ЖЭТФ, 1999, том 116, вып. 3(9), стр. 908–939 ©*1999*

О ТРЕХМЕРНЫХ СЕТЧАТЫХ СТРУКТУРАХ, СВЯЗАННЫХ С НЕУСТОЙЧИВОСТЯМИ РИХТМАЙЕРА—МЕШКОВА И РЭЛЕЯ—ТЕЙЛОРА

*Н. А. Иногамов**

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

А. М. Опарин†

Институт автоматизации проектирования Российской академии наук
123056, Москва, Россия

Поступила в редакцию 20 апреля 1999 г.

Граница, разделяющая смежные газовые или жидкие среды, зачастую неустойчива. Неустойчивостями Рихтмайера—Мешкова и Рэлея—Тейлора обусловлено разрастание сложных структур на границе. В работе впервые изучены все решеточные симметрии (прямоугольные ($pmm2$), квадратные ($p4mm$), гексагональные ($p6mm$) и треугольные ($p3m1$) сетки), представляющие интерес в связи с задачей о неустойчивости поверхности жидкости. Они получаются из начальных возмущений, состоящих из одной (плоский случай, двумерное течение), двух (прямоугольные ячейки) или трех (гексагоны и треугольники) гармонических волн. Показано, что в процессе развития динамическая система совершает переход от начального слабо возмущенного состояния в предельное или асимптотическое стационарное состояние (стационарную точку). Исследована устойчивость этих точек (стационаров). Показано, что как в случае Рихтмайера—Мешкова, так и в случае Рэлея—Тейлора стационары устойчивы относительно крупномасштабных возмущений. Обнаружено, что в определенных случаях симметрия в процессе эволюции возрастает. Например, начальное возмущение Рихтмайера—Мешкова или Рэлея—Тейлора было суммой двух перпендикулярных друг другу волн с равными волновыми числами, но не равными амплитудами: $a_1(t=0) \neq a_2(t=0)$. Тогда в процессе эволюции течение обладает симметрией $p2$ (поворот относительно вертикальной оси на 180^0), которая при $t \to \infty$ переходит в симметрию $p4$ (поворот на $90°$), поскольку в стационарном состоянии амплитуды выравниваются: $a_1(t=\infty) = a_2(t=\infty)$. Показано, что гексагональная и треугольная сетки взаимно дополнительны. При инверсии времени $t \to -t$ происходит «перефазировка» и пузыри гексагональной сетки превращаются в струи треугольной сетки и наоборот.

PACS: 47.20.Bp; 47.20.Ky; 47.20.Ma; 52.58.Ns

1. ВВЕДЕНИЕ

Неустойчивость Рихтмайера—Мешкова (РМН) возникает при прохождении ударной волны через границу разноплотных сред, а неустойчивость Рэлея—Тейлора (РТН) порождается неустойчивой гравитационной стратификацией. Перемешивание сред, вызванное ими, существенно во многих физических проблемах, например в лазерном и

*E-mail: nail@landau.ac.ru

†E-mail: oparin@landau.ac.ru

пучковом инерционном синтезе [1–3], в астрофизике [4, 5] и в физике взрыва [6]. Соответствующие вопросы интенсивно изучаются, достаточно указать на самые последние работы [3, 7–10]. Теория РМН и РТН оказывается достаточно трудной, сопоставимой по сложности с теорией гравитационных волн.

Обзор теории. Упомянем основные теоретические работы[1)], группируя их по использованным методам. В основном исследовался двумерный ($2D$) случай, поскольку трехмерный ($3D$) намного сложнее. Поэтому выделим работы, где исследовался $3D$-случай.

1. *Параболическая модель, РМН и РТН, нестационарные и стационарные случаи.* Эффективной является модель Лэйцера [11], основанная на параболической аппроксимации границы ($\eta = \ldots x^{2N}$, $N = 1$) вблизи вершины пузыря. Она приводит к динамической системе, траектории которой описывают процесс постепенной трансформации деформаций границы, начиная от исходного слабо возмущенного состояния и кончая установлением стационарного состояния (стационара или стационарной точки). Стационар достигается асимптотически при $t \to \infty$. Можно сузить задачу и сразу изучать стационар (в стационарной точке производные по времени приравниваются нулю). Тогда вместо динамической системы и дифференциальных уравнений возникает система алгебраических уравнений, представляющая собой стационарный вариант модели Лэйцера. Стационар первого порядка (параболическая аппроксимация, $N = 1$) изучался еще до работы Лэйцера в замечательной работе Девиса и Тейлора [12]. Лэйцеровский подход применим как при РМН ($g = 0$, g — ускорение свободного падения), так и при РТН ($g = 1$) [13–15]. Если исключить случай прямоугольной решетки (о ней и других $3D$-обобщениях см. ниже), то фазовое пространство лэйцеровской модели оказывается плоским [15]. Это позволяет исследовать соответствующую динамическую систему в самом общем случае [15] (см. также последующие работы [7, 9, 16–18]). Из анализа, в частности, следует устойчивость РМ- и РТ-стационаров в классе крупномасштабных возмущений, поскольку стационарная точка — узел [15, 17, 18].

2. *Функциональная окрестность равновесной конфигурации.* Ряд исследований выполнен в слабонелинейном приближении, справедливом при небольших амплитудах возмущений (см. работы [19, 20] и имеющиеся в них ссылки). Это приближение описывает только начало отхода от симметричной относительно инверсии пузырь — струя стадии движения[2)] в сторону асимметрии пузырь — струя. Асимметрия проявляется в расширении пузыря и сужении струи.

3. *Интегральная запись краевой задачи теории потенциала.* Определенные результаты удается получить методом конформных преобразований, представляя краевую задачу в виде интегрального уравнения [21–23].

4. *Последовательные приближения.* В работах [24, 13, 15, 17] разработаны высшие обобщения модели 1 N-го порядка аппроксимации ($\eta = \ldots x^{2N}$, N достаточно велико). Они относятся как к стационарному [24, 17], так и к нестационарному [13, 15] случаям. Высшие разложения являются мощным инструментом исследования проблем сходимости и единственности [17].

Объединение подходов 1 *и* 4. Очевидное преимущество метода 1 перед 2, 3 составляет

[1)] Экспериментальные и численные исследования цитируются по ходу изложения.

[2)] Симметрична линейная стадия. На ней произвольное возмущение есть линейная комбинация гармоник. Гармоники развиваются независимо. У каждой синусоиды пузыри и струи симметричны.

то, что в 1 трансформация от линейной до нелинейной предельной или асимптотической стадии отслеживается в целом. В сочетании с подходом 4 открываются возможности получения исчерпывающих результатов по РМН и РТН. Заметный изъян заключается в неразработанности высших стационарных аппроксимаций при РМН (стационарные краевые условия сложны, не ясен вопрос о нуль- или однопараметричности).

Объединенный подход в 3D-случае. Распространение метода 1 на $3D$-геометрию (см. ниже) дает общее описание эволюции. Оказывается, она сопровождается яркими структурными эффектами[3)]. В свою очередь, перенос техники 4, разработанной в основном для $2D$-случая, позволяет получить важные качественные выводы о сходимости и единственности РТН в $3D$-случае. Таким образом, в данной работе речь идет о распространении методов 1, 4 на $3D$-геометрию.

Предыдущие работы по 3D-течениям. В [28, 29, 17] метод 4 применен к стационарной стадии РТН в $3D$-случае. Значения N невелики. Работы [30–32] посвящены трехмерному численному моделированию. В [33, 34] описаны $3D$-эксперименты в ударных трубах, а в [35] — во взрывной системе.

Содержание. В разд. 2 и 3 приведены постановка задачи, краевые условия и спектральные разложения $3D$-потенциалов. Обсуждается симметрия потенциалов и элементарных ячеек сетки. В разд. 4 и 9 выведены уравнения обобщения модели 1 на $3D$-случай. Дан полный анализ соответствующего фазового пространства. В случае РМН найдены точные интегралы полученных уравнений. В разд. 4, 5 и 7 изучена $3D$-структура поверхности η. В разд. 6 приведены результаты прямого численного моделирования. В разд. 10 и 11 рассмотрены РТ-стационары. Доказана однопараметричность $3D$-стационаров (разд. 10). Показано, что стационарная точка одна (разд. 11).

2. ГАРМОНИЧНОСТЬ И КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

Течение описывается потенциалом φ скорости ($\Delta\varphi = 0$, $\mathbf{V} = \nabla\varphi$). Краевые условия имеют вид [36]

$$\eta_t = w| - \eta_x u| - \eta_y v|, \quad u = \varphi_x, \ v = \varphi_y, \ w = \varphi_z, \tag{2.1}$$

$$-2\varphi_t| = 2g\eta + u^2| + v^2| + w^2|, \quad f| \equiv f|_\eta \equiv f[x, y, z = \eta(x, y, t), t]. \tag{2.2}$$

Граница жидкости задается функцией $z = \eta(x, y, t)$. Ускорение $g = 0$ при РМН и $g = 1$ при РТН. Кинематическое условие (2.1) описывает адвекцию поверхности η полем скоростей $\nabla\varphi$. Динамическое условие (2.2) представляет собой интеграл Коши—Лагранжа уравнения Эйлера. Стационарный случай получается при $\partial_t = 0$, а двумерный при $\partial_y = 0$. В стационарном случае условие (2.2) превращается в интеграл Бернулли.

---

3) Предварительное описание этих эффектов дано в [18]. Там рассмотрен только $p4mm$ случай (квадрат). Ниже рассмотрен общий случай (решетки $pmm2$, $p6mm$ и $p3m1$; о классах симметрии см. [25–27]). Отметим следующие новые эффекты. 1. Одинаковость динамики пузырей в разных решетках. 2. Асимптотическое повышение симметрии (симметрия набора $\{k\}$ начальных волновых векторов важнее совокупной симметрии набора начальных амплитуд и векторов $\{a; k\}$). 3. Взаимозаменяемость гексагональной и треугольной сеток пузырей при перефазировке РМН и РТН. Кстати, половину периода по времени стоячей гравитационной волны сетка гребней — гексагональная, а в течение второй половины — треугольная.

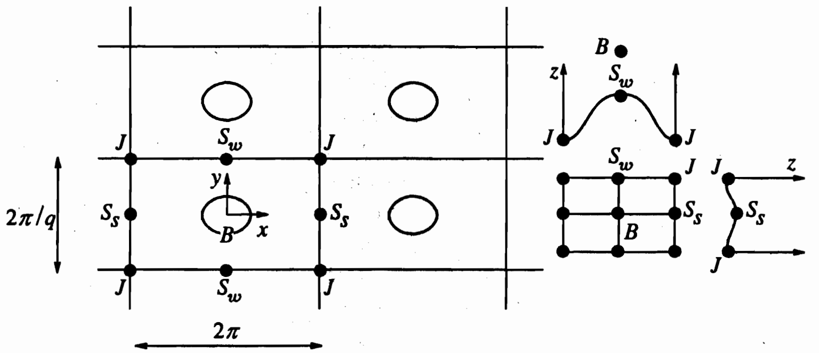


Рис. 1. Прямоугольная решетка пузырей B. Их вершины окружены эллипсами

3. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ, ГЕКСАГОНАЛЬНЫЕ И ТРЕУГОЛЬНЫЕ РЕШЕТКИ

Симметрия разложения. Симметрия течения определяется симметрией потенциала. Спектральные разложения потенциалов имеют вид

$$\varphi = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_{nm}}{q_{nm}}c_{nx}c_{mqy}e_{nm}, \tag{3.1}$$

$$c_{nx} = \cos nx, \quad c_{mqy} = \cos mqy, \quad e_{nm} = \exp(-q_{nm}z), \quad q_{nm} = \sqrt{n^2+m^2q^2},$$

$$\varphi = -\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_{nm}}{q_{nm}}(c_nc_m^+ + s_ns_m^+ + c_nc_m^- + s_ns_m^- + c_n^+c_m^- - s_n^+s_m^-)e_{nm}, \tag{3.2}$$

$$c_n = \cos nx, \ c_n^{\pm} = \cos n\xi^{\pm}, \ s_n = \sin nx, \ s_n^{\pm} = \sin n\xi^{\pm}, \ \xi^{\pm} = \frac{x \pm \sqrt{3}y}{2},$$

$$e_{nm} = \exp(-q_{nm}z), \qquad q_{nm} = \sqrt{n^2 - nm + m^2}.$$

Ряд (3.1) относится к прямоугольному случаю. Элементарная ячейка является трубой с образующей вдоль оси z и поперечным сечением $2\pi \times 2\pi/q$, лежащим в плоскости (x, y), см. рис. 1. Отношение сторон прямоугольника равно q. Анализ прямоугольной решетки позволяет понять, как $2D$-течение перестраивается в $3D$-течение. Ряд (3.1) представляет собой комбинацию двух векторов $(1, 0, 0)$ и $(0, q, 0)$, а ряд (3.2) — трех векторов $(1, 0, 0)$ и $(1/2, \pm\sqrt{3}/2, 0)$. В ряду (3.1) каждое слагаемое является собственной модой лапласиана, а в ряду (3.2) собственными модами являются пары $(cc^{\pm} + ss^{\pm})e$, $(c^+c^- - s^+s^-)e$.

Матрицы амплитуд a_{nm} (3.1), (3.2) суть функции времени. Амплитуды a_{nm} (3.1) не симметричны (при $q \neq 1$) относительно перестановки индексов. Амплитуды a_{nm} (3.2) симметричны ($a_{nm} = a_{mn}$). Квадратная решетка получается при подстановке $q = 1$ в ряд (3.1). В этом случае амплитуды симметричны.

Элементарная ячейка и идеальная труба. Разложения потенциалов (3.1), (3.2) быстро сходятся (для $2D$-случая это показано в [15, 17]). В ряду (3.1) доминируют[4)] амплитуды a_{10}, a_{01}, а в (3.2) — a_{10}. Рассмотрим элементарную ячейку потенциала (3.1). Центр

[4)] Это и позволяет использовать для описания течения параболическую модель 1.

