

РАССЕЯНИЕ МАГНОНОВ НА СОЛИТОНЕ В ДВУМЕРНОМ ИЗОТРОПНОМ МАГНЕТИКЕ

Б. А. Иванов^{a,b}, В. М. Муравьев^a, Д. Д. Шека^{b*}

^a Институт магнетизма Национальной академии наук Украины
252142, Киев, Украина

^b Киевский университет им. Тараса Шевченко
252127, Киев, Украина

Поступила в редакцию 12 апреля 1999 г.

В рамках обобщенной σ -модели аналитически исследуется решение задачи рассеяния магнонов в двумерных изотропных ферро- и антиферромагнетиках в присутствии солитона Белавина—Полякова. Получено точное аналитическое решение задачи рассеяния для парциальной моды с азимутальным квантовым числом $m = 1$. Амплитуды рассеяния для остальных значений $m \neq 1$ изучены аналитически в длинно- и коротковолновом приближениях, а также численно при произвольных значениях волнового числа. Выяснены общие закономерности солитон-магнонного взаимодействия. Для магнетика с конечными размерами вычислены частоты магнонных мод. На основе данных о локальных модах построены уравнения движения солитона. Рассчитана низкотемпературная (длинноволновая) асимптотика магнонной плотности состояний, обусловленная солитон-магнонным взаимодействием.

PACS: 75.10.Hk, 75.30.Ds, 75.50.Ee

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время считается установленным, что солитоны играют принципиальную роль в низкоразмерном магнетизме, т. е. для одномерных ($1D$) и двумерных ($2D$) магнетиков. Исследования начались с более простого $1D$ -случая. Крумхансл и Шриффер [1] показали, что при построении термодинамики $1D$ -магнетиков в качестве элементарных возбуждений наравне с магнонами должны рассматриваться также солитоны (кинки). Карри и др. [2] построили последовательную солитонную феноменологию, в которой выяснилось нетривиальное обстоятельство — кинк-магнонное взаимодействие существенно меняет магнонную плотность состояний, что влияет на термодинамические свойства системы. В частности, температурная зависимость плотности солитонов определяется сдвигом фазы магнонов при рассеянии на кинке и может существенно изменяться для магнетиков с различным характером кинк-магнонного взаимодействия, см. [3, 4].

Особая роль в солитонной феноменологии принадлежит локальным магнонным модам, которые представляют собой спиновые волны, локализованные на магнитном солитоне. Так, например, именно число этих мод определяет суммарное изменение магнонной плотности состояний и в силу этого температурную зависимость плотности кин-

* E-mail: sheka@tpd.univ.kiev.ua

ков [3]. Кроме того, изучение локальных мод представляет самостоятельный интерес, связанный с прямыми экспериментами по их возбуждению и детектированию: характеризуя внутренние скрытые степени свободы солитона, локальные моды обуславливают солитонный магнитный резонанс на характерных частотах «внутреннего» движения [5].

Ряд важных результатов по солитонной термодинамике $2D$ -магнетиков был получен Мертенсом и др. в [6], а также последующих работах (см. обзоры [3, 7]). В работах по $2D$ -солитонам плотность солитонов (вихрей) рассматривалась как некоторый внешний параметр. Такой подход применялся и при анализе экспериментальных данных, в которых наблюдался вклад локализованных $2D$ -солитонов в релаксацию спиновых возбуждений [8–14]. Основная трудность при анализе $2D$ -систем связана с отсутствием для большинства моделей точных аналитических решений. Анализ солитонов проводился, как правило, численно на основе диагонализации относительно небольших дискретных систем [15–18]. В такой конечной геометрии солитон-магнетонное взаимодействие проявлялось, прежде всего, в существовании специфических голдстоуновских локальных мод с аномально малой частотой, а также в возбуждении магнетонных мод благодаря движению солитона. Вследствие обратного эффекта динамические параметры солитона удалось описать с помощью данных о локальных модах [19].

В этой связи особую роль играет анализ таких $2D$ -моделей, для которых возможно получение аналитических результатов и выяснение общих закономерностей солитон-магнетонного взаимодействия. Известно единственное точное аналитическое решение Белавина—Полякова (БП-солитон), описывающее топологический солитон в изотропном $2D$ -магнетике [20]. Существование локальных мод в такой системе было предсказано в [21] для изотропного $2D$ -ферромагнетика и в [22] для антиферромагнетика. В частности, было показано, что БП-солитон с топологическим зарядом ν обладает $2|\nu|$ локальными модами с нулевой частотой (локальными нулевыми модами).

