}_j\rangle_\alpha = \langle \tilde{r}_k\tilde{v}_j\rangle_\alpha + \langle \tilde{v}_k\tilde{r}_j\rangle_\alpha, \tag{12}$$

$$\frac{d}{dt}\sum_\alpha M_\alpha\langle \tilde{r}_k\tilde{v}_j\rangle_\alpha = \sum_\alpha M_\alpha\langle \tilde{v}_k\tilde{r}_j\rangle_\alpha, \tag{13}$$

$$\frac{d}{dt}\sum_\alpha\sum_{k=1}^{3} M_\alpha\left\langle \tilde{v}_k^2\right\rangle_\alpha = 0, \tag{14}$$

где $M \equiv \sum_\alpha M_\alpha$ — полная масса плазмы, $R_k(t) \equiv \sum_\alpha \mu_\alpha\langle r_k\rangle_\alpha$ — координаты центра масс плазменного сгустка, $\mu_\alpha \equiv M_\alpha/M$, $\tilde{r}_k \equiv r_k - R_k$, $\tilde{v}_k \equiv v_k - dR_k/dt$ — соответственно компоненты радиуса-вектора $\tilde{\mathbf{r}}$ и вектора скорости $\tilde{\mathbf{v}}$ в системе отсчета, связанной с центром масс сгустка.

В общем случае многокомпонентной плазмы система уравнений (10)–(14) для моментов оказывается незамкнутой. Тем не менее она обладает рядом нетривиальных интегралов, позволяющих определить эволюцию характерного размера плазменного сгустка и энергии теплового (хаотического) движения входящих в него частиц. Действительно, определим характерный размер плазмы l через центрированные вторые моменты:

$$l^2(t) \equiv \sum_\alpha \sum_{k=1}^{3} \mu_\alpha\left\langle \tilde{r}_k^2\right\rangle_\alpha. \tag{15}$$

Тогда из соотношений (12)–(14) следует, что динамика $l^2(t)$ (т. е. расширение плазмы) полностью определяется начальными значениями вторых моментов функций распределения f_α:

$$\frac{d^2}{dt^2}l^2 = 2\sum_\alpha \sum_{k=1}^{3} \mu_\alpha\left\langle \tilde{v}_k^2\right\rangle_\alpha \equiv 4\frac{W}{M} = \mathrm{const}, \tag{16}$$

$$\frac{d}{dt}l^2 = 2\sum_\alpha \sum_{k=1}^{3} \mu_\alpha\langle \tilde{r}_k\tilde{v}_k\rangle_\alpha, \tag{17}$$

где W — полная кинетическая энергия движения частиц плазмы в системе отсчета, связанной с ее центром масс.

Остывание плазмы в процессе ее расширения описывается соотношением, вытекающим непосредственно из (12), (13):

$$\sum_{\alpha}\sum_{k=1}^{3} M_\alpha \left\langle \left(\tilde{v}_k - \frac{\tilde{r}_k}{l}\frac{dl}{dt} \right)^2 \right\rangle_\alpha = 2W - M\left(\frac{dl}{dt}\right)^2. \qquad (18)$$

Правая часть выражения (18) убывает с течением времени обратно пропорционально l^2, что следует из первого интеграла уравнения (16):

$$\left[\frac{2W}{M} - \left(\frac{dl}{dt}\right)^2\right] l^2(t) = \text{const}. \qquad (19)$$

Таким образом, тепловой разброс частиц каждого сорта по скоростям относительно «гидродинамической» скорости

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{\mathbf{r}-\mathbf{R}}{l}\frac{dl}{dt}$$

(где $\mathbf{R}$ — вектор с компонентами R_k) уменьшается в процессе расширения обратно пропорционально размеру плазменного сгустка l. Соответственно, можно утверждать, что по истечении достаточно большого промежутка времени (когда характерный масштаб $l(t)$ станет значительно больше первоначального $l(0)$) процесс расширения выйдет на автомодельный режим с гидродинамической скоростью $\mathbf{u}$. В данном автомодельном режиме все пространственные масштабы для каждой из компонент плазмы возрастают пропорционально l:

$$n_\alpha(\mathbf{r},t) = \frac{l(0)}{l(t)}\tilde{N}_\alpha\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{R}}{l(t)}\right). \qquad (20)$$

В общем случае многокомпонентной плазмы из уравнений (12)–(14) не удается, к сожалению, найти законы изменения элементов матрицы вторых пространственных моментов $\langle\tilde{r}_k\tilde{r}_j\rangle_\alpha$, т. е. эволюция формы плазменного сгустка и относительного распределения в нем частиц различного сорта остается неопределенной. Однако при наличии в плазме только двух компонент очевидно, что вследствие выполнения условия квазинейтральности (5) матрицы вторых пространственных моментов одинаковы для обоих сортов противоположно заряженных частиц. При этом уравнения (16)–(19) дают достаточно полное описание расширения в вакуум, например, сферически-симметричного плазменного сгустка. В простейшем случае расширения бесстолкновительной двухкомпонентной плазмы в отсутствие электрических токов, т. е. когда

$$\sum_{\alpha=1,2} Z_\alpha \int v_k f_\alpha d\mathbf{v} = 0,$$

у частиц различного сорта совпадают и матрицы смешанных вторых моментов $\langle\tilde{r}_k\tilde{v}_j\rangle_\alpha$. Поэтому система уравнений для вторых моментов оказывается замкнутой[1]:

[1] В уравнениях (21)–(23) опущен индекс α у пространственных и смешанных моментов, совпадающих для частиц различного сорта.