поперечных координат ($x = 0, y = 0$) находится в точке B (рис. 1). Если начальные амплитуды $a_{10}(0), a_{01}(0)$ положительны, а начальные возмущения поверхности η отсутствуют, то точка B является вершиной пузыря. На рис. 1 вершины охвачены эллипсами. Нетрудно видеть, что прямолинейные вертикальные (т. е. параллельные оси z) траектории жидких частиц проходят через точки B (пузырь), J (струя), S_s («сильное» седло) и S_w («слабое» седло). Плоские кривые траектории жидких частиц заполняют плоскости, параллельные оси z и проходящие через прямые BS_s, BS_w, JS_s и JS_w. Отрезки этих прямых вычерчены на маленьком прямоугольнике на рис. 1. Если $q = 1$ (квадрат), то плоские траектории заполняют и плоскости, проходящие через диагонали BJ.

Сказанное связано с очевидными свойствами симметрии потенциала (3.1). На симметричных вертикалях B, J, S_s, S_w поперечные (горизонтальные) скорости u и v (2.1) равны нулю. Это вызвано тем, что по этим прямым пересекаются плоскости симметрии BS_s, BS_w, JS_s, JS_w. На этих плоскостях обращается в нуль нормальная компонента скорости V_n. Поэтому четверть полного периода течения, заключенная в прямоугольник BS_sJS_w, эквивалентна течению в идеальной трубе. На стенках такой трубы равна нулю нормальная составляющая скорости V_n, а не полная скорость V. В идеальной трубе поток потенциальным образом обтекает стенки. Четверть BS_sJS_w образует минимальную трубу (домен). Течение во всем пространстве получается паркетным размножением этого домена путем отражений и переносов. В случае квадрата ($q = 1$) домен — треугольник BJS_s.

Домены, стенкообразные струи и арки. По стенкам доменов бегут пристеночные или стенкообразные струи. Вид этих струй в плане показан на рис. 1. Кривые JS_sJ и JS_wJ соответствуют нижнему (по z) краю пристеночных струй. Кривые имеют вид арок или подков с куполом или вершиной в седловой точке S_s или S_w. На больших временах расстояние по вертикали z между точками J и S_s меньше, чем расстояние между точками J и S_w. Седла S_w больше отстают от вершин струй J в движении вниз по оси z, чем седла S_s. Поэтому седла S_w и называются «слабыми» по сравнению с «сильными» седлами S_s.

Гексагональная решетка пузырей. Перейдем к потенциалам (3.2). Пусть при $t = 0$, во-первых, доминирует амплитуда a_{10} (возмущения η равны нулю) и, во-вторых, $a_{10} > 0$. Тогда легко видеть, что в точках B на рис. 2 находятся вершины пузырей. Первые несколько вершин решетки пронумерованы цифрами 1, 2, 3 и 4. Точка 1 — центр координат. В точках J находятся вершины струй. Несколько струй пронумерованы (5–7). Симметричные вертикали ($V_\perp = 0$) проходят через вершины пузырей B, струй J и седла S. Плоскости симметрии проходят через прямые, являющиеся продолжениями отрезков BJ, BS и JS. Минимальный домен — треугольник BJS. Полное течение складывается из паркета доменов.

Треугольная решетка пузырей. Дополнительность треугольной и гексагональной решеток. Рассмотрим случай треугольной решетки пузырей (рис. 3). Обозначим соответствующий потенциал $\varphi_3(x_3, y, z, t)$. Выше рассмотрен случай сетки типа пчелиных сот (рис. 2) с потенциалом $\varphi_6(x_6, y, z, t)$, который дается двойной суммой (3.2) при $a_{10} > 0$. При этом в центре $x_6 = 0, y = 0$ находится вершина гексагонального пузыря B. Треугольная решетка пузырей также дается суммой (3.2), но при $a_{10} < 0$. Потенциал $\varphi_3(x_3, \ldots)$ треугольной решетки пузырей с пузырем в центре координат ($x_3 = 0, y = 0$) получается из потенциала $\varphi_6(x_6, \ldots)$ сдвигом на отрезок, соединяющий точки 1 и 5 на рис. 2 ($x_6 = 4\pi/3 + x_3$).

Дополнительность гексагональных и треугольных пузырей вытекает из инвариант-

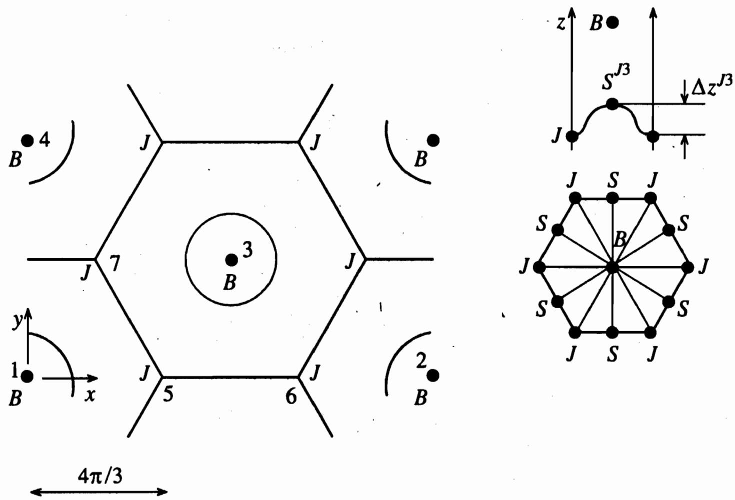


Рис. 2. Гексагональная решетка пузырей B. Вершины B охвачены кружками. Важно то, что в вершинах струй J сходятся по три плоскости симметрии, см. конец п. 5.2

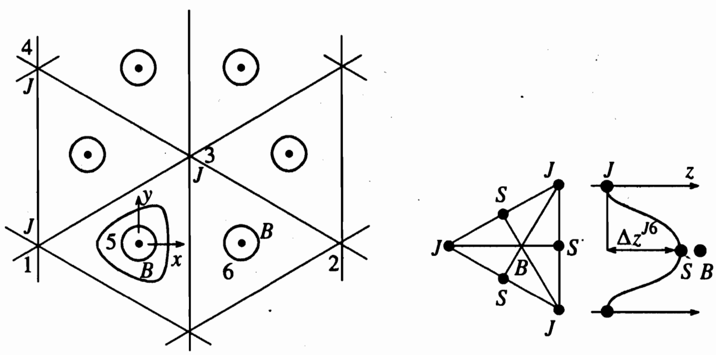


Рис. 3. Треугольная решетка пузырей B (кружки). В вершинах J сходятся по шесть плоскостей симметрии

ности потенциала (3.2) относительно поворотов вокруг оси $p6$ (вращение на 60^0), находящейся в точке 1, и вокруг оси p3 (вращение на 180°), находящейся в точке 5 на рис. 2 и 3.

4. ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ. ДВУМЕРНОЕ ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО

4.1. *Потенциалы* φ_6, φ_4 *и* φ_3. В модели 1 разложения (3.1), (3.2) обрываются на первых членах. Потенциалы гексагонального, квадратного и треугольного пузырей имеют вид

$$\varphi_6 = -\frac{a}{3}(c + c^+ + c^-)e^{-z}, \qquad c = \cos x, \;\; c^{\pm} = \cos \xi^{\pm}, \tag{4.1}$$

$$\varphi_4 = -\frac{a}{2}(\cos x + \cos y)e^{-z}, \tag{4.2}$$

$$\varphi_3 = \frac{a}{6}(c - \sqrt{3}s + c^+ + \sqrt{3}s^+ + c^- + \sqrt{3}s^-)e^{-z}, \tag{4.3}$$

$$s = \sin x, \qquad s^{\pm} = \sin\xi^{\pm}.$$

Пузыри находятся в центре $x = y = 0$. В (4.1)–(4.3) $a = a_{10}$. Согласно сказанному в п. 3, амплитуды $a > 0$ в (4.1), (4.2) и $a < 0$ в (4.3).

4.2. *Граница жидкости.* Можно показать, что в случае гексагона, квадрата и треугольника главные кривизны поверхности η в точках B и J совпадают[5)]. Поэтому в окрестности вершин поверхность η аппроксимируется симметричным параболоидом. Соответственно, горизонтальные сечения границы η вблизи вершин имеют вид кружка, см. рис. 2 и 3[6)]. В этой окрестности имеем

$$\eta(x, y, t) = \eta_0(t) - K(t)\frac{\Delta}{2}, \qquad \Delta = x^2 + y^2. \tag{4.4}$$

4.3. *Вычисление скоростей и производных.* Вычислим потенциал ускорений φ_t, скорости u, v, w и производные η_x, η_y при помощи прямого дифференцирования (4.1)–(4.4). Рассмотрим значения потенциала и скорости на границе $\varphi_t|, u|, v|, w|$. Вычислим $u^2|, v^2|, w^2|$. Разложим выражения по малому Δ (4.4), оставляя нулевой и первый по степени Δ члены.

4.4. *Лабораторная и связанная системы координат и нулевой порядок кинематического условия.* При вычислении $\varphi_t|$ возникает множитель $\dot{a}\exp(-\eta_0)$. Рассмотрим лабораторную и связанную с вершиной пузыря системы координат. В лабораторной системе координат покоится жидкость на бесконечности, а в связанной покоится вершина пузыря. Введем важное обозначение

$$A = a\exp(-\eta_0). \tag{4.5}$$

Нетрудно видеть, что A является амплитудой Фурье в связанной системе координат, тогда как a — это амплитуда Фурье в лабораторной системе координат. Дифференцируя (4.5), находим

$$\dot{a}\exp(-\eta_0) = \dot{A} + \dot{\eta}_0 A. \tag{4.6}$$

Запишем кинематическое условие (2.1) в точке B. Это дает нулевой по Δ порядок разложения (2.1) в точке $x = y = 0$. Из (2.1) и (4.4) имеем

$$\eta_t(x=0, y=0, t) = \varphi_z[x=0, y=0, z=\eta(0,0,t), t], \qquad \eta_t(0,0,t) = \dot{\eta}_0(t).$$

Подставляя сюда вычисленную в п. 4.3 скорость $w|$, находим

$$(\dot{\eta}_0)_6 = A, \tag{4.7}$$

[5)] В седловых точках главные кривизны имеют разный знак.

[6)] В случае прямоугольного пузыря главные кривизны в вершинах B и J по величине различны и контур сечения поверхности η горизонтальной плоскостью является эллипсом, см. рис. 1.

$$(\dot{\eta}_0)_4 = A, \tag{4.8}$$

$$(\dot{\eta}_0)_3 = -A/2, \tag{4.9}$$

где формулы (4.7)–(4.9) относятся к случаям соответственно гексагона ($A > 0$), квадрата ($A > 0$) и треугольника ($A < 0$). Подставляя (4.7)–(4.9) в (4.6), находим

$$[\dot{a}\exp(-\eta_0)]_6 = \dot{A} + A^2, \quad [\dot{a}\exp(-\eta_0)]_4 = \dot{A} + A^2, \quad [\dot{a}\exp(-\eta_0)]_3 = \dot{A} - A^2/2.$$

4.5. *Подстановка в краевые условия.* Выпишем потенциалы, скорости, их квадраты и производные. Потенциал ускорений на границе дается выражениями

$$(\varphi_t)_6 = -\dot{a}\frac{c + c^+ + c^-}{3}e^{-z},$$

$$(\varphi_t)_6| = -\dot{a}\exp(-\eta_0)\frac{c + c^+ + c^-}{3}e^{K\Delta/2} = -(\dot{A} + A^2)\left(1 - \frac{1-2K}{4}\Delta\right) \tag{4.10}$$

в случае гексагона,

$$(\varphi_t)_4 = -\dot{a}\frac{\cos x + \cos y}{2}e^{-z}, \quad (\varphi_t)_4| = -(\dot{A} + A^2)\left(1 - \frac{1-2K}{4}\Delta\right) \tag{4.11}$$

в случае квадрата и

$$(\varphi_t)_3 = \dot{a}\frac{c - \sqrt{3}s + c^+ + \sqrt{3}s^+ + c^- + \sqrt{3}s^-}{6}e^{-z},$$

$$(\varphi_t)_3| = \left(\dot{A} - \frac{A^2}{2}\right)\frac{c - \sqrt{3}s + \ldots}{6}e^{K\Delta/2} = \left(\frac{\dot{A}}{2} - \frac{A^2}{4}\right)\left(1 - \frac{1-2K}{4}\Delta\right) \tag{4.12}$$

в случае треугольника.

Аналогично получаем

$$(\varphi_z)_6| = A\left(1 - \frac{1-2K}{4}\Delta\right), \tag{4.13}$$

выражение для $(\varphi_z)_4|$ совпадает с (4.13),

$$(\varphi_z)_3| = -\frac{A}{2}\left(1 - \frac{1-2K}{4}\Delta\right), \tag{4.14}$$

$$(\varphi_x)_6| = (\varphi_x)_4| = Ax/2, \quad (\varphi_y)_6| = (\varphi_y)_4| = Ay/2, \tag{4.15}$$

$$(\varphi_x)_3| = -Ax/4, \quad (\varphi_y)_3| = -Ay/4. \tag{4.16}$$

Подставляя формулы (4.10)–(4.16) в краевые условия (2.1), (2.2), приходим к искомой динамической системе параболической модели. Система уравнений имеет вид

$$\dot{K} = \frac{1-4K}{2}W, \quad \dot{W} = -\frac{W^2 - 4gK}{2(1-2K)}. \tag{4.17}$$

В системе (4.17) $W = \dot{\eta}_0$ — скорость подъема пузыря, $K = 1/R$, R — радиус кривизны, $g = 0$ при РМН, $g = 1$ при РТН и $g = -1$ в случае гравитационных волн (см. [15]). В случаях гексагона, квадрата и треугольника соответственно имеем $W = A$, A и $-A/2$, см. формулы (4.7)–(4.9).

Видим, что система (4.17) оказывается универсальной, описывающей гексагональные, квадратные и треугольные решетки пузырей.