В настоящей работе построено решение задачи рассеяния магнетонов на БП-солитоне в $2D$ -магнетиках. В разделе 2 проведено описание обобщенной σ -модели, на основе которой можно описать как ферромагнетик, так и антиферромагнетик, а также ферри-магнетик вблизи точки компенсации спинов подрешеток. В разделе 3 для этой модели сформулирована задача рассеяния и получено ее точное решение для парциальной моды с азимутальным квантовым числом $m = 1$. В следующих двух разделах вычислена амплитуда рассеяния для остальных значений $m \neq 1$ аналитически в длинноволновом приближении $kR \ll 1$ (разд. 4) и численно при произвольных значениях kR (разд. 5), k — волновое число, R — радиус кора солитона. В последующих разделах полученные данные использованы для описания различных физических свойств солитонов и локальных магнетонных мод. В разделе 6 вычислены частоты магнетонных мод для магнетика с конечными размерами. В этом же разделе по данным о локальных модах построены уравнения движения солитона. В разделе 7 вычислена магнетонная плотность состояний, обусловленная солитон-магнетонным взаимодействием. В заключительном разделе обсуждаются варианты развития теории и ее возможные приложения.

2. МОДЕЛЬ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ

Динамическое описание широкого класса классических изотропных гейзенберговских $2D$ -магнетиков может быть проведено в терминах классического единичного век-

торного параметра порядка n ,

$$n_z = \cos \theta, \quad n_x + in_y = \sin \theta e^{i\phi}.$$

Динамика классического ферромагнетика описывается уравнениями Ландау—Лифшица для нормированной намагниченности [23], которая играет роль динамической переменной n . В классическом антиферромагнетике в качестве динамической переменной выступает вектор антиферромагнетизма, который в длинноволновом приближении можно считать единичным. Динамика антиферромагнетика описывается уравнениями σ -модели n -поля [24, 25].

Для общности будем рассматривать оба типа магнетиков в рамках единого подхода — на основе обобщенной σ -модели, лагранжиан которой в $2D$ -случае может быть записан в виде [26]

$$L = \frac{A}{2} \int d^2x \left\{ \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 - (\nabla \theta)^2 + \sin^2 \theta \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - (\nabla \phi)^2 \right] - \frac{2}{D} (1 - \cos \theta) \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\}, \quad (1)$$

$A = JS^2$, J — обменный интеграл, S — спин атома. Конкретный вид магнетика определяется соотношением параметров c и D . Для описания ферромагнетика необходимо опустить в уравнениях движения вторые производные по времени, т. е. формально устремить c к бесконечности. Динамическое слагаемое в лагранжиане ферромагнетика имеет чисто гироскопическую природу, величина D имеет смысл коэффициента спиновой жесткости ферромагнетика. Динамика изотропной σ -модели, описывающей антиферромагнетик, имеет лоренц-инвариантный вид с характерным параметром скорости c . Для антиферромагнетика гироскопический член отсутствует (коэффициент D нужно устремить к бесконечности). Отметим, что обобщенная σ -модель при конечных D и c описывает ферримагнетик вблизи точки компенсации механических моментов подрешеток. Для такого магнетика гироскопическое слагаемое имеет такую же структуру, как и в ферромагнетике, но пропорционально малому параметру $(S_1 - S_2)/(S_1 + S_2)$, где S_1, S_2 — средние значения механических моментов атомов подрешеток [27, 28].

Простейшими элементарными линейными возбуждениями изотропного $2D$ -магнетика, возникающими на фоне основного однородного состояния, являются магноны непрерывного спектра. Выбирая ориентацию параметра порядка n вдоль полярной оси, получим магнонные решения в виде циркулярно поляризованной волны $\theta = \text{const} \ll 1$, $\phi = \mathbf{k}\mathbf{r} - \omega(k)t$. Закон дисперсии для ферромагнетика квадратичен, $\omega_{FM}(k) = Dk^2$. В случае антиферромагнетика закон дисперсии линеен, $|\omega_{AFM}(k)| = ck$, присутствуют две вырожденные ветви с противоположными циркулярными поляризациями $\omega = \pm ck$, что эквивалентно возможности линейной поляризации магнонов.