$$\frac{d}{dt}\langle\tilde{r}_k\tilde{r}_j\rangle = \langle\tilde{r}_k\tilde{v}_j\rangle + \langle\tilde{v}_k\tilde{r}_j\rangle, \tag{21}$$

$$\frac{d}{dt}\langle\tilde{r}_k\tilde{v}_j\rangle = \sum_\alpha \mu_\alpha\langle\tilde{v}_k\tilde{v}_j\rangle_\alpha, \tag{22}$$

$$\frac{d}{dt}\sum_\alpha \mu_\alpha\langle\tilde{v}_k\tilde{v}_j\rangle_\alpha = 0. \tag{23}$$

В результате расширение плазмы в направлении каждой из координатных осей происходит независимо, т. е. для масштабов $l_k(t)$ ($l_k^2(t) \equiv \left\langle\tilde{r}_k^2\right\rangle$) могут быть записаны уравнения, аналогичные (16), (17):

$$\frac{d^2}{dt^2}l_k^2 = 2\sum_\alpha \mu_\alpha\left\langle\tilde{v}_k^2\right\rangle_\alpha \equiv 4\,\frac{W_k}{M} = \text{const}, \tag{24}$$

$$\frac{d}{dt}l_k^2 = 2\langle\tilde{r}_k\tilde{v}_k\rangle\,, \tag{25}$$

где W_k — кинетическая энергия движения частиц плазмы вдоль направления $\tilde{r}_k$ в системе отсчета, связанной с ее центром масс. Соответственно, независимым оказывается и остывание плазмы, т. е. уменьшение энергии хаотического движения частиц вдоль каждого из направлений:

$$l_k^2(t)\sum_\alpha \mu_\alpha\left\langle\left(\tilde{v}_k - \frac{\tilde{r}_k}{l_k}\frac{dl_k}{dt}\right)^2\right\rangle_\alpha \equiv l_k^2(t)\sum_\alpha \mu_\alpha V_{k\alpha}^2(t) = \text{const}. \tag{26}$$

Примечательно, что в рассмотренном выше простейшем примере бесстолкновительной двухкомпонентной «бестоковой» плазмы метод моментов может быть успешно использован и для исследования динамики плазменного сгустка во внешних плавно-неоднородных потенциальных полях. До тех пор, пока размеры сгустка малы по сравнению с характерными масштабами неоднородности потенциалов U_α, последние могут быть представлены в виде разложения в степенной ряд по пространственным переменным $\tilde{r}_k$ в окрестности центра масс плазменного сгустка $\mathbf{r} = \mathbf{R}$. Оставляя в таком разложении члены не выше второго порядка по $\tilde{r}_k$, из (1), (5) вместо (11)–(14) нетрудно получить следующие уравнения для моментов функций распределения частиц по скоростям:

$$\frac{d^2}{dt^2}R_k = a_k, \tag{27}$$

$$\frac{d}{dt}\langle\tilde{r}_k\tilde{r}_j\rangle = \langle\tilde{r}_k\tilde{v}_j\rangle + \langle\tilde{v}_k\tilde{r}_j\rangle, \tag{28}$$

$$\frac{d}{dt}\langle\tilde{r}_k\tilde{v}_j\rangle = \sum_\alpha \mu_\alpha\langle\tilde{v}_k\tilde{v}_j\rangle_\alpha - \sum_{i=1}^{3} b_{ij}\langle\tilde{r}_i\tilde{r}_k\rangle, \tag{29}$$

$$\frac{d}{dt}\sum_\alpha \mu_\alpha\langle\tilde{v}_k\tilde{v}_j\rangle_\alpha = -\sum_{i=1}^{3}\left\{b_{ij}\langle\tilde{r}_i\tilde{v}_k\rangle + b_{ik}\langle\tilde{r}_i\tilde{v}_j\rangle\right\}. \tag{30}$$

Здесь компоненты вектора ускорения $a_k(t)$ и элементы матрицы $b_{kj}(t)$ определяются соответственно через значения первых и вторых производных по координатам от эффективного потенциала

$$U(\mathbf{r},t) \equiv \sum_\alpha N_\alpha U_\alpha(\mathbf{r},t)$$

в точке, совпадающей с центром масс плазменного сгустка:

$$a_k \equiv -\frac{1}{M}\left.\frac{\partial U}{\partial r_k}\right|_{r_k=R_k}, \tag{31}$$

$$b_{kj} \equiv \frac{1}{M}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial r_k \partial r_j}\right|_{r_k=R_k,\, r_j=R_j}. \tag{32}$$

Из уравнений (27)–(30) очевидно, что градиент эффективного потенциала определяет закон движения центра масс плазменного сгустка и не влияет на динамику характерных масштабов плазмы. Пространственная структура сгустка зависит лишь от вторых производных внешнего поля U. Следовательно, ускорением плазменного сгустка и его расширением можно управлять независимо. В частности, если в начальный момент времени все матрицы вторых моментов функций распределения частиц плазмы по скоростям диагональны в некоторой системе координат и при этом для $k \neq j$ вторые производные от эффективного потенциала равны нулю ($b_{kj} = 0$), то расширение сгустка в направлении каждой из осей происходит независимо и описывается системой уравнений

$$\frac{d^2}{dt^2} l_k^2 + 2b_{kk}(t) l_k^2(t) = 4\,\frac{W_k}{M}, \tag{33}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{W_k}{M} = -\frac{1}{2}\, b_{kk}(t)\, \frac{d}{dt}\, l_k^2. \tag{34}$$