4.6. *Полный анализ системы.* В переменных W, K фазовое пространство системы (4.17) оказывается очень простым [15, 18]. В случае стоячих гравитационных $3D$-волн ($g = -1$) на плоскости W, K траектория $W(t), K(t)$ — замкнутый контур. Обход контура соответствует одному периоду колебания волны. Интересно, что в течение одной половины периода решетка гребней волны — гексагональная, а в течение другой — треугольная.

В случаях РТН и РМН фазовое устройство исчерпывается одной стационарной точкой, которая является узлом. Все имеющие физический смысл траектории заканчиваются при $t \to \infty$ в этом узле. Отсюда следует устойчивость решений в классе траекторий модели 1, разд. 1. В стационаре

$$K = 1/4, \quad R_d = 4/k, \qquad W = 1, \quad W_d = \sqrt{g/k} \tag{4.18}$$

при РТН[7] (индексом d выделены размерные значения) и

$$K = 1/4, \quad R_d = 4/k, \qquad W = 1/t, \quad W_d = 1/kt \tag{4.19}$$

в случае РМН.

Особенно просто устроена система (4.17) при РМН. При $g = 0$ она становится однородной и легко интегрируется. Если при РТН траектории существенно зависят от начальных данных, то при РМН имеется только одна независимая траектория. Остальные траектории, относящиеся к другим начальным данным, получаются из нее простым масштабированием. Точные интегралы системы (4.17) при $g = 0$ имеют вид

$$\sqrt{\frac{1-2K}{1-4K}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2(1-2K)} + \sqrt{1-4K}}{\sqrt{2}+1} = W_0 t, \tag{4.20}$$

$$\frac{W_0}{W} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \, \frac{\sqrt{2}W_0 - W}{\sqrt{2}W_0 + W} \right) = W_0 t. \tag{4.21}$$

Из формулы (4.21) легко вычислить смещение пузыря

$$\eta_0(t) = \int_0^t \dot{\eta}_0(\tau) d\tau = \int W(\tau) d\tau.$$

В [18] система (4.17), стационары (4.18), (4.19) и решения (4.20), (4.21) получены для случая квадратной решетки. Здесь этот подход распространен на еще две важные решетки. Система (4.17) и решения (4.20), (4.21) описывают переход из линейного в нелинейное стационарное состояние.

---

[7] Стационарная точка (4.18), относящаяся к РТН, была вычислена ранее в работах [28, 29, 17, 18, 8] для случая квадратной решетки и в работе [8] для случая гексагональной решетки.

5. О РЕЛЬЕФЕ ГРАНИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

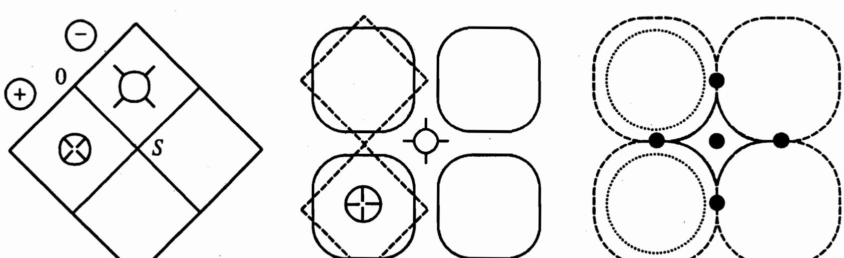
5.1. *Квадраты.* Рассмотрим последовательно квадратную ($4m$), гексагональную ($6m$, п. 5.2) и прямоугольную ($2m$, п. 5.3) решетки. Начнем со случая $4m$. Пусть потенциал $\varphi_4(x, y, z, t = 0)$ дается суммой двух волн (4.2) и $\eta(x, y, 0) \equiv 0$. Эволюция пространственной структуры поверхности η от линейной до нелинейной стадии прослежена на рис. 4. Представим рельеф поверхности $\eta(x, y, t_{obs})$ с его «буграми» и «ямами». На линейной стадии ($\eta \propto w| \approx w(x, y, z = 0, t)$) формы пузырей («бугров») и струй («ям») одинаковы.

Обсудим топографию срезов. Рассмотрим кривые (линии уровня), по которым пересекаются поверхность $z = \eta(x, y, t)$ и горизонтальные плоскости $z = h$, где h — высота среза рельефа. Рассмотрим карту уровней. Непустые пересечения имеются при $h_J < h < h_B$, где $h_B = \eta(2\pi n, 2\pi m, t) > 0$ и $h_J = \eta[(2n + 1)\pi, (2m + 1)\pi, t] < 0$, $n, m = 0, \pm 1, \ldots$. Уровни с $h > h_J + \epsilon$ ($0 < \epsilon \ll 1$) замкнуты вокруг точки J, а с $h < h_B - \epsilon$ — вокруг точки B. По одному из таких замкнутых вокруг точек J и B контуров изображены на рис. 4*а*. Черточки выставлены в направлении роста h.

На линейной стадии пузыри и струи разбивают плоскость x, y на равные клетки (шахматная доска, рис. 4*а*). На черных клетках доски находятся струи (черточки наружу), а на белых — пузыри (черточки внутрь). При возрастании высоты h имеем $J \to S \to B$. Контуры вокруг вершины пузыря h_B сменяются на контуры вокруг вершины струи h_J при переходе через сепаратрисную сетку. Ее узлы — седла S. Сеть образуют сепаратрисы, соединяющие точки S.

На линейной стадии сепаратрисы, во-первых, прямолинейны и, во-вторых, проходят по нулевому уровню $h = h_0 = 0$. В этом проявляется «вырождение» квадратного случая на линейной стадии. Отметим, что структуры $4m$ являются простейшими в ряду пространственных структур.

На нелинейной стадии снимается совпадение сепаратрис с уровнем h_0. Этого совпадения нет ни на линейной, ни (тем более) на нелинейной стадии в случае $6m$, $3m$ или $2m$ решеток, см. п. 5.2, 5.3. В решетках $6m$, $4m$ и $3m$ имеется один тип седла, см.



а *б* *в*

Рис. 4. Квадратная решетка. Уровни $h = 0$ и $z = h_s$ на линейной (*а*) и нелинейной (*б, в*) стадиях. *а*) Уровень $h < 0$, обозначенный кружком с черточками наружу, находится в квадрате со знаком минус. Прямые — сепаратрисная сетка. Она помечена нулем, поскольку на ней высота $h = 0$. Уровни $h > 0$, знак — плюс, черточки внутрь. *б*) Срезы $h = 0$ на линейной (точки; перенесены с рис. *а*) и нелинейной (сплошные кривые без черточек) стадиях. *в*) Срезы $h = 0$ (точки; перенесены с рис. *б*) и $z = h_s$ (штриховые и сплошные кривые) на нелинейной стадии. Сепаратрисная сеть состоит из соединенных вместе в точках S четырехлучевых заостренных звезд, одна из которых обведена сплошной кривой рис. 2, 4 и 3. В решетках $2m$ таких типов два: S_s и S_w, см. рис. 1. Поэтому в этом случае сепаратрисная сеть обычно распадается на две системы параллельных цепочек: цепочки S_s (отрезки из сепаратрис $S_s - S_s$ и седла S_s) и цепочки S_w, см. п. 5.3.

Нелинейная стадия показана на рис. 4*б, в*. На ней формы пузырей и струй разные. Нулевой уровень h_0 деформируется. Из квадрата, изображенного на рис. 4*а* сплошными прямыми, а на рис. 4*б* — точками, он превращается в скругленный контур, изображенный на рис. 4*б* сплошной кривой, а на рис. 4*в* — точками. Внутри этого контура высота $h > 0$. Это «положительная» площадь S^+ — область подъема «вакуума». Вне контура $h < 0$. Это «отрицательная» площадь S^-, на которой жидкость опускается вниз. Отношение $S^-/S^+ = 1$ на линейной стадии. На нелинейной стадии $S^-/S^+ < 1$.

Рассмотрим предел $t \to \infty$. Асимптотически пузырь удаляется в бесконечность от начального положения границы ($h_B - h_0 \to \infty$). При этом отношение $S^-/S^+ \to 0$, а контур h_0 прижимается к квадрату $JJJJ$ (см. рис. 1 при $q = 1$). Квадрат $JJJJ$ является сечением трубы, по стенкам которой бегут стенкообразные или уплощенные струи. Видим, что происходит поворот квадрата на 45°. При $t = 0$ квадраты $h = 0$ расположены косо, см. рис. 4*а*. Их стороны параллельны биссектрисам углов между осями x и y. При $t = \infty$ стороны квадратов $h = 0$ параллельны осям x и y.

На нелинейной стадии сепаратрисы $S \to S$ теряют прямолинейность. Они показаны на рис. 4*б, в* сплошными (центральная звезда) и штриховыми кривыми. Точки на концах звезд являются седлами S. Центр звезды — вершина струи J. С течением времени угол пересечения сепаратрис становится все более острым. При $t \to \infty$ уровень $h_s \to -\infty$ (отношение плотностей $\mu = 0$). При этом звезда стягивается в крест из отрезков JS.

Характерные уровни расположены в порядке $h_J < h_s < h_0 < h_B$. Контур среза $h = 0$ (точки, рис. 4*в*) располагается внутри контура h_s (штриховые и сплошные кривые).

Сопоставим рис. 4 и рис. 1 при $q = 1$, когда седла S_s и S_w одинаковы. На рис. 1 и 4 дан вид сверху (в плоскости x, y). Кроме того, на рис. 1 приведен вид сбоку (в плоскости, проходящей через ось z), важный для понимания пространственной структуры течения. На боковом плане течения показаны точки J и S движущейся вниз арки JSJ и проекция на плоскость JJ движущейся вверх точки B. Плоскости JJ являются плоскостями симметрии или боковыми стенками труб, ограничивающих ячейку течения. Дуга JS (плоская кривая; половина арки JSJ) лежит в пересечении стенкообразной струи и плоскости JJ. Она — нижний край смоченной части стенки трубы. На горизонтальном плане она представляется отрезком JS.

Для пространственной ориентации представим два варианта подъема из точки J в точку B по поверхности η. В первом варианте подъем происходит по арке JB, проекцией которой на плоскость x, y является отрезок JB. Во втором варианте подъем осуществляется в два этапа. На первом поднимаемся из J в S по дуге JS, а на втором переходим из S в B по дуге SB. Проекции этих дуг на плоскость x, y перпендикулярны друг другу, см. рис. 1. Вместе указанные отрезки образуют треугольник JBS.

5.2. *Гексагоны.* В разд. 7 проведен сравнительный анализ решеток $6m$, $4m$ и $3m$. Оказывается, случай $6m$ выделен[8]. В связи с этим остановимся на нем.

---

[8] В нем в вершину струи J сходится минимально возможное число симметричных стенок (три). Именно это обстоятельство выделяет решетку $6m$ пузырей. Сами пузыри в решетке $6m$ мало отличаются от пузырей в решетке $4m$.

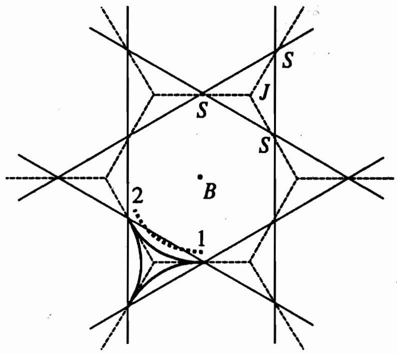


Рис. 5. Уровни гексагональной поверхности η. На линейной стадии область $h < h_s$ ограничена треугольником SSS, составленным из прямолинейных сепаратрис. На нелинейной стадии сепаратрисы становятся кривыми и треугольник превращается в трехлучевую звезду. Шестерка звезд окружает каждый пузырь B

Пусть $\eta(x,y,0) \equiv 0$ и потенциал $\varphi_6(x,y,z,0)$ дается суммой трех волн (4.1). Как и в п. 5.1, рассмотрим характерные уровни h_J, h_s, h_0 и h_B. На линейной и нелинейной стадиях имеем $h_s < h_0$. Используя тригонометрические формулы сложения косинусов, нетрудно показать, что на линейной стадии, когда $h \propto w|$ и скорость w определяется только линейной комбинацией гармоник (4.1), сетка сепаратрис $S-S$ состоит из прямых. Они показаны сплошными линиями на рис. 5. Сетка образуется из равносторонних треугольников SSS с центрами в точках J. Шесть треугольников сплетаются в венок вокруг вершины B.

На нелинейной стадии сепаратрисы $S-S$ искривляются. Вокруг вершин J образуются трехлучевые звезды с острыми концами. При $t \to \infty$ уровень $h = 0$, шестая часть контура которого при $t \neq \infty$ показана дугой 1–2 на рис. 5, прижимается к стенкам трубы, составленной из плоскостей JJ. Они даны на рис. 5 штриховыми прямыми. При $t = \infty$ лучи звезды вырождаются в отрезки JS.

По стенкам JJ трубы спускаются струи. Из-за растекания в плоскости стенки они уплощаются (уплощенные, стенкообразные или пристеночные струи). В углах трубы струи сильнее. Из-за этого на дугах JS глубина погружения точек J наибольшая. Степень возвышения угловых струй J над «стенкой» характеризуется отношением

$$\zeta = (h_J - h_s)/h_J. \tag{5.1}$$

В стенкообразном случае оно мало. В случае пальцеобразной струи J это отношение больше.

Сравним топологию струй решеток $6m$ (рис. 2, 5) и $3m$ (рис. 3). В решетке $6m$ выделенность угловых струй J над стенкой JS невелика, отношение (5.1) мало. Соответственно, пузыри решетки $6m$ хорошо изолированы друг от друга разделяющими их стенками JS по всему периметру пузыря.

В решетке $3m$ ситуация обратная. Пузыри изолированы друг от друга хуже. Разделяющие их стенки по направлениям BSB через седло относительно невысоки, а вот выделенность угловых струй J существенно больше. Поэтому отношение ζ (5.1) довольно велико. Образуется решетка мощных пальцеобразных струй J.

В этом состоит специфика решетки $3m$. В ней имеет место усиленная фокусировка струй. Струи порождаются пузырями. В решетке $3m$ шесть пузырей, расположенных кружком вокруг одной струи J, «питают» эту струю и делают ее мощной.