Простейшими статическими нелинейными возбуждениями в $2D$ -случае являются БП-солитоны [20]:

$$\text{tg} \frac{\theta_0}{2} = x^{-|\nu|}, \quad \phi_0 = \varphi_0 + \nu \chi, \quad x = \frac{r}{R}, \quad (2)$$

которые, естественно, имеют одинаковый вид как для ферромагнетика и антиферромагнетика, так и для ферримагнетика. Здесь r, χ — полярные координаты в плоскости магнетика, целое число ν — топологический заряд солитона, R и φ_0 — произвольные параметры.

Энергия такого солитона определяется формулой

$$E_0 = 4\pi A|\nu| \tag{3}$$

и не зависит от R и φ_0 . Неоднозначность выбора φ_0 характерна для многих моделей и является следствием изотропности гейзенберговского обмена. Существование произвольного параметра R (радиуса солитона) и независимость энергии от R связаны с масштабной инвариантностью статической двумерной σ -модели [23]. Очевидно, что подобная симметрия нарушается в динамике, за исключением тривиального случая чистого антиферромагнетика и трансляционного движения, когда все сводится к преобразованию Лоренца.

Для анализа статических решений удобно перейти к комплексному параметру порядка $w = (n_x + in_y)/(1 - n_z)$, рассматривая его как функцию комплексной переменной $\zeta = re^{ix}$, описывающей положение точки в плоскости магнетика. В этих переменных статические уравнения σ -модели сводятся к уравнениям самодуальности [29] $\partial w / \partial \zeta = 0$ или $\partial w / \partial \bar{\zeta} = 0$. БП-солитону отвечает простейшее его решение вида

$$w_0 = A\zeta^\nu \quad \text{при } \nu > 0, \quad w_0 = A\bar{\zeta}^{-\nu} \quad \text{при } \nu < 0. \tag{4}$$

Ясно, что существуют и более общие решения вида $w = f(\zeta)$ или $w = f(\bar{\zeta})$, где f — любая аналитическая функция комплексной переменной ζ . В частности, статическое многосолитонное решение с топологическим зарядом ν зависит от $2|\nu|$ параметров [23] и может быть записано в виде

$$w = A \frac{\prod_{k=1}^{\nu} (\zeta - a_k)}{\prod_{k=1}^{\nu-1} (1 - b_k \zeta)} \quad \text{при } \nu > 0 \tag{5}$$

(построение такого же общего решения при $\nu < 0$ тривиально). Его энергия определяется формулой (3) и не зависит от параметров A, a_k, b_k . Если ассоциировать центр солитона со значением $\theta = \pi$, то в этом решении при различных a_k и b_k имеется ν солитонов с единичными топологическими зарядами, расположенными в точках $\zeta = a_k$. Если все a_k совпадают, то при $b_k = 0$ решение (5) совпадает с (4) и описывает один солитон с топологическим зарядом ν , расположенный в точке $\zeta = a_k$. Таким образом, изменение параметров a_k и b_k существенно меняет структуру солитона, не изменяя его энергию и топологический заряд. Значит, БП-солитон характеризуется весьма высоким внутренним вырождением, что отражает свойство конформной инвариантности статической двумерной σ -модели [20, 29]. Следовательно, БП-солитон обладает целым набором локальных мод с нулевой частотой. Явный вид для нулевых мод можно получить, варьируя (5) по параметрам a_k и b_k . В пределе $a_k, b_k \rightarrow 0$ его можно представить в виде разложения

$$\Omega \equiv \frac{w - w_0}{w_0} = \sum_{m=-\nu+1}^{\nu} \frac{A_m}{\zeta^m} \quad \text{при } A_m \rightarrow 0, \tag{6a}$$

или, вводя отклонения θ и ϕ от величин θ_0 и ϕ_0 в простейшем решении (2), в виде формулы

$$\theta - \theta_0 + i \sin \theta_0 (\phi - \phi_0) = -\frac{\sin \theta_0 A_m}{(\zeta)^m}. \tag{6b}$$

Отсюда следует, что существует $2|\nu|$ независимых типов малых возмущений, не меняющих энергию солитона. Их вид определяется функцией

$$\Omega \propto (\zeta)^{-m} \propto \exp(im\chi).$$

Это эквивалентно утверждению, что с БП-солитоном связано $2|\nu|$ локальных мод с нулевой частотой, см. ниже.