Данная система имеет первый интеграл, аналогичный (19):

$$\left[\frac{2W_k}{M} - \left(\frac{dl_k}{dt}\right)^2\right] l_k^2(t) \equiv \sum_\alpha \mu_\alpha [V_{k\alpha}(t) l_k(t)]^2 = \text{const}, \tag{35}$$

где через $V_{k\alpha}(t)$ по аналогии с (26) обозначена среднеквадратичная скорость теплового движения «α-частиц» в направлении $\tilde{r}_k$. Таким образом, система (33), (34) сводится к одному уравнению второго порядка:

$$l_k^3(t)\frac{d^2 l_k}{dt^2} + b_{kk}(t) l_k^4(t) = \sum_\alpha \mu_\alpha [V_{k\alpha}(t) l_k(t)]^2 = \text{const}. \tag{36}$$

Согласно полученному уравнению (36), при положительных значениях вторых производных от потенциала внешнего поля ($b_{kk} > 0$) не происходит неограниченного расширения плазменного сгустка. Если же выполняется неравенство

$$b_{kk}\, l_k^2 > \sum_\alpha \mu_\alpha V_{k\alpha}^2,$$

то возможно даже уменьшение характерных масштабов плазмы.

Отметим, что условие локализации плазменного сгустка ($b_{kk} > 0$) совпадает с условием устойчивости процесса ускорения частиц в бегущей волне эффективного потенциала $U(\mathbf{r}, t)$. Следовательно, используя бегущую волну внешнего поля, можно обеспечить ускорение плазменного сгустка в режиме «автофазировки», сохраняя при этом его локализацию в пространстве.

Таким образом, метод моментов может быть эффективно использован для решения задач динамики плазменного сгустка во внешних плавно-неоднородных потенциальных полях. В простейшем примере бесстолкновительной двухкомпонентной «бестоковой» плазмы он приводит к замкнутой системе уравнений для элементов матрицы центрированных вторых моментов $\langle \tilde{r}_k \tilde{r}_j \rangle$, анализ решений которой при произвольных начальных условиях не представляет принципиальных трудностей. Решения же кинетических уравнений в этом случае (конкретный вид зависимостей f_α от своих аргументов) удается получить для существенно более узкого класса начальных условий, отвечающих автомодельному характеру динамики параметров плазменного сгустка. Тем не менее подобное решение представляет самостоятельный интерес, так как дает более детальную информацию об эволюции плазмы.

4. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ

В данном разделе приводятся отдельные примеры аналитического решения системы двух кинетических уравнений в квазинейтральном приближении. Такие решения построены в условиях, отвечающих рассмотренному выше случаю двухкомпонентной бесстолкновительной «бестоковой» плазмы (см. п. 4.1), а также при наличии в плазме вихревых электрических токов (п. 4.2). Кроме того, в п. 4.3 рассмотрен пример расширения в вакуум сгустка плотной плазмы, в которой существенную роль играют межчастичные столкновения (или другие процессы, ответственные за изотропию распределения частиц в пространстве скоростей).

4.1. Бесстолкновительная «бестоковая» плазма

Нахождение аналитических решений кинетической задачи о динамике сгустка двухкомпонентной бесстолкновительной плазмы во внешних полях базируется на разработанных в [11–14] методах, где рассматривался процесс автомодельного расширения плазменного сгустка в вакуум ($U_\alpha = 0$). Как оказалось, во внешних плавно-неоднородных потенциальных полях в случае, когда матрица вторых производных потенциала внешнего поля b_{kj} диагональна в той же системе координат, связанной с центром масс плазменного сгустка, что и матрицы всех вторых моментов функций распределения, вид записи автомодельных решений кинетических уравнений полностью совпадает с точным решением в свободном пространстве. Все различия связаны лишь с характером временных зависимостей первых и вторых моментов, входящих в функции f_α в качестве параметров:

$$f_\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = \lambda_\alpha F(G_1^{(\alpha)}, G_2^{(\alpha)}, G_3^{(\alpha)}), \quad \alpha = 1, 2,$$
$$G_k^{(\alpha)} = \left(\frac{\tilde{r}_k}{l_k(t)}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{v}_k - \tilde{u}_k(\tilde{r}_k, t)}{V_{k\alpha}(t)}\right)^2, \quad k = 1, 2, 3, \tag{37}$$

$$\tilde{r}_k \equiv r_k - R_k(t), \quad \tilde{v}_k \equiv v_k - dR_k/dt,$$

где F — произвольная функция своих аргументов; λ_α — нормировочные постоянные; $R_k(t)$ — координаты центра масс плазменного сгустка в лабораторной системе отсчета, изменяющиеся согласно уравнениям (27); $l_k(t) \equiv \sqrt{\langle \tilde{r}_k^2 \rangle}$ — масштабы пространственной локализации плазменного сгустка; $\tilde{u}_k(\tilde{r}_k, t) = \tilde{r}_k \langle \tilde{r}_k \tilde{v}_k \rangle / \langle \tilde{r}_k^2 \rangle$ — компоненты средней (гидродинамической) скорости движения частиц $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$ в системе, связанной с центром масс плазменного сгустка; величины $V_{k\alpha}^2(t) \equiv \left\langle (\tilde{v}_k - \tilde{u}_k)^2 \right\rangle_\alpha$ описывают тепловой разброс частиц сорта α по скоростям вдоль каждого из соответствующих направлений $\tilde{r}_k$. При этом динамика всех входящих в (37) моментов определяется приведенными в разд. 3 уравнениями (36)[2)] и (25), а в интеграле (35) постоянным является каждое из двух слагаемых в отдельности:

$$V_{k\alpha}(t) l_k(t) = \text{const}. \tag{38}$$

Построенные решения справедливы при любом соотношении между массами и начальными кинетическими энергиями частиц различного сорта и описывают динамику бесстолкновительного плазменного сгустка, характеризующегося произвольным начальным распределением по скоростям и в общем случае неизотропным распределением плотности плазмы в пространстве.