Сравним подъемы из точки J в точку B через седло S. В случае $6m$ разность высот точек B и J равна $(z_B - z_s) + \Delta z^{J3}$. В случае $3m$ эта же разность равна $(z_B - z_s) + \Delta z^{J6}$, где

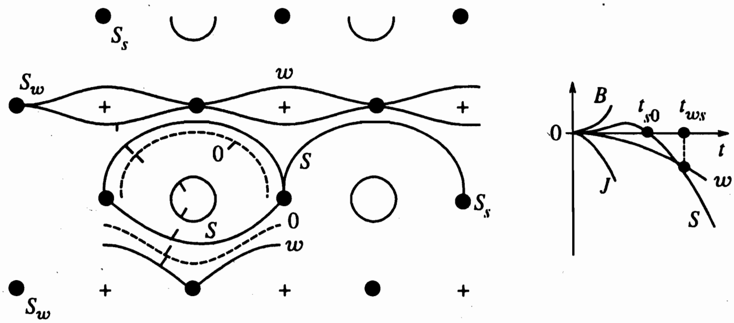


Рис. 6. Карта уровней η решетки $2m$. Цепочечная структура сепаратрис $S_s - S_s$, $S_w - S_w$. Сепаратрисы $S_s - S_w$, которые объединяли бы цепочки в сеть, отсутствуют. Кружки — пузыри, кресты — вершины струй, 0 — нулевой уровень, s — сепаратрисы $S_s - S_s$, w — $S_w - S_w$. Черточки на уровнях выставлены в направлении роста h. На графике справа — зависимости от t позиций характерных точек при РТН

отрезки Δz^{J3} и Δz^{J6} определены на рис. 2 и 3, цифры 3 и 6 в индексах $J3$ и $J6$ указывают, сколько плоскостей симметрии сходится в точке J. Разность Δz^{J3} меньше, чем Δz^{J6}. Поэтому, как сказано, в $6m$ решетке струи стенкообразны, а в случае $3m$ формируется система мощных пальцеобразных струй. В разд. 7 показано, что пересечение более чем трех стенкообразных струй маловероятно. Поэтому в $3D$-течениях в отношении струй основным является тип трехлучевой звезды, показанной на рис. 5, см. также рис. 2.

5.3. *Прямоугольники.* Структура решеток $2m$ существенно сложнее рассмотренных выше высокосимметричных случаев. Это вызвано расщеплением седел на два типа и увеличением числа характерных точек. Из-за расщепления сетчатые сепаратрисные диаграммы уступают место полосатым.

Пусть $\eta(x, y, 0) \equiv 0$, а потенциал в начальный момент дается суммой двух гармоник и имеет вид

$$\varphi(x, y, z, t = 0) = -\frac{a(0)}{2} \cos x \, e^{-z} - \frac{b(0)}{2q} \cos qy \, e^{-qz}, \tag{5.2}$$

где $a = a_{10}$, $b = a_{01}$, ср. с формулами (3.1) и (4.2). Пусть для определенности $a(0)/b(0) = 1$ и $q > 1$. Структура поверхности η при $t > 0$ показана на рис. 6. На рис. 6 направление по y растянуто в q раз, ср. с рис. 1.

Законы роста возмущения со временем разные в случаях РТН и РМН. Рассмотрим их по отдельности. Начнем с РТН. Существенно то, что длины волн гармоник (5.2) различны. Этим потенциал решетки $2m$ отличается от более симметричных потенциалов (4.1)–(4.3). На линейной стадии волна по y усиливается быстрее, поскольку $a(t) = a(0)\,e^t$, $b(t) = b(0)\,e^{\sqrt{q}t}$. Напомним, что при РТН выбирается нормировка $k = 1, g = 1$ и что $2\varphi(x, y, z, t) = -a(t)c_x e^{-z} - b(t)c_{qy}e^{-qz}$. Поэтому уже на линейной стадии сепаратрисная диаграмма с клетками, которые связывали бы в сеть седла S_s и S_w, отсутствует. Вместо сети возникают сепаратрисные цепочки w $(S_w - S_w)$ и s $(S_s - S_s)$, см. рис. 6.

В процессе движения положение точек S_s (кривая s, см. график на рис. 6) и S_w (кривая w) относительно друг друга и относительно уровня $z = 0$ меняется. Иерархии высот имеют вид: $h_{sw} < 0 < h_{ss}$ при $0 < t < t_{s0}$, $h_{sw} < h_{ss} < 0$ при $t_{s0} < t < t_{ws}$, и $h_{ss} < h_{sw} < 0$ при $t > t_{ws}$, где индексы sw и ss относятся к седлам S_w и S_s. На нижней половине рис. 6 показаны уровни $h_{sw} < h_0 < h_{ss}$ (кривые $w, 0$ и s), относящиеся к этапу $0 < t < t_{s0}$. На верхней половине изображен следующий этап, когда эти уровни расположены в порядке $0, s, w$.

Если заштриховать площадки на плоскости x, y, внутри которых $h < h_{sw}$, то получится система разделенных полосок, тянущихся параллельно оси x. На заключительном этапе, $t > t_{ws}$, нижним становится уровень S_s. При этом ориентация полос меняется с параллельной оси x на параллельную оси y.

На заключительном этапе доминирует движение, связанное с более длинной стороной прямоугольника (см. рис. 1; поскольку $q > 1$, это сторона x). Основной расход жидкости происходит через пристеночные струи, параллельные оси y, опускающиеся по стенкам JS_sJ. При этом $R_x > R_y$, где R_x, R_y — радиусы кривизны в вершине B по осям x и y. Перенесем контур уровня h_0 из верхней половины рис. 6 в прямоугольник $JJJJ$ на рис. 1. Обозначим через Δ_x и Δ_y расстояния от этого уровня соответственно до точек S_w и S_s. Зазоры $2\Delta_x$ и $2\Delta_y$ характеризуют толщину пристеночных струй, бегущих по стенкам JS_wJ и JS_sJ. Доминирование струй JS_sJ означает, что $\Delta_x < \Delta_y$.

Из анализа прямоугольных решеток ясно, как изменяется течение при переходе от $3D$- к $2D$-случаю. При $q \to \infty$ прямоугольник становится похожим на щель (рис. 1), в которой поперечные составляющие движения в основном направлены по оси x.

Рассмотрим РМН. Если пренебречь отличием $a(t)$ от $b(t)$ на начальном этапе, то сепаратрисная диаграмма имеет вид сетки. Она аналогична показанной на рис. 4*a*. В $2D$-геометрии скорость вершины струи $\dot{\eta}_J$ возрастает от начального значения $a(0)$ до примерно в два раза большего. Не совсем ясно, как идет конкуренция смещений $h_{sw}(t)$ и $h_{ss}(t)$ при РМН. В любом случае эти функции не равны и вместо сети $S_s - S_w$ образуется полосатая структура. Подчеркнем, что вынос массы струями происходит в основном, как и при РТН, в струях JS_sJ.

6. СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ И ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

6.1. *Численный метод.* Интегрировалась полная система уравнений Эйлера сжимаемой невязкой среды, записанная в дивергентной форме [37, 38]. Использовалась квазимонотонная сеточно-характеристическая схема второго порядка аппроксимации. Монотонность усилена комбинацией схем с центральными и ориентированными разностями. Аналогичный гибридный метод был разработан для численного моделирования течений несжимаемой жидкости [39]. В расчетной схеме не используются ни искусственная вязкость, ни сглаживание, ни процедуры ограничения потока. Схема имеет такие полезные качества как консервативность, монотонность и повышенный порядок аппроксимации. Требование монотонности обеспечивает нелинейную диссипацию, сглаживающую коротковолновые возмущения с длиной волны порядка нескольких шагов сетки. Область интегрирования имеет форму прямоугольного параллелепипеда, на боковых сторонах которого выполняются условия симметрии, а на нижней и верхней границах — условия непротекания.

6.2. *РТН.* На рис. 7–9 представлены результаты расчета РТН. Считалась четверть полного периода течения в ящике $\pi \times \pi \times 7\pi$ на сетке $30 \times 30 \times 210$. На рис. 7 изображен полный период. Начальное положение границы совпадает с плоскостью $z = 0$ (рис. 7), делящей ящик по высоте в отношении 3:4. Отношение плотностей нижней и верхней жидкостей $\mu = 1/10$, нормировка $g = 1$, $k = 1$. Начальное возмущение давалось

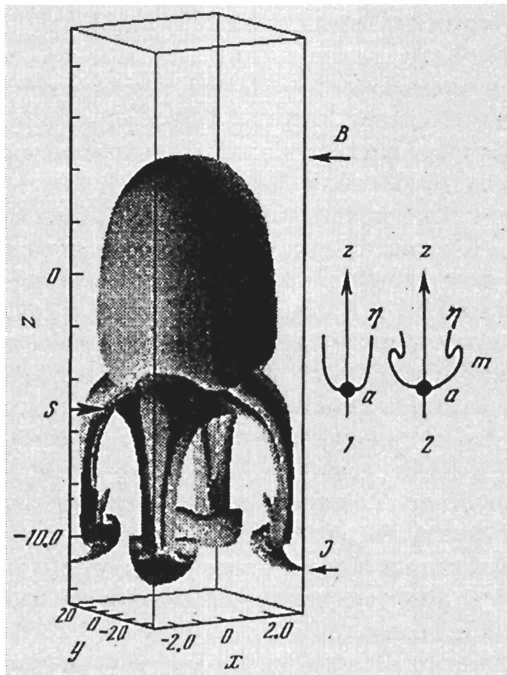


Рис. 7. Форма границы раздела в случае квадратной решетки пузырей на момент $t = 9$. Стрелками отмечены седло S и вершины B, J. Справа — схема формирования грибовидного образования

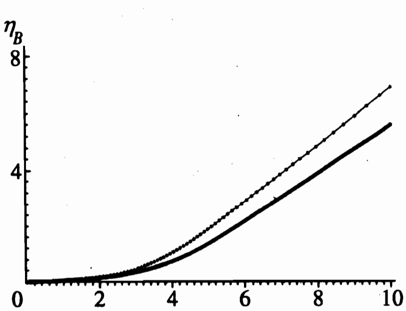


Рис. 8. Зависимости $\eta_B(t)$. Тонкая кривая с маркерами — теория разд. 4, жирная кривая — моделирование

формулой (4.2) с $a(0) = 0.05$.

Смещение пузыря $\eta_B(t)$ показано на рис. 8. Видно, что устанавливается режим с постоянной скоростью подъема пузыря. В численном эксперименте предельная скорость равна $w_{cs}(\infty) = 0.83$, что составляет примерно 90% от теоретической скорости (4.18), подправленной на фактор $\sqrt{1-\mu}$, учитывающий конечную плотность легкой жидкости [6, 40]. На рис. 9 вычерчены теоретическая и численная зависимости радиуса кривизны $R(t) = 1/K(t)$. Как видим, теория и моделирование удовлетворительно

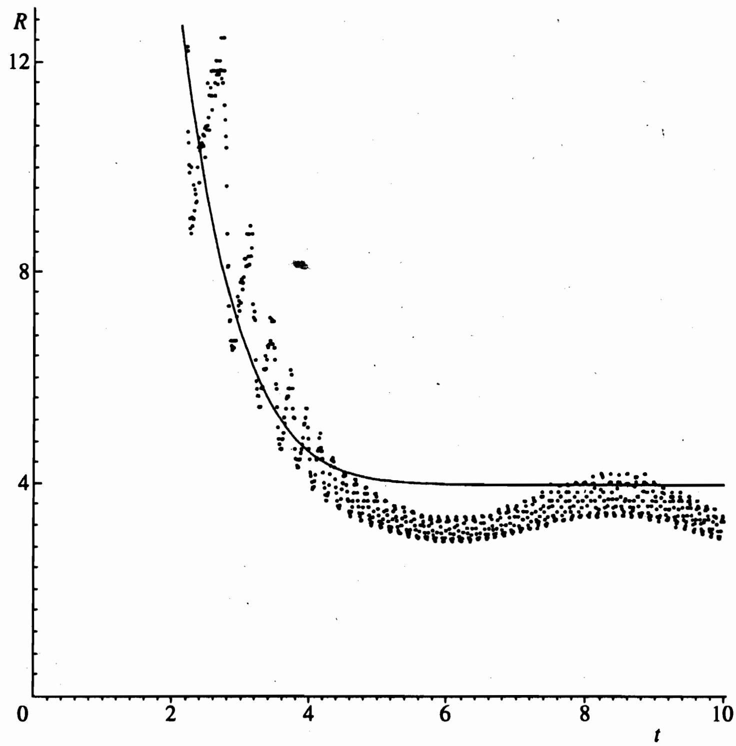


Рис. 9. Зависимости $R(t)$. Сплошная кривая — расчет системы (4.17), маркеры — численное моделирование

согласуются.

6.3. *РМН.* На рис. 10 и 11 показаны результаты в случае РМН ($g = 0$). Геометрические размеры и отношение μ были такими же, как в п. 6.2. Начальное возмущение давалось формулой (4.2) с $a(0) = 1$. Как видим, результаты по скорости (а значит и по смещению) согласуются хорошо. Описания процесса искривления поверхности пузыря (зависимости $K(t)$) согласуются удовлетворительно. При численном моделировании кривизна пузыря на больших временах несколько больше расчетной.

6.4. *Роль отношения плотностей.* Развитая в п. 4 и 5 теория относится к случаю $\mu = 0$. Посмотрим, что изменится при $\mu \ll 1$. Практически не меняется форма пузырей [18]. Скорость их движения меняется мало [6, 40]. В то же время имеется качественная деталь, исчезающая при $\mu = 0$. Это грибовидные образования.

При РТН в струях падающее вещество разгоняется до высоких скоростей (поэтому струи узки). В результате достигаются скорости, при которых становится важным влияние аэродинамического сопротивления со стороны легкой жидкости на продвижение вершины струи. Аэродинамический напор легкой жидкости приводит к формированию грибов. Этот вопрос исследован в работе [40] для случая $2D$-геометрии с помощью конформных преобразований и метода годографа. Напор легкой жидкости является причиной образования грибовидных струй и при РМН.