3. МАГНОННЫЕ МОДЫ В ПРИСУТСТВИИ СОЛИТОНА

Для описания магнонных возбуждений, возникающих на фоне БП-солитона, удобно ввести локальные координаты $\{e_1, e_2, e_3\}$, характеризующие распределение параметра порядка в неподвижном солитоне: e_3 совпадает с параметром порядка n_0 неподвижного солитона (2), $e_1 = e_y \cos \phi_0 - e_x \sin \phi_0$, $e_2 = [e_3 e_1]$. Тогда линейные колебания параметра порядка можно описать в терминах проекций вектора n на локальные оси e_1 и e_2 : $\vartheta = n e_1$ и $\mu = n e_2$ (ϑ и $\mu / \sin \theta_0$ — малые отклонения соответственно от θ_0 и ϕ_0).

Линеаризованные уравнения для ϑ и μ можно представить в виде системы

$$\begin{cases} \left[-\nabla_x^2 + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} + U_1(x) \right] \vartheta + \frac{2\nu}{x^2} \cos \theta_0 \frac{\partial \mu}{\partial \chi} + \frac{R^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} + \frac{R^2}{D} \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0, \\ \left[-\nabla_x^2 + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} + U_2(x) \right] \mu - \frac{2\nu}{x^2} \cos \theta_0 \frac{\partial \vartheta}{\partial \chi} + \frac{R^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} - \frac{R^2}{D} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где $\nabla_x^2 \equiv (1/x) \partial / \partial x (x \partial / \partial x)$ — радиальная часть оператора Лапласа, $U_1(x) = (\nu/x)^2 \cos 2\theta_0$ и $U_2(x) = \text{ctg} \theta_0 \nabla_x^2 \theta_0 - (d\theta_0/dx)^2$ — «потенциалы» [18, 19]. Используя явный вид (2) для статического решения, легко показать, что «потенциалы» в обоих уравнениях совпадают. Этот факт является уникальным для изотропной σ -модели. Например, для вихрей в магнетике с плоскостями легкого намагничивания [18, 19] потенциалы существенно различны. Тот факт, что потенциалы различны, не только технически усложняет анализ (по сравнению с обыкновенным уравнением Шредингера), но и приносит принципиальные проблемы. В частности, для системы типа (7) с неравными потенциалами U_1 и U_2 не сформулированы многие общие утверждения типа осцилляционной теоремы. В [18] показано, что уравнения такого типа могут иметь истинно локализованные состояния с экспоненциальным убыванием волновой функции и энергией внутри непрерывного спектра, что запрещено для уравнений типа Шредингера.

В рассматриваемом вырожденном случае магнонные моды можно описать одним комплексным параметром $\Psi = \vartheta + i\mu$, для которого получается уравнение второго порядка

$$\left[-\nabla_x^2 + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} + \frac{\nu^2}{x^2} \cos 2\theta_0 \right] \Psi - i \frac{2\nu}{x^2} \cos \theta_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \chi} + \frac{R^2}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - i \frac{R^2}{D} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0, \quad (8)$$

анализ которого практически не отличается от анализа уравнения Шредингера. Решение (8) удобно искать в виде разложения по парциальным волнам:

$$\Psi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e^{im\chi - i\omega t}. \quad (9)$$

Каждая парциальная волна f_m является при этом собственной функцией спектральной задачи

$$\hat{H} f_m = \kappa^2 f_m, \quad \kappa = kR \tag{10}$$

для $2D$ -радиального оператора Шредингера $\hat{H} = -\nabla_x^2 + U_m(x)$ с потенциалом

$$U_m(x) = \frac{m^2 + 2m\nu \cos \theta_0 + \nu^2 \cos 2\theta_0}{x^2}.$$

Спектр задачи (10) непрерывен и описывается функциями вида f_m^κ , $\kappa \geq 0$. Легко убедиться, что нулевым модам f_m^0 отвечают решения [21]