Полученные результаты показывают, что средние скорости теплового движения частиц различного сорта $V_{k\alpha}$ изменяются согласно адиабатическому закону (38), т. е. обратно пропорционально соответствующему размеру плазменного сгустка. Гидродинамическая скорость (скорость коллективного движения) $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$ одинакова для обеих компонент.

В процессе свободного расширения плазмы в вакуум ($U_\alpha = 0$) тепловые энергии частиц постепенно переходят в энергию их коллективного движения. При этом в зависимости от соотношения между начальными скоростями $V_{k\alpha}$ амбиполярное электрическое поле может ускорять частицы как с положительным зарядом, так и с отрицательным. А именно, частицы, имеющие в начальный момент времени меньшую тепловую скорость, увеличивают свою среднюю кинетическую энергию. Соответственно, представители другой фракции частиц ее уменьшают. Характерное время обмена энергиями между компонентами плазмы определяется временем распространения звука (со скоростью $\sqrt{2W_k/M}$) на расстояния порядка начального масштаба локализации плотности плазменного сгустка в соответствующем направлении — $l_k(0)$.

Хорошей иллюстрацией процесса перераспределения энергий может служить запись интегральных распределений «α-частиц» по скоростям,

$$\phi_\alpha(\tilde{\mathbf{v}}, t) = \int f_\alpha(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{r}}, t) d\tilde{\mathbf{r}},$$

которые в каждый момент времени остаются подобными первоначальным:

$$\phi_\alpha(\tilde{\mathbf{v}}, t) = \frac{1}{|Z_\alpha|} \phi_0 \left(\frac{M\tilde{v}_x^2}{2W_{x\alpha}}, \frac{M\tilde{v}_y^2}{2W_{y\alpha}}, \frac{M\tilde{v}_z^2}{2W_{z\alpha}} \right) \prod_{k=1}^{3} \sqrt{\frac{M}{2W_{k\alpha}}}, \tag{39}$$

[2)] В отсутствие внешних полей ($U_\alpha = 0$) (36) преобразуется в (24).

$$2W_{k\alpha}/M = [V_{k\alpha}(t)]^2 + \left[\dot{l}_k(t)\right]^2, \tag{40}$$

где функция ϕ_0 определяется начальным распределением частиц по скоростям. Соотношение (39) говорит о сохранении энергетического спектра при автомодельном расширении двухкомпонентной плазмы в вакуум.

Возвращаясь к построенному решению (37) задачи динамики плазменного сгустка во внешних полях U_α, следует обратить внимание на то, что в действительности оно не может претендовать на абсолютно точное описание интересующего нас процесса. Дело в том, что следствием автомодельного характера движения плазмы является квадратичная зависимость потенциала амбиполярного электрического поля φ от пространственных координат $\tilde{r}_k$, соответствующая фактически наличию в пространстве однородной плотности электрического заряда:

$$e\varphi(\tilde{\mathbf{r}}, t) = \left(\sum_\alpha \frac{1}{M_\alpha}\right)^{-1} \sum_\alpha \frac{1}{Z_\alpha N_\alpha} \left[\sum_{k=1}^{3} \frac{V_{k\alpha}^2(0) l_k^2(0)}{2 l_k^4(t)} \tilde{r}_k^2 - \frac{1}{m_\alpha} U_\alpha\right]. \tag{41}$$

Это означает, что используемая модель квазинейтральной динамики плазменного сгустка является, вообще говоря, некорректной в областях малой концентрации плазмы. Тем не менее для достаточно плотной плазмы, в которой частоты ленгмюровских колебаний $\omega_{p\alpha}$ удовлетворяют неравенству

$$\sum_\alpha \omega_{p\alpha}^2 \gg \sum_\alpha \frac{Z_\alpha}{|Z_\alpha|} \sum_{k=1}^{3} \left[\frac{V_{k\alpha}^2}{l_k^2(t)} - \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial r_k^2}\right], \quad \omega_{p\alpha}^2 \equiv \frac{4\pi Z_\alpha^2 e^2 n_\alpha}{m_\alpha}, \tag{42}$$

условие квазинейтральности (5) нарушается лишь на периферии плазменного образования, на большом удалении от области локализации основной плазмы. При наличии ускоряющих плазму внешних полей корректность квазинейтрального приближения требует выполнения наряду с (42) еще одного условия, состоящего в малости напряженности электрического поля в центре масс сгустка по сравнению с характерной величиной поля, создаваемого одной из плазменных компонент в отдельности. В общем случае подобное условие соответствует ограничению сверху на допустимое ускорение сгустка.

Заметим, что в рамках найденного решения в случае свободного расширения плазмы в вакуум ($U_\alpha = 0$) вследствие остывания правая часть соотношения (42) убывает с течением времени быстрее, чем плотность плазмы. Следовательно, корректность квазинейтрального описания процесса расширения плазменного сгустка не нарушается в области его локализации с течением времени.