Образование грибов является следствием торможения тяжелой жидкости напором

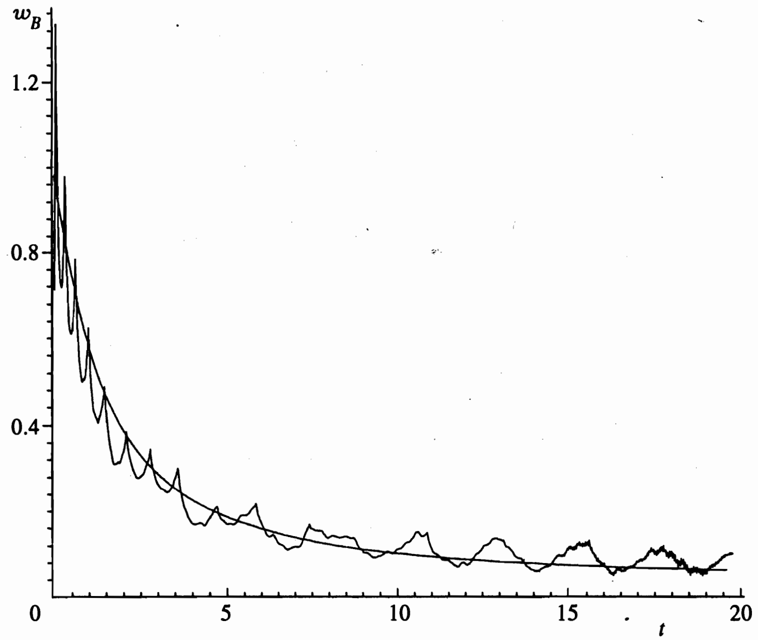


Рис. 10. Зависимости скорости пузыря $w_B(t)$. Плавная кривая — интеграл (4.21), флуктуирующая кривая — моделирование

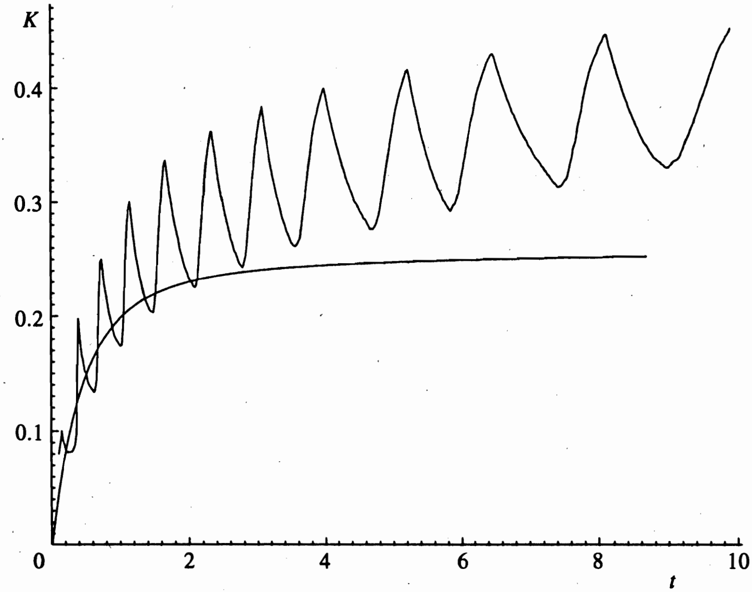


Рис. 11. Зависимости кривизны пузыря $K(t)$. Плавная кривая — интеграл (4.20), осциллирующая кривая — моделирование

легкой. Зона торможения локализована возле точки разделения потока легкой жидкости струей тяжелой [40]. Вершина струи есть точка разделения. Гриб формируется, когда струя становится достаточно тонкой и набирает достаточно большую скорость. Струя тонка там, где мал радиус кривизны R. При $\mu = 0$ радиус R минимален в вершине струи.

Так же обстоит дело и в $3D$-геометрии. Теперь «тонкой быстрой» зоной является полоска вдоль арки JSJ, см. разд. 5. Здесь велика скорость движения легкой жидкости навстречу арке и мал радиус кривизны поверхности η в направлении, перпендикулярном плоскости арки. На арке происходит разделение потока легкой жидкости. Обтекание ею арки приводит к формированию полоскообразного грибовидного образования вдоль всей арки.

Рассмотрим сечение арки и следующей за ней пристеночной струи плоскостью P, перпендикулярной арке. Оно показано справа на рис. 7. Здесь a — точка пересечения плоскости P и арки JSJ, $a\eta$ — кривая пересечения плоскости P и поверхности η, az — плоскость стенки, по которой спускается пристеночная струя. Сечение 1 относится к случаю $\mu = 0$, сечение 2 — к случаю $\mu > 0$. При $\mu > 0$ образуется гриб m, аналогично тому как это происходит в $2D$-геометрии [40].

Дуга шляпки гриба am прочерчивает желобок вдоль арки JSJ при движении точки a вдоль арки. В случае решетки $4m$ четыре таких желобка спускаются к вершине J с четырех сторон. В горизонтальном сечении эти желобки располагаются возле концов четырехлучевой звезды, показанной на рис. 4*в*. Желобки оканчиваются около тороидального гриба, которым увенчана вершина J. Таким образом, ситуация довольно далека от картины струи, осесимметричной относительно вертикали, проходящей через вершину J.

Желобки и тор хорошо просматриваются на рис. 7. Грибовидное образование начинается около седла S и тянется в виде желобка к вершине J. Желобки, как и должно быть, прилегают к стенке «трубы» (к границе расчетной области), поскольку арка JSJ лежит в плоскости этой стенки.

7. СРАВНЕНИЕ РЕШЕТОК

Сравним решетки $6m$, $4m$ и $3m$. Разложим их потенциалы по комбинациям единичных волновых векторов и их обертонам (3.1), (3.2). Тогда в параболическом приближении (разд. 4) скорости подъема пузырей в решетках $6m$, $4m$ и $3m$ одинаковы как при РТН, так и при РМН. При РТН получается, что как линейная стадия (равенство инкрементов при $k = 1$), так и весь процесс перехода (система (4.17)) у этих решеток одинаковы. Линейная стадия РМН определяется не только волновыми векторами, но и начальными скоростями. Если стартовать с плоской границы и выбрать равные начальные скорости, то, как и при РТН, и линейная, и нелинейная стадии будут одинаковыми во всех трех решетках. Это следует из результатов п. 4.5, 4.6.

Сравним решетки в другом отношении. При одинаковом волновом числе k в решетках $6m$, $4m$ и $3m$ на один пузырь в плоскости x, y приходится площадка площадью соответственно

$$S_6 = \frac{8\pi^2}{\sqrt{3}\,k^2}, \qquad S_4 = \frac{4\pi^2}{k^2}, \qquad S_3 = \frac{4\pi^2}{\sqrt{3}\,k^2},$$

см. рис. 1–3. Эти площади не равны, $S_6 : S_4 : S_3 = (2/\sqrt{3}) : 1 : (1/\sqrt{3}) \approx 1.15 : 1 : 0.577$. Существенно то, что площадь треугольной ячейки значительно отличается от примерно равных площадей квадратной и гексагональной ячеек.

Потребуем, чтобы в сравниваемых решетках площади пузырей были одинаковыми (условие равного числа пузырей на единицу площади). Тогда волновые числа относятся как

$$k_6 : k_4 : k_3 = \sqrt{\frac{S_6}{S_4}} : 1 : \sqrt{\frac{S_3}{S_4}} = \frac{\sqrt{2}}{3^{1/4}} : 1 : \frac{1}{3^{1/4}} \approx 1.07 : 1 : 0.76.$$

При этом $\lambda_6 : \lambda_4 : \lambda_3 = k_6^{-1} : k_4^{-1} : k_3^{-1} \approx 0.93 : 1 : 1.3$. В таком же отношении находятся радиусы R_6, R_4 и R_3 при РТН и РМН. По темпу переходного процесса решетки располагаются в порядке 6, 4, 3, т. е. медленнее всего протекает переход в треугольной решетке. Зато предельная скорость пузырей в решетке $3m$ наибольшая. Эти скорости относятся как

$$w_6 : w_4 : w_3 = (S_4/S_6)^{1/4} : 1 : (S_4/S_3)^{1/4} = \sqrt{\lambda_6} : \sqrt{\lambda_4} : \sqrt{\lambda_3} =$$

$$= (3^{1/8}/2^{1/4}) : 1 : 3^{1/8} \approx 0.97 : 1 : 1.15$$

при РТН (4.18) и как $\lambda_6 : \lambda_4 : \lambda_3$ при РМН (4.19).

Сравнивая результаты, приходим к выводу о том, что решетки $6m$ и $4m$ пузырей примерно эквивалентны (различие в предельной скорости не превышает нескольких процентов), а решетка $3m$ стоит особняком. Ей соответствует самая мощная система струй J (п. 5.2), а скорости пузырей превышают скорости в других решетках на 15% в случае РТН и на 30% в случае РМН.

8. ВЫДЕЛЕННОСТЬ ТРЕХЛУЧЕВЫХ СТРУЙ

Выше рассмотрена $3D$-структура поверхности η. Ее основные элементы — пузыри и струи. Пузыри округлы и изолированы, а струи состоят из протяженных участков (пристеночных или стенкообразных струй), образующих сеть, и узлов, в которых пересекаются стенкообразные струи. Тип периодичности определяет число стенкообразных струй N_r, пересекающихся в узле, и отношение числа пузырей к числу струй N_B/N_J.

Рассмотрим случайную поверхность, возникающую при $3D$-турбулентности. Структурно она состоит из тех же элементов (изолированных пузырей, стенкообразных и узловых струй, см. рис. 12). Правда, дальний порядок уступает место ближнему, как это имеет место при переходе от кристалла к жидкости. Посмотрим, чему равно число N_r. Это позволит выяснить, к какой из решеток топологически ближе случайная поверхность.

Довольно ясно, что преобладают узлы с $N_r = 3$. Действительно, любой пузырь стеснен соседями. Смежные пузыри разделены границей — стенкообразной струей. Ее положение определяется в основном двумя соседями, например, пузырями 1 и 2, см. рис. 12. Пойдем вдоль границы. В некоторой точке станет существенным влияние третьего соседа. Здесь граница, разделявшая пузыри 1 и 2, разветвится. Одна ветвь пойдет между пузырями 1 и 3, а другая — между пузырями 2 и 3. Поэтому типично значение $N_r = 3$. При этом отношение N_B/N_J находится между величинами 0.5 и 1, соответствующими решеткам $6m$ и $4m$ пузырей.

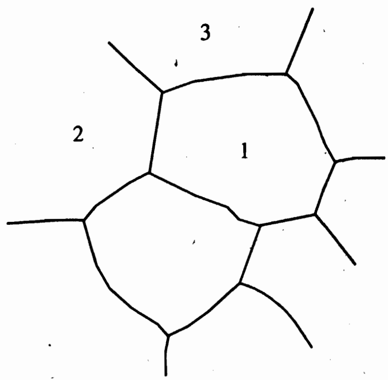


Рис. 12. Случайная совокупность пузырей. Каждый пузырь ограничен стенкообразной струей. Типичными являются узлы с $N_r = 3$

9. ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ РЕШЕТКИ. ЧЕТЫРЕХМЕРНОЕ ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО

9.1. *Потенциал и граница.* Применим модель Лэйцера к решетке $2m$. Оборванный на двух гармониках потенциал (3.1) (см. также п. 5.3 и формулу (5.2)) имеет вид

$$\varphi(x,y,z,t) = -\frac{\hat{a}(t)}{2}\cos x\, e^{-z} - \frac{\hat{b}(t)}{2q}\cos qx\, e^{-qz}, \tag{9.1}$$

разложение границы в вершине пузыря[9] имеет вид

$$\eta(x,y,t) = \eta_0(t) - \frac{Kx^2}{2} - \frac{Qy^2}{2}.$$

9.2. *Разложения.* Будем действовать как в п. 4.2–4.4. Теперь координаты x^2, y^2 входят в выражения по отдельности, а не в виде суммы (4.4). Вычислим $\varphi_t|, u|, v|, w|$ и η_x, η_y. Приведем наиболее существенные моменты. Продифференцируем (9.1) по t. Рассмотрим φ_t на границе. Имеем

$$\varphi_t| = -\frac{d\hat{a}}{dt}\exp(-\eta_0)\frac{\cos x}{2}\, e^{-\Delta\eta} - \frac{d\hat{b}}{dt}\exp(-q\eta_0)\frac{\cos qy}{2q}\, e^{-q\,\Delta\eta}, \tag{9.2}$$

где $\Delta\eta = \eta - \eta_0 = -(Kx^2 + Qy^2)/2$. Введем обозначения

$$A(t) = \hat{a}(t)\exp[-\eta_0(t)], \qquad B(t) = \hat{b}(t)\exp[-q\eta_0(t)]. \tag{9.3}$$

Заменим производные $d\hat{a}/dt$, $d\hat{b}/dt$ в (9.2) через $\dot{A}$, $\dot{B}$. Для этого продифференцируем (9.3). Имеем

$$\frac{d\hat{a}}{dt}\exp(-\eta_0) = \dot{A} + A\,\dot{\eta}_0, \qquad \frac{d\hat{b}}{dt}\exp(-q\eta_0) = \dot{B} + qB\,\dot{\eta}_0. \tag{9.4}$$

[9] Можно применить данный подход также к вершине J и седлам S_s, S_w, см. п. 5.3. В этих точках, также как в точке B, линейные члены выпадают и разложение границы η начинается с квадратичных членов.