$$f_m^{(0)} = x^{-m} \sin \theta_0. \tag{11}$$

Эти моды соответствуют возмущениям типа (6), т. е. их наличие обусловлено конформной инвариантностью задачи. Здесь и далее для определенности рассматриваем случай $\nu > 0$, для анализа солитонов с $\nu < 0$ достаточно заменить m на $-m$. Это решение имеет регулярное поведение при $r \rightarrow 0$ только для парциальных мод с $-\infty < m \leq \nu$. Простой анализ решения (11) показывает, что при $-\nu + 1 \leq m < \infty$ функция $f_m^{(0)}$, несингулярная при $r \rightarrow 0$, убывает также и вдали от солитона. Поэтому при $-\nu + 1 \leq m \leq \nu$ эти функции конечны во всей области изменения r . Это соответствует сделанному ранее выводу о том, что БП-солитон с топологическим зарядом ν обладает $2|\nu|$ локальными модами, представленными в (6). Отметим, что физический смысл двух из них очевиден: трансляционная мода $f_{m=1}^{(0)}$ описывает смещение солитона как целого, ротационно-осцилляционная мода $f_{m=0}^{(0)}$ — поворот и изменение радиуса (что соответствует неопределенности выбора положения центра солитона и произвольным значениям, соответственно, констант φ_0, R). Найденные связанные состояния (локальные моды) являются предельными для магнонных мод непрерывного спектра при $\kappa \rightarrow 0$ в отличие от случая $1D$ -магнетиков, см. обзор [3].

Используя стандартный метод вариации произвольной постоянной, можно построить второе линейно независимое решение (10) с $\kappa = 0$:

$$f_m^{(1)} = x^m \left(\frac{x^{2\nu}}{m + \nu} + \frac{2}{m} + \frac{x^{-2\nu}}{m - \nu} \right) \sin \theta_0, \tag{12}$$

которое имеет регулярное поведение в нуле при $m > \nu$.

Таким образом, при $\omega = 0$ одно из решений, (11) или (12), для любого m не имеет особенностей в нуле. Это решение будет использовано ниже для анализа задачи рассеяния при малых, но конечных значениях ω в области достаточно малых r .

Найденные точные решения $f_m^{(0)}$ могут быть использованы для упрощения задачи анализа непрерывного спектра на основе преобразования Дарбу [30]. Ранее такой подход использовался в $1D$ -случае [31]. Для объяснения метода введем эрмитово-сопряженные операторы понижения и повышения

$$\hat{A} = -\frac{d}{dx} + \frac{f_m^{(0)'}}{f_m^{(0)}}, \quad \hat{A}^\dagger = \frac{d}{dx} + \frac{1}{x} + \frac{f_m^{(0)'}}{f_m^{(0)}},$$

такие что $\hat{A} f_m^{(0)} = 0$ (здесь и далее штрих обозначает производную по переменной x). Введение этих операторов позволяет представить оператор Шредингера \hat{H} в факторизованном виде $\hat{H} = \hat{A}^\dagger \hat{A}$. Важно, что это дает возможность переформулировать исходную задачу (10) в терминах собственных функций $g_m^\kappa = \hat{A} f_m^\kappa$ спектральной задачи вида

$$\hat{\mathcal{H}} g_m = \kappa^2 g_m, \quad \hat{\mathcal{H}} \equiv \hat{A} \hat{A}^\dagger = -\nabla_x^2 + \mathcal{U}_m, \quad (13)$$

где потенциал имеет вид

$$\mathcal{U}_m(x) = \frac{(m-1)^2 + \nu^2 + 2\nu(m-1) \cos \theta_0}{x^2}.$$

Отметим, что потенциал \mathcal{U}_m вдали от солитона (при $\theta_0 \rightarrow 0$) переходит в центробежный потенциал вида $(\nu+m-1)^2/r^2$, который зависит явным образом от азимутального числа s с номером $m-1$, что объясняет используемую терминологию для операторов \hat{A} и \hat{A}^\dagger .