4.2. Бесстолкновительная плазма с вихревыми электрическими токами

Построенный выше класс автомодельных решений задачи о расширении двухкомпонентного плазменного сгустка в вакуум отвечает случаю отсутствия токов в плазме. Данное ограничение обеспечивает замкнутость системы уравнений (12)–(14) относительно вторых моментов функций распределения. Однако, как уже отмечалось в разд. 3, оно не является необходимым при наличии определенной пространственной симметрии плазмы. В частности, для сферически-симметричного плазменного сгустка вторые пространственные моменты $\langle \tilde{r}_k \tilde{r}_j \rangle_\alpha$ записываются виде

$$\langle\tilde{r}_k\tilde{r}_j\rangle_\alpha = \frac{1}{3}l^2\delta_{kj}, \quad \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k=j, \\ 0, & k\neq j, \end{cases} \tag{43}$$

где l^2 определяется уравнениями (16), (17) независимо от наличия вихревых токов в плазме. При этом недиагональные элементы матрицы смешанных вторых моментов $\langle\tilde{r}_k\tilde{v}_j\rangle_\alpha$, в общем случае не совпадающие у частиц различного сорта, постоянны во времени вследствие сохранения момента импульса каждой компоненты плазмы:

$$\langle\tilde{r}_k\tilde{v}_j\rangle_\alpha + \langle\tilde{r}_j\tilde{v}_k\rangle_\alpha = \frac{1}{3}\delta_{kj}\frac{d}{dt}l^2, \tag{44}$$

$$\langle\tilde{r}_k\tilde{v}_j\rangle_\alpha - \langle\tilde{r}_j\tilde{v}_k\rangle_\alpha = \text{const}. \tag{45}$$

Наличие симметрии позволяет отказаться от условия отсутствия вихревых токов в плазме и при построении аналитических решений кинетических уравнений. Например, функции

$$f_\alpha(\mathbf{v},\mathbf{r},t) = F_\alpha(G_r^{(\alpha)}, J_{12}, J_{23}, J_{31}),$$
$$G_r^{(\alpha)} = \frac{\tilde{\mathbf{r}}^2}{l^2(t)} + \frac{(\tilde{\mathbf{v}}-\tilde{\mathbf{w}})^2}{V_\alpha^2(t)}, \quad J_{kj} \equiv -J_{jk} = \tilde{r}_k\tilde{v}_j - \tilde{r}_j\tilde{v}_k \tag{46}$$

являются решениями бесстолкновительных кинетических уравнений Власова при произвольных функциях F_α, если $l(t)$ удовлетворяет уравнению (16),

$$V_\alpha(t)l(t) = \text{const}, \quad \tilde{\mathbf{w}} = \tilde{\mathbf{r}}\,\frac{1}{l(t)}\frac{dl}{dt},$$

а потенциал амбиполярного электрического поля определяется выражением

$$e\varphi(\tilde{\mathbf{r}},t) = \left(\sum_\alpha \frac{1}{M_\alpha}\right)^{-1}\left(\sum_\alpha \frac{V_\alpha^2(t)}{Z_\alpha N_\alpha}\right)\frac{\tilde{\mathbf{r}}^2}{2l^2(t)}. \tag{47}$$

При этом приближение квазинейтральности (5) частично ограничивает произвол в выборе функций F_α:

$$\sum_\alpha \int Z_\alpha F_\alpha(\mathbf{v},\mathbf{r},t)d\mathbf{v} = 0\,. \tag{48}$$

Наличие в решении (46) аргументов функций распределения J_{kj} позволяет описывать процесс расширения плазменного сгустка с вихревыми токами. Отметим, что при этом, несмотря на сферическую симметрию потенциала φ, пространственное распределение плотности плазмы может быть несимметричным.

Еще одним примером свободного расширения в вакуум плазмы с током является случай осесимметричного плазменного сгустка, когда распределение плотности плазмы и потенциал амбиполярного электрического поля φ зависят только от двух пространственных переменных — продольной координаты $\tilde{z}$ вдоль оси симметрии и расстояния $\rho \equiv \sqrt{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2}$ от последней. При этом аналитическое решение задачи в системе отсчета, связанной с центром масс сгустка, представляется в виде

$$f_\alpha(\mathbf{v},\mathbf{r},t) = \lambda_\alpha F_\alpha(G_\rho^{(\alpha)}, J_z, G_z^{(\alpha)}),$$

$$G_\rho^{(\alpha)} = \frac{\rho^2}{l_\rho^2(t)} + \left(\frac{\tilde{v}_x - \tilde{x}\dot{l}_\rho/l_\rho}{V_{\rho\alpha}(t)}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{v}_y - \tilde{y}\dot{l}_\rho/l_\rho}{V_{\rho\alpha}(t)}\right)^2, \quad \dot{l}_\rho \equiv \frac{dl_\rho}{dt},$$

$$J_z = \tilde{x}\tilde{v}_y - \tilde{y}\tilde{v}_x, \quad G_z^{(\alpha)} = \left(\frac{\tilde{z}}{l_z(t)}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{v}_z - \tilde{z}\dot{l}_z/l_z}{V_{z\alpha}(t)}\right)^2, \quad \dot{l}_z \equiv \frac{dl_z}{dt}, \tag{49}$$

$$V_{\rho\alpha}(t)l_\rho(t) = \text{const}, \quad V_z(t)l_z(t) = \text{const},$$

где $l_z(t) \equiv \langle \tilde{z}^2 \rangle$, $l_\rho^2 \equiv \langle \rho^2 \rangle$ — соответствующие размеры плазменного сгустка, удовлетворяющие уравнению (24); $V_{z\alpha}(t)$, $V_{\rho\alpha}(t)$ — средние скорости теплового движения частиц сорта α, определяемые по аналогии с (37); а F_α — произвольные функции, на которые вследствие квазинейтральности наложено интегральное условие (48). Распределение потенциала при этом представляется в виде

$$e\varphi(\tilde{\mathbf{r}},t) = \left(\sum_\alpha \frac{1}{M_\alpha}\right)^{-1} \sum_\alpha \frac{1}{Z_\alpha N_\alpha}\left[\frac{V_{z\alpha}^2(t)}{2l_z^2(t)}\tilde{z}^2 + \frac{V_{\rho\alpha}^2(t)}{2l_\rho^2(t)}\rho^2\right]. \tag{50}$$