Вычислим $\dot{\eta}_0$. С этой целью запишем кинематическое условие (2.1) в вершине. Имеем $\eta_t = \dot{\eta}_0 = w|$. Подставляя (9.1), получаем

$$\dot{\eta}_0 = (A+B)/2. \tag{9.5}$$

Подставляя (9.5) в (9.4), находим

$$\frac{d\hat{a}}{dt}\exp(-\eta_0) = \frac{2\dot{A}+A^2+AB}{2}, \quad \frac{d\hat{b}}{dt}\exp(-q\eta_0) = \frac{2\dot{B}+qAB+qB^2}{2}. \tag{9.6}$$

Разлагая (9.2) по малым x^2, y^2, с учетом (9.6) находим

$$\varphi_t| = -\frac{2\dot{A}+A^2+AB}{4}\,\frac{(K-1)x^2+Qy^2}{2} - \frac{2\dot{B}+qAB+qB^2}{4q}\,\frac{qKx^2+q(Q-q)y^2}{2}.$$

Несущественные однородные по x, y функции t опущены.

Аналогично

$$\varphi_z| = \frac{A+B}{2} + \frac{(KA-A+qKB)x^2+(QA+qQB-q^2B)y^2}{4}.$$

9.3. *Краевые условия и динамическая система.* Подставляя разложения п. 9.2 в краевые условия (2.1), (2.2), приходим к четырехмерной динамической системе

$$\dot{K} = (1-3K)a - qKb, \tag{9.7}$$

$$\dot{Q} = -Qa + q(q-3Q)b, \tag{9.8}$$

$$(1-K)\dot{a} - K\dot{b} = -a^2 + gK, \tag{9.9}$$

$$-Q\dot{a} + (q-Q)\dot{b} = -q^2b^2 + gQ \tag{9.10}$$

для неизвестных K, Q и амплитуды $a = A/2$, $b = B/2$. При $Q = 0, b = 0$ или $K = 0, a = 0$ возвращаемся к плоской ($2D$) системе [13, 15], а при $q = 1, K = Q, a = b$ к системе (4.17). Перекрестными членами, связанными с взаимодействием волн по x и y направлениям, являются qKb в (9.7) и $K\dot{b}$ в (9.9).

Отметим симметрию $x \leftrightarrow y$. Запишем φ, η при произвольном волновом числе k. Потенциал имеет вид

$$\varphi = -\frac{\hat{a}}{2k}\cos kx\, e^{-kz} - \frac{\hat{b}}{2qk}\cos qkx\, e^{-qkz}.$$

Выведем уравнения системы. При инверсии $k \to qk, q \to 1/q$ (поворот прямоугольника на 90^0) уравнения остаются инвариантными при замене $K \to Q, Q \to K$ и $a \to b, b \to a$ (смена осей).

Система (9.7)–(9.10) допускает полное исследование. Ее фазовое пространство аналогично пространству системы (4.17). Опять имеется единственный узел, захватывающий все имеющие физический смысл траектории. Покажем это.

9.4. *РТН.* Пусть $g = 1$. Найдем стационарное решение. Положим $\dot{K} = \dot{Q} = \dot{a} = \dot{b} = 0$. Исключим неизвестные $a > 0, b > 0$ с помощью уравнений (9.9), (9.10) и Q с помощью уравнений (9.7), (9.8). В результате приходим к уравнению для K. Оно имеет вид

$$8K^2 - \left[6 + (q-1)/3\right] K + 1 = 0.$$

Сопоставляя со случаем квадрата $q = 1$, находим, что физический смысл имеет только корень

$$K_0(q) = (q + 17 - r)/48, \qquad r = +\sqrt{q^2 + 34q + 1}. \tag{9.11}$$

Остальные искомые функции даются выражениями

$$Q_0(q) = \frac{q-1}{3} + K_0(q), \quad a_0(q) = +\sqrt{K_0(q)}, \quad b_0(q) = +\frac{\sqrt{Q_0(q)}}{q}. \tag{9.12}$$

Стационар (9.11), (9.12) единственный в имеющей физический смысл области.

Исследуем устойчивость[10]. Линеаризуем систему (9.7)–(9.10) около стационара

$$K = K_0 + \delta K\, e^{\lambda t}, \;\; Q = Q_0 + \delta Q\, e^{\lambda t}, \;\; a = a_0 + \delta a\, e^{\lambda t}, \;\; b = b_0 + \delta b\, e^{\lambda t}.$$

Линеаризация приводит к матрице

$-\lambda - 3a_0 - qb_0$	0	$1 - 3K_0$	$-qK_0$
0	$-\lambda - a_0 - 3qb_0$	$-Q_0$	$q^2 - 3qQ_0$
1	0	$-(1-K_0)\lambda - 2a_0$	$K_0\lambda$
0	1	$Q_0\lambda$	$-(q-Q_0)\lambda - 2q^2b_0$

для собственных чисел $\lambda_1(q) \div \lambda_4(q)$. При $q = 1$ детерминант матрицы (характеристическое уравнение) имеет вид $2\lambda^4 + 14\lambda^3 + 35\lambda^2 + 36\lambda + 12 = 0$. С корнями $\lambda_{1,2} = (-6 \pm 2\sqrt{3})/4$ и $\lambda_{3,4} = -2$. Устойчивость системы (4.17) очевидна из анализа фазовой плоскости. Линеаризация уравнений (4.17) приводит к системе $(\lambda + 2)\,\delta K = 0$, $2\,\delta K - (\lambda + 2)\,\delta a = 0$, имеющую вырожденный корень -2. При $q \neq 1$ коэффициенты характеристического уравнения — громоздкие функции отношения сторон прямоугольной ячейки q (рис. 1). Из расчетов этого уравнения следует, что на отрезке $0 < 1/q < 1$ корни $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ и $\Re\lambda_3 < 0, \Re\lambda_4 < 0$. Корни λ_3, λ_4 вырождены при $q = 1$. Они становятся действительными, разными и отрицательными около $1/q = 0$.

Проанализируем полученные результаты. Доказано, что стационар S (9.11), (9.12) устойчив (узел). Проекция четырехмерного фазового пространства системы (9.7)–(9.10) на плоскость K, Q представлена на рис. 13. Рассмотрим матрицу G коэффициентов при производных $\dot{K}, \dot{Q}, \dot{a}, \dot{b}$ этой системы. Ее детерминант дается выражением $K + Q/q = 1$. На поверхности $\det G = 0$ ускорения $\dot{a}, \dot{b}$ обращаются в бесконечность [13, 15]. Проекция поверхности отмечена буквой G на рис. 13. Поверхность G ограничивает физическую

[10] Отметим, что в случае высокосимметричных решеток (разд. 4) исследование устойчивости РТ- и РМ-стационаров не требуется. Оно очевидно из структуры фазового пространства. Наоборот, в случае $2m$ исследование устойчивости позволяет описать эту структуру.

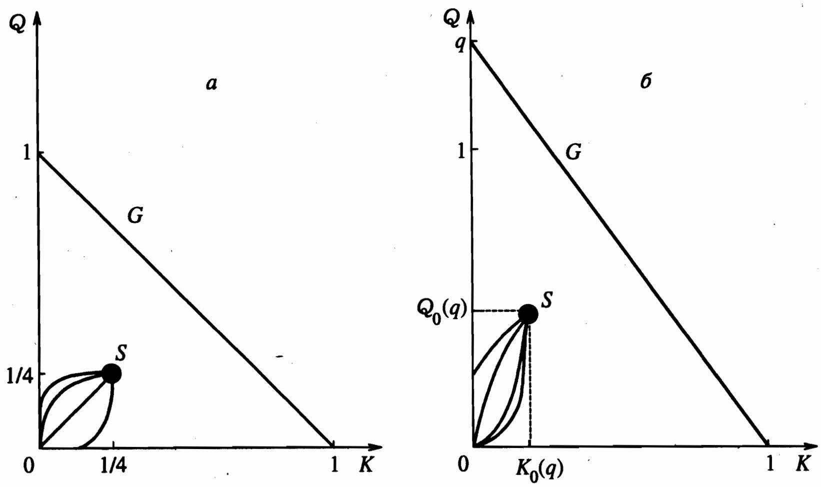


Рис. 13. Фазовое пространство и траектории. Точка S — стационар (узел), притягивающий траектории, отправляющиеся от слабо возмущенных начальных данных: *а* — $q = 1$, *б* — $q > 1$

область. Физические траектории стартуют из центра $K = Q = 0$ (если при $t = 0$ граница плоская) и его окрестности. При $t \to \infty$ все они заканчиваются в узле S.

Случай $q = 1$ показан на отдельном рис. 13*а*. Как видим, пузыри с симметрией $2m$ при $t \to \infty$ повышают симметрию и превращаются в пузыри с симметрией $4m$. К симметричному случаю ($q = 1$ и $a(0) = b(0)$, $K(0) = Q(0)$) с двумерным фазовым пространством (4.17) $K = Q, a = b$ на рис. 13*а* относятся траектории, проходящие по биссектрисе $K = Q$.

Зависимости кривизны по длинному направлению K ($q > 1$, см. рис. 1) и скорости подъема пузырей w от $1/q$ показаны на рис. 14. Кривые *1* — расчет по формулам (9.11), (9.12) ($w = a + b$), кривые *2* — асимптотики, пригодные при $q \gg 1$ (течение в щели). В щелеобразном прямоугольнике течение выходит на $2D$-режим. Доминирует движение по длинной стороне. При этом $K \approx 1/3$, $Q \approx 1/3q$, $w \approx 1/\sqrt{3} + 1/\sqrt{3q}$. Решения (9.11), (9.12), разумеется, не пригодны при малых $1/q$ (необходим учет дополнительных гармоник по оси x). Кривые, интерполирующие зависимости *1* и *2* в переходной области, помечены цифрой *3*.

9.5. *РМН.* Пусть $g = 0$. Отыщем стационар и исследуем его устойчивость. При РМН в стационаре $K = K_0$, $Q = Q_0$, $a = \alpha_0/t$, $b = \beta_0/t$ [13, 15, 17]. Подставляя эти соотношения в систему (9.7)–(9.10), приходим к алгебраической системе

$$(1 - 3K_0)\alpha_0 = qK_0\beta_0, \quad Q_0\alpha_0 = q(q - 3Q_0)\beta_0,$$

$$-(1 - K_0)\alpha_0 + K_0\beta_0 = -\alpha_0^2, \quad Q_0\alpha_0 - (q - Q_0)\beta_0 = -q^2\beta_0^2$$

для неизвестных K_0, Q_0, α_0 и β_0. Исключая последовательно неизвестные β_0, α_0 и затем Q_0, получаем уравнение

$$24(3 - q)K_0^3 + (q^2 + 46q - 75)K_0^2 + 2(13 - 11q)K_0 + 3(q - 1) = 0 \tag{9.13}$$

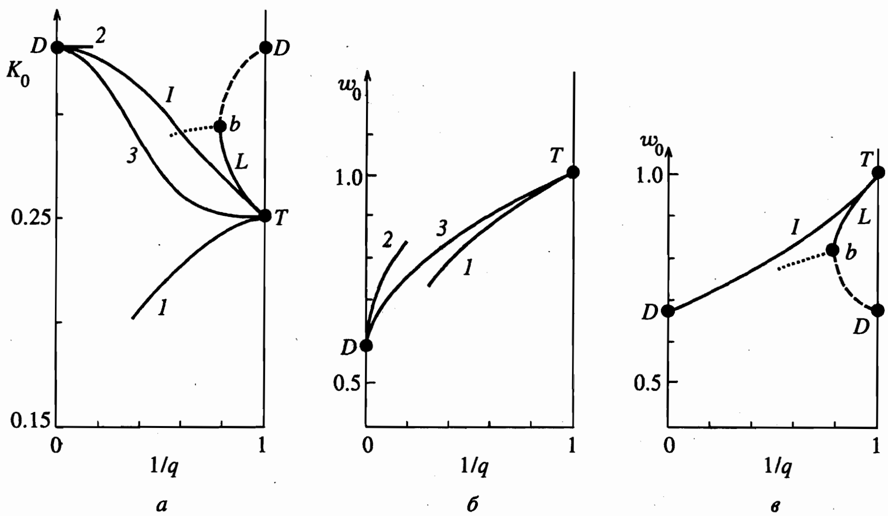


Рис. 14. Зависимости кривизны K и скорости w от отношения сторон прямоугольника q. Кривые *1, 2* и *3* — РТН (рис. *а, б*), Кривая *2* (на рис. *а*), точка D (на рис. *а, в*) и кривые L, I — РМН (рис. *а, в*)

для $K_0(q)$. Правильный корень отбирается из условия $K_0(1) = 1/4$ (см. (4.19)). Пусть $K_0(q)$ — данный корень. Остальные функции выражаются через него. Имеем

$$Q_0 = \frac{1-3K_0}{3-8K_0}q, \quad \alpha_0 = 1 - \frac{1}{q} + \left(\frac{3}{q} - 1\right)K_0, \quad \beta_0 = \frac{1-3K_0}{qK_0}\alpha_0, \quad w_0 = \alpha_0 + \beta_0. \quad (9.14)$$

Графики функций $K_0(q)$ и $w_0(q)$ приведены на рис. 14 (кривые L). Кривые L оканчиваются в точках b с $q \approx 1.26$. В этой точке сливаются два корня уравнения (9.13). Действительная часть решения $(\Re K_0, \Re w_0)$ после слияния показана точками. При этом мнимая часть составляет небольшую ($\simeq 0.1$) долю от действительной части. Кривые L начинаются из точки T, относящейся к случаю квадратной решетки. Интересно, что другая ветвь (Db) выходит при $q = 1$ из точки D, соответствующей плоскому ($2D$) решению. При $q \neq 1$ ей соответствуют пузыри с небольшим движением по оси y. Интерполяционная кривая I соединяет асимптотики, соответствующие щели (точка D), и решение L в промежуточной области. Отметим, что зависимости $K(q)$, относящиеся к РТН (кривая *3*) и РМН (кривая *I*), имеющие одинаковые концы при $1/q = 0, q = 1$, в промежуточной области различны.