Исходная функция f_m восстанавливается с помощью оператора повышения

$$f_m^\kappa = \frac{1}{\kappa^2} \hat{A}^\dagger g_m^\kappa. \quad (14)$$

Произведенное преобразование принципиально упрощает задачу для трансляционной моды ($m=1$). Действительно, в этом случае $\mathcal{U}_1(x) = \nu^2/x^2$ при всех x , т.е. g_1^κ определяет свободное движение. В силу этого несингулярное решение имеет вид $g_1^\kappa = -J_\nu(\kappa x)$. Восстанавливая исходную функцию с помощью (14), получим

$$f_1^\kappa = J_{\nu+1}(k\tau) - \frac{2\nu}{k\tau} \frac{J_\nu(k\tau)}{(r/R)^{2\nu} + 1}. \quad (15)$$

Существование этого точного решения при любых значениях волнового вектора k является уникальным свойством модели (1). Для других значений m (как и ранее, для случая рассеяния магнонов на магнитных вихрях в ферромагнетиках [19] и антиферромагнетиках [18] с плоскостями легкого намагничивания) задача может быть решена только приближенно или с использованием численных методов.

Решение (15) демонстрирует важную особенность магнонных мод, отсутствующую в случаях [18, 19], для которых характерно экспоненциальное убывание отклонения намагниченности от плоскости легкого намагничивания в вихре вдали от центра вихря. Как видно из (15), отклонение f_1^κ от асимптотического $J_{\nu+1}(k\tau)$ не локализовано в области с определенным радиусом, а характеризуется более медленным (степенным) убыванием. Более того, для наиболее интересных случаев длинноволновых асимптотик, при $k \ll 1/R$, решение (15) в широкой области r , $R \ll r \ll 1/k$, имеет такой же вид, как комбинация функций Бесселя $J_{\nu+1}(z) \propto z^{\nu+1}$ и Неймана $N_{\nu+1} \propto z^{-(\nu+1)}$, т.е. второе слагаемое в (15) имитирует присутствие функции N . (Далее мы убедимся, что это свойство остается справедливым для всех значений m .)

Для магнитных вихрей соответствующие поправки имели экспоненциальное убывание вида $\exp(-r/r_v)$, r_v — радиус кора вихря. В силу этого амплитуда рассеяния, т.е. коэффициент при функции Неймана, мог быть определен из коэффициента при $1/z^m$ в области $z \ll 1$. В данном случае это не так, поэтому развитый в [19] для магнитных вихрей метод анализа матрицы рассеяния путем анализа поправок к нулевым модам в области $r_v \ll r \ll 1/k$ для применения к данной задаче нуждается в серьезной модификации¹⁾, которая будет дана в следующем разделе.

С другой стороны, слагаемые со степенным убыванием типа $1/r^a$, $a > 1/2$, должны учитываться при описании свойств магнонных мод в ограниченном магнетике с солитоном. Это будет проделано в разд. 6.

¹⁾ Неучет этого обстоятельства приводит к такому результату, что амплитуда рассеяния трансляционной моды на БП-солитоне отлична от нуля [32, 22], в то время как в силу (15) она равна нулю.

4. РАССЕЯНИЕ В ДЛИННОВОЛНОВОМ ПРЕДЕЛЕ

Для описания рассеяния магнов на БП-солитоне заметим, что свободные магنونные состояния могут быть найдены, если в «потенциале» $U_m(x)$ положить $\nu = 0$. Получающиеся при этом магنونные моды

$$f_{m,\nu=0}^x = J_m(z), \quad z = kr,$$

представляют парциальные цилиндрические волны плоской спиновой волны вида

$$e^{ikr-i\omega t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(z) e^{im\chi - i\omega t}. \quad (16)$$

В присутствии солитона поведение магنونных решений может быть проанализировано на больших расстояниях от солитона ($r \gg R$). В силу асимптотического поведения $U_m(x) \approx n^2/x^2$ в главном приближении по $1/x$ имеем стандартный ответ [21]:

$$\begin{aligned} g_m \propto G_m(z) &\equiv J_{|n|}(z) + \sigma_m^\nu N_{|n|}(z), & n = \nu + m - 1, \\ f_m \propto F_m(z) &\equiv J_{|p|}(z) + \sigma_m^\nu N_{|p|}(z), & p = \nu + m, \end{aligned} \quad (17)$$

(обозначения n , p , а также $G_m(z)$ и $F_m(z)$ для комбинаций цилиндрических функций конкретного вида (17) с учетом σ будет использоваться и далее). Сравнение асимптотик $G_m(z)$ и $F_m(z)$ друг с другом, а также с решением (16) для свободных магнов приводит к выводу, что $\sigma_m^\nu \equiv \sigma_m^\nu(\chi)$ определяет амплитуду солитон-магنونного рассеяния. Поскольку коэффициенты σ одинаковы как для F_m , так и для G_m , для вычисления амплитуды рассеяния $\sigma_m(\chi)$ можно пользоваться как исходной, так и модифицированной задачами. В частности, для трансляционной моды рассеяние отсутствует. К сожалению, для других мод найти точные аналитические решения не удается, однако анализ рассеяния можно провести достаточно полно в предельных случаях.