4.3. Влияние процессов, ответственных за изотропизацию функций распределения частиц по скоростям, на расширение в вакуум плазменного сгустка

Решение задачи о расширении в вакуум ($U_\alpha = 0$) двухкомпонентной бесстолкновительной «бестоковой» плазмы (24) показывает, что при симметричном начальном распределении частиц по скоростям (когда $W_k = W_j$, $V_{k\alpha} = V_{j\alpha}$ для $k \neq j$) возможная исходная анизотропия пространственного распределения плазмы ($l_k(0) \neq l_j(0)$ при $k \neq j$) исчезает по мере расширения плазменного сгустка, $l_k(t)/l_j(t) \to 1$ при $t \to \infty$. Вместе с тем, как следует из (38), распределение частиц по скоростям с течением времени становится локально-анизотропным, так как $V_{k\alpha}(t)/V_{j\alpha}(t) \to l_k(0)/l_j(0)$ при $t \to \infty$. Подобная ситуация возможна лишь при отсутствии столкновений и других процессов[3)], способствующих восстановлению локальной изотропии функций распределения. Расширению в вакуум достаточно плотной плазмы соответствует противоположный предельный случай, когда межчастичные столкновения обеспечивают выполнение в каждый момент времени равенств $V_{k\alpha}(t) = V_{j\alpha}(t)$ (для всех k и j). В этом случае, полагая

$$V_{k\alpha}^2(t) = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} V_{j\alpha}^2(t) \equiv \frac{1}{3}V_\alpha^2(t), \tag{51}$$

можно замкнуть систему уравнений (12)–(14) относительно моментов $\langle \tilde{r}_k^2 \rangle \equiv l_k^2$:

$$\frac{d^2}{dt^2}l_k^2 = 2\left[\sum_\alpha \frac{\mu_\alpha V_\alpha^2(t)}{3} + \left(\frac{dl_k}{dt}\right)^2\right], \tag{52}$$

$$\sum_\alpha \mu_\alpha V_\alpha^2(t) + \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{dl_k}{dt}\right)^2 = \frac{2W}{M} = \text{const}. \tag{53}$$

---

3) В частности, к таким процессам относятся различного рода плазменные неустойчивости.

Интегрирование уравнений (52), (53) дает адиабатический закон остывания плазмы:

$$\left[\prod_{k=1}^{3} l_k\right]^{2/3} \sum_{\alpha} \mu_\alpha V_{k\alpha}^2(t) = \text{const}. \tag{54}$$

При этом расширение плазмы определяется уравнениями

$$l_k(t)\frac{d^2 l_k}{dt^2} = \frac{1}{3}\sum_{\alpha} \mu_\alpha V_{k\alpha}^2(t), \tag{55}$$

анализ которых показывает, что эволюция масштабов $l_k(t)$ существенным образом зависит от начального соотношения между ними. В частности, если при $t = 0$ один из характерных размеров плазменного сгустка мал по сравнению с остальными (например, $l_x(0) \ll l_y(0), l_z(0)$), то с течением времени тепловая энергия плазмы перейдет в основном в энергию коллективного (гидродинамического) движения частиц в этом выделенном направлении (x). Соответственно, и расширение плазмы будет идти преимущественно вдоль того же направления:

$$\frac{dl_x}{dt} \gg \frac{dl_y}{dt}, \frac{dl_z}{dt}; \quad l_x(t) \gg l_y(t), l_z(t) \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Автомодельные решения кинетических уравнений (1) в рассматриваемом случае плотной плазмы можно представить в виде [15, 16]

$$\begin{gathered} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \lambda_\alpha F\left(\sum_{k=1}^{3}\left[\frac{\tilde{r}_k^2}{l_k^2(t)} + \frac{3(\tilde{v}_k - \tilde{u}_k)^2}{V_\alpha^2(t)}\right]\right), \\ \tilde{u}_k(\tilde{r}_k, t) = \frac{\tilde{r}_k}{l_k}\frac{dl_k}{dt}, \quad V_\alpha(t)\left[\prod_{k=1}^{3} l_k(t)\right]^{2/3} = \text{const}, \end{gathered} \tag{56}$$

где F — произвольная функция, λ_α — нормировочные постоянные.

Если столкновения, обеспечивая выполнение соотношения (51), не приводят к эффективному обмену тепловой энергией между частицами различного сорта, функции $V_\alpha(t)$ можно считать независимыми для каждой компоненты плазмы. Такая ситуация реализуется, например, при расширении электрон-ионной плазмы с холодными тяжелыми ионами: $\mu_e \ll \mu_i$, $\mu_i V_i^2(0) \ll \mu_e V_e^2(0)$ (см. [15, 16]). В противоположном предельном случае, когда в результате столкновений устанавливается тепловое равновесие между частицами различного сорта, следует считать, что

$$\mu_\alpha V_\alpha^2(t) = \frac{1}{2}\sum_{\beta=1,2} \mu_\beta V_\beta^2(t).$$

При этом распределение частиц по скоростям должно соответствовать максвелловскому: $F(G) \propto \exp(-G)$.