Покажем, что стационар (9.13), (9.14) устойчив. Рассмотрим возмущение

$$K = K_0 + \delta K\, t^\lambda, \quad Q = Q_0 + \delta Q\, t^\lambda, \quad a = \frac{\alpha_0 + \delta\alpha\, t^\lambda}{t}, \quad b = \frac{\beta_0 + \delta\beta\, t^\lambda}{t}.$$

Линеаризуем систему (9.7)–(9.10) около него. Матрица M для собственных чисел λ имеет вид

$-\lambda-3\alpha-q\beta$	0	$1-3K$	$-qK$
0	$-\lambda-\alpha-3q\beta$	$-Q$	q^2-3qQ
$\alpha+\beta$	0	$(1-K)(\lambda-1)+2\alpha$	$K(1-\lambda)$
0	$\alpha+\beta$	$Q(1-\lambda)$	$(q-Q)(\lambda-1)+2q^2\beta.$

Здесь для краткости индексы 0 у стационарных функций опущены. Из расчетов чисел λ следует, что на отрезке, занятом кривой L с концевыми точками T и b $(1<q<1.26)$, все собственные числа различны и отрицательны[11]. Следовательно, имеется степенное затухание возмущений и стационар (9.13), (9.14) устойчив. Отметим, что на ветке Db, показанной штрихами на рис. 14*а*, *в*, имеется одно положительное собственное число λ, указывающее на неустойчивость этого стационара.

Как и при РТН, траектории системы (9.7)–(9.10) в случае $g=0$ соединяют окрестность центра $K=Q=0$ и узел S. Качественно структура фазового пространства аналогична показанной на рис. 13. В частности, при $q=1$ и несимметричных начальных данных ($a(0)\neq b(0)$) при $t\to\infty$ происходит повышение симметрии ($2m\to 4m$). Двумерное фазовое пространство квадратной решетки (п. 4.5, 4.6) находится на биссектрисе $K=Q$, $a=b$ четырехмерного фазового пространства системы (9.7)–(9.10).

10. ОДНОПАРАМЕТРИЧНОСТЬ РЭЛЕЙ-ТЕЙЛОРОВСКИХ СТАЦИОНАРОВ

Выше исследована нестационарная стадия. Показано, что в процессе эволюции рост возмущений насыщается и слабо возмущенное состояние трансформируется в стационарное (предельное). В силу этого теория стационаров важна. Рассмотрим ее в случае РТН. Главным свойством является однопараметричность ($1d$) стационаров [41–43, 24]. Благодаря ей, удается построить количественную теорию стационаров [24].

10.1. *Однопараметричность в $2D$-геометрии.* Рассмотрим потенциальное обтекание внешним потоком профиля $z=\eta(x)$, изображенного на рис. 15*а* (кривая *1*). Профиль находится в полосе $0<x<\pi$. При $z\to+\infty$ задана скорость набегающего потока $w_\infty=1$. Функция $\eta(x)$ монотонно убывает и $\eta\to-\infty$ при $x\to\pi$. Форма профиля $\eta(x)$ фиксирует потенциал течения $f(\xi=x+iz)$. Вместе с потенциалом определяется распределение давления на границе профиля $p_\eta(x)=p[x,z=\eta(x)]$. Положение точки на этой границе задается как координатой x, так и координатой z. Поэтому распределение давления можно представить и в виде функции $p_\eta(z)$. Итак, профиль η определяет распределение $p_\eta(z)$ $(\eta\to p_\eta)$.

В обратном случае задается функция $p_\eta(z)$ (по-прежнему $w_\infty=1$). Между функциями $p_\eta(z)$ и $\eta(x)$ имеется (по крайней мере локально) взаимно-однозначное соответствие. Поэтому задание $p_\eta(z)$ фиксирует потенциал $f(\xi)$ и форму $\eta(x)$ $(p_\eta\to\eta)$.

---

11) Например, при $q=1$ имеем $\det M=2\lambda^4+10\lambda^3+17\lambda^2+11\lambda+2=0$ с собственными числами $-1,-2,(-4\pm 2\sqrt{2})/4$. Линеаризация (4.17) дает систему $(\lambda+2)\delta K=0$, $2\delta K+(\lambda+1)\delta a=0$ с корнями $\lambda_1=-1$ и $\lambda_2=-2$. При $q\neq 1$ характеристическое уравнение $\det M=0$ чрезвычайно громоздко.

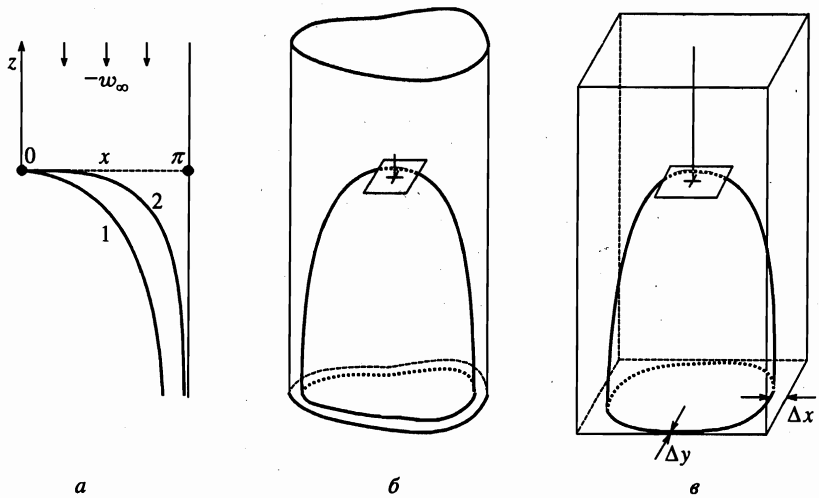


Рис. 15. Однопараметрические семейства пузырей. *а* — $2D$-случай, *б, в* — $3D$-случай

Рассматривается динамика тяжелой жидкости со свободной поверхностью в однородном поле тяжести. В связи с этим нас интересует только частный класс распределений $p_\eta(z)$, состоящий из линейных распределений

$$p_\eta(z) = gz \tag{10.1}$$

с $g > 0$. Имеется единственный параметр g, пробегающий класс (10.1). Распределениям (10.1) соответствует однопараметрический класс потенциалов $f(\xi; g)$ и профилей $\eta(x; g)$. Все они являются решениями задачи о стационарном подъеме пузыря с границей $\eta(x; g)$, поскольку эта граница есть линия тока и на ней в силу (10.1) и уравнения Бернулли выполняется условие $(u^2 + w^2)| = -2g\eta$.

Следовательно, задача о стационарных РТ-пузырях имеет $1d$-семейство решений. На рис. 15*а* показаны два пузыря из этого семейства (кривые *1* и *2*), соответствующие значениям g_1 и $g_2 > g_1$.

Ясно, что вместо g параметром может быть скорость w_∞. Действительно, зафиксируем форму некоторого профиля $\eta(x; g_f)$ из класса (10.1). При фиксированной форме η вариация g (давление отсчитывается от давления в вершине профиля) приводит к вариации w_∞. Более затупленный пузырь (кривая *2* на рис. 15*а*) имеет меньшую скорость подъема w_∞.

Наличие однопараметрического семейства решений в задаче о тяжелой жидкости хорошо известно из теории гравитационных волн [44].

10.2. *Однопараметричность в* $3D$*-геометрии.* Из тех же простых соображений следует, что однопараметричность имеется и в $3D$-случае. Покажем это. Рассмотрим потенциальное обтекание профиля $\eta(x, y)$ в вертикальной трубе произвольного сечения (рис. 15*б, в*). Пусть $w_\infty = 1$. Потенциал $f(x, y, z)$ и распределение давления $p_\eta(x, y)$ на границе фиксируются формой профиля $\eta(x, y)$ $(\eta \to p_\eta)$.

Представим функцию $p_\eta(x, y)$ в виде эквивалентной ей функции $p_\eta(z, \theta)$, где θ — азимутальный угол, лежащий в горизонтальной плоскости. Профили η имеют точку торможения. Она отмечена крестиком на рис. 15*б, в*. Будем называть ее вершиной пузыря B. К задаче о тяжелой жидкости имеет отношение случай, в котором точка B наивысшая на профиле. Соответственно, касательная плоскость в этой точке горизонтальна. Линия тока, входящая в вершину, перпендикулярна касательной плоскости. Крест на рис. 15*б, в* указывает направления главных кривизн K и Q.

В обратном случае задается функция $p_\eta(z,\theta)$. Она определяет потенциал $f(x,y,z)$ и форму $\eta(x,y)$.

Однородному гравитационному полю соответствует частный класс функций $p_\eta(z,\theta)$. В нем эти функции изотропны и линейны:

$$p_\eta(z,\theta) = gz. \tag{10.2}$$

Это простое следствие теоремы Бернулли, которую необходимо применить к линиям тока, выходящим из вершины, и контурам, которые получаются в горизонтальных срезах поверхности η. С классом (10.2) связано $1d$-семейство потенциалов и пузырей, которые можно представить и в виде $f(x,y,z;g), \eta(x,y;g)$, и в виде $f(x,y,z;w_\infty), \eta(x,y;w_\infty)$.

Пусть параметром является w_∞. Как и в $2D$-случае (ср. кривые *1* и *2* на рис. 15*а*), пузырь с малым значением w_∞ является более затупленным (кривизны K и Q меньше) и имеет более тонкую пристеночную струю (рис. 15*б, в*)[12)].

Разнообразие сечений труб больше в $3D$-геометрии. В $2D$-случае трубой является полоса или щель, ограниченная двумя параллельными стенками, перпендикулярными плоскости x, z, см. рис. 15*а*. В $2D$-случае пузыри имеют форму валов, перпендикулярных плоскости рисунка, а в $3D$-случае — форму «пальцев», окруженных пристеночными струями. Частные случаи труб общего вида соответствуют трубам с симметричными сечениями, которые могут быть основой паркетного покрытия (разд. 3, рис. 1–6, 15*в*). В этих случаях потенциалы даются рядами (3.1), (3.2), а углы и стенки труб представляют собой симметричные вертикали и плоскости (п. 3).

11. ИСТИННЫЙ СТАЦИОНАР И ОДНОПАРАМЕТРИЧНОСТЬ

Параболическое приближение ($N = 1$, разд. 1) оказывается довольно простым (разд. 4, 9). Благодаря этому, удается аналитически описать структурные эффекты, связанные с $3D$-геометрией (разд. 5–7). Интереснейшая проблема заключается в распространении этого подхода на старшие аппроксимации ($N > 1$). При $N = 1$ система совершает переход из начального слабо возмущенного состояния I в стационар S ($I \to S$; разд. 4, 5, 9). При этом траектория $I \to S$ минует поверхность G (рис. 13). Анализ аналогичных (4.17) систем старшего порядка наталкивается на трудности. Оказывается, при $N > 1$ траектории, стартующие из состояний I, перехватываются поверхностью G [13, 15]. Подойдем к проблеме с другой стороны. Рассмотрим стационары и траектории возле них. На этом пути удается получить важные результаты.

Нульпараметрические решения. Анализ окрестности стационаров требует отыскания стационарных точек и исследования их устойчивости. Рассмотрим вопросы поиска стационаров. В качественном отношении положение дел в $2D$- и $3D$-случаях совершенно

[12)] Напомним, что рассматривается предельный случай ($t \gg 1/\sqrt{gk}$), когда седла S_s, S_w и вершины J удаляются на большие расстояния от вершины B. Отношение толщин Δ_x/Δ_y пристеночных струй обсуждается в п. 5.3.

одинаково [28, 29, 17]. В высших приближениях в $2D$-геометрии имеем

$$\eta = \sum_{n=1}^{N} K_n x^{2n}, \quad f(\xi) = \varphi + i\psi = -\sum_{n=1}^{N} a_n \left(\frac{e^{in\xi}}{n} - i\xi\right), \xi = x + iz. \tag{11.1}$$

Стационарами являются решения алгебраических систем

$$\psi_\alpha(K_1, \ldots, K_N, a_1, \ldots, a_N) = 0, \quad p_\alpha(K_1, \ldots, K_N, a_1, \ldots, a_N) = 0, \tag{11.2}$$

где $\alpha = 1, \ldots, N$. При $N = 1$ система (11.2) для неизвестных K_n, a_n (11.1) принимает вид $\psi_1 = 1 - 3K_1 = 0$, $p_1 = a_1^2 - K_1 = 0$. Она аналогична уравнениям $\psi_1 = 1 - 4K_1 = 0$, $p_1 = a_1^2 - 4K_1 = 0$, которые получаются из системы (4.17) ($g = 1; 6m, 4m$) при $\dot{K}_1 = 0$, $\dot{a}_1 = 0$.

При $N \leq 6$ системы (11.2) решаются точно [45]. Пусть индекс i пробегает корни системы (11.2) $(K_N, a_N)^i$ в N-м приближении, $K_N = \{K_1, \ldots, K_N\}$, $a_N = \{a_1, \ldots, a_N\}$. Показано [17], что из набора корней $\{i\}$ в каждом порядке по N при $N \leq 6$ физически корректным является не более чем один корень. Обозначим его

$$(K_N, a_N)^{0d}. \tag{11.3}$$

Была написана программа численного решения системы (11.2) ньютоновскими итерациями. Оказалось, что расстояния между корнями (11.3) из разных порядков по N значительно больше радиуса сходимости итераций. Оказалось также, что итерации не позволяют подняться по порядку аппроксимации N в значения $N > 6$, используя корни с $N \leq 6$ как исходное приближение.