Для анализа рассеяния магнов на солитоне в случае малых k может быть использовано то обстоятельство, что при $k = 0$ известны точные решения f_m^0 , (11) для $m \leq \nu$ или (12) для $m > \nu$. В этом случае при малых, но конечных значениях k ($k \ll 1/R$) решение может быть построено с помощью теории возмущения по k^2 . При этом решение ищется в виде $f_m^x = f_m^0(1 + \chi^2 \alpha(x))$, где $\chi^2 \alpha(x) \ll 1$. Функция $\alpha(x)$ определяется линейным неоднородным уравнением второго порядка, решение которого можно определить методом вариации произвольной постоянной, если известны два линейно независимые решения однородной задачи. Для магнетика с плоскостями легкого намагничивания это может быть реализовано только для трансляционной моды [19]. В случае изотропного магнетика указанным способом могут быть найдены решения для произвольных m [32, 22].

Для конкретного построения решений удобнее пользоваться модифицированной задачей, используя уравнение первого порядка $\hat{A}^\dagger g_m^x = \chi^2 f_m^0$, в котором f_m^0 — нулевое решение, ограниченное при $x \rightarrow 0$. В случае $m \leq \nu$ таким решением является функция $f_m^{(0)}$, откуда легко получить

$$g_m^x = \frac{\chi^2}{x f_m^{(0)}} \Phi^{(0)}(x), \quad \Phi^{(0)}(x) = \int_0^x (f_m^{(0)}(\xi))^2 \xi d\xi, \quad \text{при } m \leq \nu. \quad (18a)$$

С помощью этих формул легко восстановить явный вид решения исходной задачи f_m^x :

$$f_m^x(x) = f_m^{(0)}(x) \left[1 - \int_0^x \frac{g_m^x(\xi)}{f_m^{(0)}(\xi)} d\xi \right]. \tag{18b}$$

Анализ этого решения показал, что в широком интервале r , $0 \leq r \ll R^s(1/k)^{1-s}$ (параметр s находится в интервале $0 < s < 1$ и зависит от m), добавка к нулевому решению $f_m^{(0)}$ мала и теория возмущений адекватна.

Такие же закономерности имели место для магнонной моды с $|m| = 1$, рассеивающейся на вихре в магнетике с плоскостями легкого намагничивания [19]. Поскольку отклонения от асимптотического решения были экспоненциально малы, в области $R \ll r \ll 1/k$ справедливы оба решения, асимптотическое (18b) и типа (17), что позволило найти коэффициент при функции Неймана $N_{|n|}(kr)$ (с учетом того, что $N_{|n|}(kr) \propto (kr)^{-|n|}$ при $kr \ll 1$) и записать аналитическую формулу для $\sigma_{|m|=1}(k)$. В нашем случае ситуация более сложная. Как отмечалось в предыдущем разделе при обсуждении точного решения (15), асимптотики решения вдали от солитона содержат поправки, убывающие по степенному закону. Хотя они и убывают быстрее, чем асимптотическое решение (18b), их учет оказывается важен. В частности, они могут иметь тот же вид, что и функция Неймана при $z \ll 1$.

Таким образом, для вычисления амплитуды рассеяния нужно сравнивать приближенное решение (18b) не с асимптотической формой (17), а с уточненным решением, учитывающим слагаемые со степенным убыванием вдали от солитона. В случае $m \neq 1$ точная формула для этих поправок не существует, но они могут быть легко вычислены в длинноволновом приближении $k \ll 1/R$, когда можно считать, что $kR \ll z = kr \ll 1$.