5. ДИНАМИКА СГУСТКА БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ В ПЛАВНО-НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Результаты анализа динамики двухкомпонентной бесстолкновительной плазмы во внешних слабонеоднородных потенциальных полях U_α могут служить основой для исследования задачи ускорения и сжатия плазменного сгустка в магнитном поле, имеющем пробочную конфигурацию:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = B_0(z,t)\mathbf{e}_z + B_\rho(\rho,z,t)\frac{\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}. \tag{57}$$

Здесь $\rho^2 \equiv x^2 + y^2$, $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ — вектор индукции осесимметричного магнитного поля, преимущественно направленного вдоль оси симметрии z:

$$|B_0(z,t)| \gg |B_\rho(\rho,z,t)|, \quad B_\rho(\rho,z,t) = -\frac{\rho}{2}\frac{\partial B_0}{\partial z}.$$

Будем считать магнитное поле достаточно большим по величине и плавно меняющимся в пространстве и времени:

$$\omega_\alpha \tau \gg 1, \quad \left|\frac{\dot{\omega}_\alpha}{\omega_\alpha^2}\right| \ll 1, \quad \left|\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial z}\right| \ll \left|\frac{\omega_\alpha}{l_z}\right|,$$

где

$$\omega_\alpha \equiv \frac{Z_\alpha e}{m_\alpha c} B_0(z,t)$$

— частота циклотронного вращения частицы сорта α в магнитном поле, c — скорость света, τ — характерное время расширения плазменного сгустка, l_z — продольный размер плазмы. Тогда поперечное (относительно направления магнитного поля) движение частиц может быть описано в рамках адиабатического приближения, согласно которому усредненная по периоду циклотронного вращения функция распределения «α-частиц» представляется в виде

$$\begin{gathered} f_\alpha = \Phi_\alpha(t,z,v_z,J_\alpha,G_\alpha), \\ G_\alpha \equiv \omega_\alpha(x^2+y^2) + 2(xv_y - yv_x), \quad J_\alpha = \frac{v_x^2+v_y^2}{\omega_\alpha}, \end{gathered} \tag{58}$$

где Φ_α удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t} + v_z \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial z} - \frac{Z_\alpha e}{m_\alpha}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial v_z} - \frac{1}{2}\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial z} J_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial v_z} = 0. \tag{59}$$

В частном случае $\Phi_\alpha(t=0) = \Phi_{\alpha 0}(z,v_z)\delta(J_\alpha - J_{\alpha 0})$, $J_{\alpha 0} = \mathrm{const}$, интегрируя уравнения (59) по поперечным координатам и скоростям, рассматриваемую задачу можно свести к одномерному аналогу задачи о динамике плазменного сгустка во внешних потенциальных плавно-неоднородных полях:

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + v_z \frac{\partial F_\alpha}{\partial z} - \frac{Z_\alpha e}{m_\alpha}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial F_\alpha}{\partial v_z} - \frac{1}{m_\alpha}\frac{\partial U_\alpha}{\partial z}\frac{\partial F_\alpha}{\partial v_z} = 0, \tag{60}$$

$$N_\alpha F_\alpha(t,z,v_z) \equiv \iint \Phi_\alpha \, dx\, dy\, dv_x\, dv_y, \quad U_\alpha \equiv g_\alpha B_0(z,t),$$

$$g_\alpha \equiv \frac{m_\alpha}{2B_0} \frac{\iint (v_x^2 + v_y^2)\Phi_\alpha dx dy dv_x dv_y}{\iint \Phi_\alpha dx dy dv_x dv_y},$$

где величина g_α, определенная при $t = 0$, в адиабатическом приближении может считаться постоянной.

Таким образом, в соответствии с результатами разд. 3 движение центра масс плазменного сгустка ($Z \equiv \int\int zF_\alpha dz dv_z$) и динамика характерного продольного размера плазмы ($l_z^2(t) \equiv \int\int (z - Z(t))^2 F_\alpha dz dv_z$) в плавно-неоднородном магнитном поле определяются соответствующими уравнениями:

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} = -\gamma \left.\frac{\partial B_0}{\partial z}\right|_{z=Z(t)}, \quad \gamma \equiv \frac{\sum\limits_\alpha N_\alpha g_\alpha}{M \sum\limits_\alpha m_\alpha}, \tag{61}$$

$$l_z^3 \frac{d^2 l_z}{dt^2} + \Omega^2(t) l_z^4 = V_z^2\, l_z^2 = \mathrm{const}, \quad \Omega^2(t) \equiv \gamma \left.\frac{\partial^2 B_0}{\partial z^2}\right|_{z=Z(t)}, \tag{62}$$

где $V_z^2 \equiv 2W_z/M - \left(dl_z/dt\right)^2$, а W_z — кинетическая энергия движения частиц в продольном направлении в системе отсчета, связанной с центром масс сгустка.

Полученные уравнения (61), (62) позволяют провести исследование процесса ускорения плазменного сгустка в движущейся магнитной пробке. Согласно (61), плазменный сгусток выталкивается из области сильного магнитного поля, т. е. для ускорения сгустка в положительном направлении оси z необходимо обеспечить выполнение неравенства $\partial B_0/\partial z < 0$. В то же время, как следует из (62), для сохранения продольного размера плазмы требуется положительное значение второй производной:

$$\frac{\partial^2 B_0}{\partial z^2} = \frac{V_z^2}{\gamma l_z^2}.$$

Таким образом, возможности ускорения плазменного сгустка как целого в условиях стационарного магнитного поля весьма ограничены. Расширить эти возможности позволяет использование движущейся волны магнитного поля:

$$B_0 = \tilde{B}_0(t) + \frac{\Omega^2}{2\gamma}\left(z - Z_0(t) - \frac{a(t)}{\Omega^2}\right)^2, \tag{63}$$