Однопараметрические решения. Интересный подход к проблеме стационаров связан с использованием свойства однопараметричности. Качественному доказательству однопараметричности посвящен разд. 10. Проанализируем ее количественно. Однопараметрические решения описываются разложениями

$$\eta = \sum_{n=1}^{N} K_n x^{2n}, \quad f(\xi) = -\sum_{m=1}^{M} a_m \frac{e^{im\xi}}{m} + iw_\infty \xi, \tag{11.4}$$

где N — порядок аппроксимации граничных условий. Спектральное разложение (11.4) имеет нужную асимптотику при $z \to +\infty$. Важным является соотношение

$$M = N + 1, \tag{11.5}$$

связывающее число гармоник $1d$-решения (11.4) и порядок аппроксимации. Система $2N + 1$ уравнений, которым удовлетворяют неизвестные $K_1, \ldots, K_N, a_1, \ldots, a_N, a_M$, имеет вид

$$\begin{gathered} \psi_\alpha(K_1, \ldots, K_N, a_1, \ldots, a_N, a_M) = 0, \\ p_\alpha(K_1, \ldots, K_N, a_1, \ldots, a_N, a_M) = 0, \\ a_1 + \ldots + a_N + a_M = w_\infty, \quad \alpha = 1, \ldots, N, \end{gathered} \tag{11.6}$$

где номер последней учитываемой в данном порядке N амплитуды Фурье дается формулой (11.5), из функций ψ_α, p_α параметр w_∞ исключен с помощью последнего уравнения в системе (11.6). Условие наличия нужной точки торможения в вершине $\xi = 0$ добавляет уравнение $\sum a_m = w_\infty$ в систему (11.6). Как и должно быть (разд. 10), решения уравнений (11.6) являются функциями

$$K_1(w_\infty), \dots, K_N(w_\infty), a_1(w_\infty), \dots, a_N(w_\infty), a_M(w_\infty) \qquad (11.7)$$

от параметра. Будем называть кривые (11.7) однопараметрическими или $1d$-решениями, а решение в виде точки (11.3) нульпараметрическим или $0d$-решением.

Была составлена программа итеративного решения системы (11.6). В противоположность случаю (11.2) оказалось, что итерации сходятся быстро. Это открывает путь отыскания $0d$-точек при помощи $1d$-кривых.

Отношение $0d$*-решений к* $1d$*-решениям.* Сравним системы (11.2) и (11.6), (11.5) и их решения (11.3) и (11.7) при одинаковых N. Как сказано, $1d$-решения (11.7) есть функции от w_∞. В частности, функцией от w_∞ является последняя амплитуда a_M. Оказывается, существует такое значение параметра w_∞^{0d}, при котором

$$a_M(w_\infty^{0d}) = 0. \qquad (11.8)$$

Пусть

$$K_1^{0d}, \dots, K_N^{0d}, a_1^{0d}, \dots, a_N^{0d}, a_M^{0d} = 0 \qquad (11.9)$$

— решение (11.7) при w_∞^{0d}. Видим, что оно принадлежит кривой (11.7).

Сопоставим уравнения (11.2) и (11.6). Подставим решение (11.9) без a_M^{0d} в систему (11.2) того же порядка. Легко видеть, что (11.9) дает решение системы (11.2) вида (11.3).

Сказанное позволяет обойти трудность с отсутствием сходимости итеративного решения системы (11.2), поскольку система (11.2) и система (11.6) без последней амплитуды a_M и без последнего уравнения $\sum a_m = w_\infty$ одинаковы. А именно, итеративно строится $1d$-кривая решений (11.7) системы (11.6). На ней отыскивается точка (11.8). Эта точка и является $0d$-точкой в данном порядке по N. Таким методом были найдены следующие $0d$-точки: $R(N = 1) = 3$, $R(N = 3) = 2.57$, $R(N = 6) = 2.556$, $R(N = 8) = 2.4445$, где R — радиус кривизны в вершине пузыря.

На рисунке 16*а* для некоторого порядка N изображена $1d$-кривая (11.7) и точка $0d$ (11.3), (11.8), (11.9), лежащая на ней. Обозначено $\mathbf{K} = K_1, \dots, K_N$, ; $\mathbf{a}_M = a_1, \dots, a_N, a_M$, $\mathbf{a}_N = a_1, \dots, a_N$, M-я компонента вектора $\mathbf{a}_N$ равна нулю. Проекция точки $0d$ на пространство $\mathbf{K}, \mathbf{a}_M$ лежит в плоскости $a_M = 0$. Проекции всех других точек с $1d$-кривой на это пространство, например, точки, помеченной на рис. 16*а* квадратиком, имеют $a_M \neq 0$.

Об истинных стационарах. Нетрудно понять, что только $0d$-точки являются истинными стационарами. Действительно, нестационарная система вида (4.17) в высших порядках принимает вид

$$\dot{K}_\alpha = \psi_\alpha(\mathbf{K}, \mathbf{a}_N), \qquad \sum_{\beta=1}^{N} G_{\alpha\beta}\dot{a}_\beta = p_\alpha(\mathbf{K}, \mathbf{a}_N), \qquad \alpha = 1, \dots, N, \qquad (11.10)$$

где правые части ψ_α, p_α те же самые, что и в системе (11.2) [13, 15]. Система (11.2) получается из уравнений (11.10) при $\dot{K} = 0, \dot{a} = 0$. Поэтому решение (11.3) является стационарной точкой системы (11.10). Асимптотически решения уравнений (11.10) стремятся

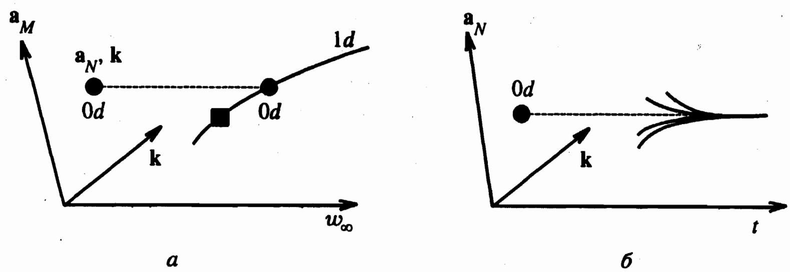


Рис. 16. *а*) Кривая $1d$ и точка $0d$ на ней. *б*) Эволюция системы при $t \to \infty$ может закончиться только в точке $0d$, сплошные кривые — траектории системы (11.10)

к предельным значениям (11.3), (11.8), (11.9), см. рис. 16*б*. При этом в асимптотике сумма $\sum^N a_n$ примет то значение (w_∞^{0d}), которое получится в этом пределе — нельзя требовать, чтобы это значение было отлично от w_∞^{0d}. Устойчивость $0d$-точки доказана при $N = 1$ (разд. 4, 9, [15, 18]). Видимо, $0d$-точки устойчивы при $N > 1$.

Повторим, что остальные точки с $1d$-кривой, например, квадратик на рис. 16*а*, не являются стационарами в данном порядке по N. Их нельзя исследовать на устойчивость. Если взять $1d$-решение (11.7), скажем квадратик, отбросить последнюю амплитуду a_M и подставить полученный таким образом укороченный набор $K_1, \ldots, K_N, a_1, \ldots, a_N$ в нестационарную систему (11.10), то правые части этих уравнений не будут равны нулю и, следовательно, в этой точке стационарности нет ($\dot K \neq 0$, $\dot a \neq 0$).

В этом отношении стационарные пузыри ($g = 1, \partial_t = 0$, краевые условия (2.1), (2.2)) качественно отличаются от стационарных гравитационных волн ($g = -1, \partial_t = 0$, краевые условия те же). В случае волн имеем

$$\eta = \sum_{n=1}^{N} K_n x^{2n}, \quad f(\xi) = i \sum_{n=1}^{N} a_n \frac{e^{in\xi}}{n} - w_\infty \xi,$$

амплитуды a_n действительны, жидкость находится при $z > \eta$. Аналогичная системе (11.6) система в случае волн имеет вид

$$\hat\psi_\alpha(K_1, \ldots, K_N, a_1, \ldots, a_N; w_\infty) = 0, \quad \hat p_\alpha(\ldots) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, N, \tag{11.11}$$

где крышки над ψ и p означают, что это другие функции аргументов, отличные от функций в (11.6). Существенно, что здесь нет дополнительного уравнения, связанного с точкой торможения, и поэтому нет дополнительной амплитуды a_M. Решения системы (11.11) являются функциями от параметра [44]:

$$\hat K_1(w_\infty), \ldots, \hat K_N(w_\infty), \quad \hat a_1(w_\infty), \ldots, \hat a_N(w_\infty). \tag{11.12}$$

Благодаря тому что в случае волн число нестационарных уравнений, аналогичных уравнениям (11.10), совпадает с числом функций (11.12), около каждой точки $1d$-кривой (11.12) может быть проведена линеаризация нестационарных уравнений.

Единственность $0d$*-стационара.* Важно подчеркнуть, что в каждом порядке по N имеется не более одной $0d$-точки. Следовательно, решение задачи об асимптотике РТ-пузырей является единственным.

Авторы выражают глубокую благодарность С. И. Анисимову и О. М. Белоцерковскому за внимание к работе. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-02-16666 и 97-01-00931) и программы поддержки ведущих научных школ (96-15-96448 и 96-15-96137).

Литература

1. А. М. Прохоров, С. И. Анисимов, П. П. Пашинин, УФН **119**, 401 (1976).
2. С. И. Анисимов, А. М. Прохоров, В. Е. Фортов, УФН **134**, 1000 (1983), **142**, 395 (1984).
3. M. M. Marinak, S. G. Glendinning, R. J. Wallace, B. A. Remington et al., Phys. Rev. Lett. **80**, 4426 (1998).
4. M. Herant and S. E. Woosley, Astrophys. J. **425**, 814 (1994).
5. W. Hillebrandt, Astrophys. J. **452**, 769, 779 (1995).
6. S. I. Anisimov, Ya. B. Zel'dovich, N. A. Inogamov, and M. F. Ivanov, in: *Shock waves, explosions and detonation,* ed. by J. R. Bowen, J.-C. Leyer, and R. I. Soloukhin, *Progress in Astronautics and Aeronautics Series* (M. Summerfield, editor-in-chief). Vol. **87**, AIAA, Washington, D. C. (1983), p. 218.
7. K. O. Mikaelian, Phys. Rev. Lett. **80**, 508 (1998).
8. S. I. Abarzhi, Phys. Rev. Lett. **81**, 337 (1998).
9. Q. Zhang, Phys. Rev. Lett. **81**, 3391 (1998).
10. V. N. Goncharov, Phys. Rev. Lett. **82**, 2091 (1999).
11. D. Layzer, Astrophys. J. **122**, 1 (1955).
12. R. M. Davies and G. I. Taylor, Proc. Roy. Soc. London Ser. A. **200**, 375 (1950).
13. Н. А. Иногамов, Письма в АЖ **20**(10), 754 (1994).
14. J. Hecht, U. Alon, and D. Shvarts, Phys. Fluids **6**, 4019 (1994).
15. Н. А. Иногамов, ЖЭТФ **107**, 1596 (1995).
16. U. Alon, J. Hecht, D. Ofer, and D. Shvarts, Phys. Rev. Lett. **74**, 534 (1995).
17. N. A. Inogamov, Laser and Particle Beams **15**, 53 (1997).
18. N. A. Inogamov, *Proc. of the 6th International Workshop on the Physics of Compressible Turbulent Mixing,* ed. by G. Jourdan, L. Houas, Institut Universitaire des Systemes Thermiques Industriels. Printed in France by Imprimerie Caractere, Marseille (1997), p. 208.
19. S. W. Haan, Phys. Fluids B **3**(8), 2349 (1991).
20. A. L. Velikovich and G. Dimonte, Phys. Rev. Lett. **76**(17), 3112 (1996).
21. R. Menikoff and C. Zemach, J. Comp. Phys. **51**, 28 (1977).
22. G. R. Baker and D. W. Moore, Phys. Fluids A **1**(9), 1451 (1989).
23. A. I. Dyachenko, E. A. Kuznetsov, M. D. Spector, and V. E. Zakharov, Phys. Lett. A **221**, 73 (1996).
24. Н. А. Иногамов, Письма в ЖЭТФ **55**, 505 (1992).
25. А. В. Шубников, *Симметрия*, Изд. АН СССР, М.Л. (1940).
26. А. В. Шубников, В. А. Копцик, *Симметрия в науке и искусстве,* Наука, Москва (1972).
27. Ю. И. Сиротин, М. П. Шаскольская, *Основы кристаллофизики,* Наука, Москва (1979).
28. С. И. Абаржи, Н. А. Иногамов, ЖЭТФ **107**(1), 245 (1995).
29. N. A. Inogamov and S. I. Abarzhi, Physica D **87**(1–4), 339 (1995).
30. Ю. М. Давыдов, М. С. Пантелеев, ПМТФ **1**(125), 117 (1981).
31. D. L. Youngs, Phys. Fluids A **3**, 1312 (1991).
32. X. L. Li, Phys. Fluids **8**, 336 (1996).
33. J. F. Haas, I. Galametz, L. Houas, G. Jourdan, and G. Rodriguez, Chocs, Num. **14**, 15 (1995).
34. А. Н. Алешин, С. Г. Зайцев, Е. В. Лазарева, В. Б. Розанов, Изв. РАН МЖГ **6**, 111 (1995).
35. M. D. Kamchibekov, E. E. Meshkov, N. V. Nevmerzhitsky, and E. A. Sotskov, *Proc. of the 6th International Workshop on the Physics of Compressible Turbulent Mixing,* ed. by G. Jourdan, L. Houas,

Institut Universitaire des Systemes Thermiques Industriels. Printed in France by Imprimerie Caractere, Marseille (1997), p. 238.

36. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика,* Наука, Москва (1986).
37. О. М. Белоцерковский, *Численное моделирование в механике сплошных сред,* Наука, Москва (1994).
38. О. М. Белоцерковский, *Численный эксперимент в турбулентности: от порядка к хаосу,* Наука, Москва (1994).
39. О. М. Белоцерковский, В. А. Гущин, В. Н. Коньшин, ЖВМ и МФ **27**, 594 (1987).
40. S. I. Anisimov, A. V. Chekhlov, A. Yu. Dem'yanov, and N. A. Inogamov, Russian J. of Computational Mechanics **1**(2), 5 (1993).
41. P. R. Garabedian, Proc. Roy. Soc. London. Ser. A **241**(1226), 423 (1957).
42. G. Birkhoff and D. Carter, J. Math. Mech. **6**(6), 769 (1957).
43. J.-M. Vanden-Broeck, Phys. Fluids **27**(5), 1090 (1984).
44. L. W. Schwartz and J. D. Fenton, Ann. Rev. Fluid Mech. **14**, 39 (1982).
45. Н. А. Иногамов, А. В. Чехлов, ДАН **328**(3), 311 (1993).