где $\tilde{B}_0(t)$, $a(t) = d^2 Z_0/dt^2$ — произвольные функции времени, а Ω^2 — положительная постоянная. В такой волне обеспечивается заданное ускорение сгустка ($Z(t) = Z_0(t)$) при сохранении его продольного размера:

$$l_z^2 = \frac{2\,W_z}{M\,\Omega^2} = \mathrm{const}. \tag{64}$$

Изменение характерного поперечного масштаба плазмы в этом случае определяется адиабатическим законом $l_\rho^2 B_0(Z_0, t) = \mathrm{const}$, т. е.

$$l_\rho^2 \propto \left[\tilde{B}_0(t) + \frac{a^2(t)}{2\gamma\Omega^2}\right]^{-1}.$$

Заметим, что рассмотренный режим ускорения является устойчивым. Иными словами, если при $t = 0$, координата Z и скорость центра масс плазменного сгустка dZ/dt отличаются от начальных значений Z_0 и dZ_0/dt,

$$Z(t) - Z_0(t) = \xi(t), \quad \xi(0) \neq 0, \quad d\xi/dt \neq 0,$$

то функция $\xi(t)$ не возрастает с течением времени, так как удовлетворяет уравнению гармонического осциллятора:

$$\frac{d^2}{dt^2}\xi + \Omega^2\xi = 0. \tag{65}$$

Аналогичные колебания испытывает и продольный размер плазмы $l_z(t)$, если равенство (64) оказывается невыполненным в начальный момент времени:

$$\frac{d^2}{dt^2}\eta + 4\Omega^2\eta = 0, \quad \eta \equiv l_z^2 - \frac{2W_z}{M\Omega^2}. \tag{66}$$

В рамках уравнений (61), (62) можно также провести исследование процесса сжатия плазменного сгустка во взрывающейся магнитной ловушке. Если магнитное поле изменяется с течением времени по закону

$$B_0(z,t) = \tilde{B}_0(t) + \frac{\Omega^2(t)}{2\gamma}z^2, \quad \Omega^2(t) > 0, \tag{67}$$

где $\tilde{B}_0(t)$ и $\Omega^2(t)$ — медленно возрастающие функции времени, то сжатие сгустка описывается адиабатическими законами:

$$l_\rho^2\tilde{B}_0(t) = \text{const}, \quad \bar{W}_\rho/\tilde{B}_0(t) = \text{const}, \tag{68}$$

$$l_z^2\Omega(t) = \text{const}, \quad \bar{W}_z/\Omega(t) = \text{const}. \tag{69}$$

Здесь $\bar{W}_\rho$, $\bar{W}_z$ — энергии теплового движения частиц в поперечном и продольном направлениях соответственно.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные в настоящей работе результаты показывают, что метод моментов является эффективным инструментом теоретического исследования динамики квазинейтральных плазменных сгустков во внешних полях. Его использование позволяет в общем случае рассчитывать эволюцию характерных размеров сгустка, а также остывание многокомпонентной плазмы в процессе ее расширения в вакуум. В простейшем случае двухкомпонентной бесстолкновительной плазмы метод моментов дает полное описание динамики сгустка во внешних плавно-неоднородных потенциальных полях, на базе которого возможно построение аналитических решений кинетических уравнений. Данные решения могут быть найдены при произвольном соотношении между массами составляющих плазму частиц и при произвольных начальных их распределениях по скоростям в достаточно широком классе пространственных распределений плотности плазмы. Простота и эффективность метода моментов позволяет рассчитывать на перспективность его применения в решении различных прикладных задач.

Работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 98-02-17052) и программой «Управляемый термоядерный синтез» (грант 369).

Литература

1. А. В. Гуревич, Л. В. Парийская, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **49**, 644 (1965).
2. A. Gurevich, D. Anderson, and H. Wilhelmsson, Phys. Rev. Lett. **42**, 769 (1979).
3. А. В. Гуревич, А. П. Мещеркин, ЖЭТФ **80**, 1810 (1981).
4. А. В. Гуревич, А. П. Мещеркин, ЖЭТФ **81**, 1295 (1981).
5. Y. El-Zein, A. Amin, H. S. Kim et al., Phys. Plasmas **2**, 1073 (1995).
6. S. Sakabe, T. Mochizuki, T. Yabe et al., Phys. Rev. A **26**, 2159 (1982).
7. А. В. Гуревич, А. П. Мещеркин, Физика плазмы **9**, 955 (1983).
8. Ch. Sack and H. Schamel, Phys. Rep. (Rev. Sect. Phys. Lett.) **156**, 311 (1987).
9. G. Manfredi, S. Mola, and M. R. Feix, Phys. Fluids B **5**, 388 (1993).
10. L. G. Garcia, J. Goedert, H. Figua et al., Phys. Plasmas **4**, 4240 (1997).
11. A. V. Baitin and K. M. Kuzányan, J. Plasma Phys. **59**, 83 (1998).
12. Д. С. Дорожкина, В. Е. Семенов, Физика плазмы **24**, 481 (1998).
13. Д. С. Дорожкина, В. Е. Семенов, Письма в ЖЭТФ **67**, 548 (1998).
14. D. S. Dorozhkina and V. E. Semenov, Phys. Rev. Lett. **81**, 2691 (1998).
15. Д. С. Дорожкина, В. Е. Семенов, в сб. *Материалы конференции по физике низкотемпературной плазмы ФНТП-98*, Петрозаводск (1998), ч. 1, с. 486.
16. D. S. Dorozhkina and V. E. Semenov, in *Proc. 1998 International Congress on Plasma Physics combined with the 25 EPS Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics*, Praha (1998), v. 22C, p. 285.