Чтобы это сделать, перейдем в уравнении (13) к переменной $z = kr = \kappa x$. Тогда комбинация $(R/r)^\nu$, входящая в $\theta_0(r)$, переходит в κ^ν/z^ν и при ненулевых z обращается в нуль при $\kappa \rightarrow 0$. Значит, в пределе $\kappa = kR \rightarrow 0$ уравнение (13) просто превращается в уравнение Бесселя с решением (17), а поправки могут быть найдены в виде разложения в ряд по степеням $(\kappa/z)^\nu$. Ограничиваясь первым неисчезающим приближением по κ^ν и представляя асимптотическое решение в виде $g_m^x(z) = G_m(z) + \mathcal{S}_{\nu,m}^x(z)$, мы приходим к неоднородному уравнению Бесселя

$$\nabla_z^2 \mathcal{S} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2} \right) \mathcal{S} = \frac{4\nu(1-m)}{z^2} \left(\frac{\kappa}{z} \right)^{2\nu} G_m.$$

Отсюда видно, что с данной точностью решение вдали от солитона может быть выражено через универсальную функцию $\mathcal{S}_{|n|,\nu}(z)$:

$$g_m^x(z) = G_m(z) + 4\nu(m-1)\kappa^{2\nu} \mathcal{S}_{|n|,\nu}(z), \tag{19}$$

которая находится из решения уравнения вида

$$\nabla_z^2 \mathcal{S}_{|n|,\nu} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2} \right) \mathcal{S}_{|n|,\nu} = -\frac{G_m}{z^{2(\nu+1)}}.$$

Используя стандартный метод вариации произвольной постоянной, запишем решение этого уравнения в интегральной форме

$$\mathcal{G}_{|n|,\nu}(z) = \frac{\pi}{2} N_{|n|} \int_z^\infty \frac{G_m(z) J_{|n|}(z)}{z^{2(\nu+1)}} dz - \frac{\pi}{2} J_{|n|} \int_z^\infty \frac{G_m(z) N_{|n|}(z)}{z^{2(\nu+1)}} dz. \quad (20)$$

Интегрирование (20) может быть выполнено точно. При $|n| = \nu$ оно приводит к ответу $\mathcal{G}_{\nu,\nu} = -g_\nu^{(0)} / (8\nu^2 z^{2\nu})$.

Если же $|n| \neq \nu$, возможно получить рекуррентное соотношение

$$\mathcal{G}_{|n|,\nu} = \mathcal{G}_{\nu-1} A_{|n|,\nu} + B_{|n|,\nu}, \quad A_{|n|,\nu} \equiv \frac{2\nu - 1}{2\nu(n^2 - \nu^2)}, \quad B_{|n|,\nu} \equiv \frac{z g_{\nu-1}^{(0)} + (\nu - n) g_n^{(0)}}{4\nu(n^2 - \nu^2) z^{2\nu}},$$

откуда

$$\mathcal{G}_{|n|,\nu} = \mathcal{G}_1 \prod_{k=2}^\nu A_{|n|,k} + \sum_{k=2}^{\nu-1} B_{|n|,k} \prod_{i=k+1}^\nu A_{|n|,i} + B_{|n|,\nu}.$$

Ограничиваясь в дальнейшем поправками к функции Бесселя, т. е. полагая в (20) $G_m = J_{|n|}$, после достаточно длинных вычислений с использованием свойств цилиндрических функций получим для \mathcal{G}_1 выражение

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{|n|,1}(z) = & -\frac{J_{|n|}(z)}{4(n+1)} \left[\frac{1}{z^2} + \frac{\ln(z/2) - \psi(|n|+1)}{n(n+1)} \right] + \frac{J_{|n|-1}(z)}{4z(n^2-1)} + \\ & + \frac{1}{4|n|(n^2-1)} \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{(|n|+2k) J_{|n|+2k}}{k(|n|+k)} + \frac{\pi N_{|n|}(z)}{8|n|(n^2-1)}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\psi(x)$ — пси-функция Эйлера.

Таким образом, как и для точного решения (15), асимптотическое поведение решения при $r \gg R$ отличается от того, что имеет место в рассмотренных ранее магнетиках с плоскостями легкого намагничивания. Даже если $\sigma = 0$, т. е. рассеяния нет, в области далекой от солитона, но при конечных r ($R \ll r \ll 1/k$) решение содержит ряд слагаемых, которые формально расходятся при $z \rightarrow 0$ ($kr \ll 1$). В этом случае при $\sigma \neq 0$ в интересующей нас области $R \ll r \ll 1/k$ решение задачи рассеяния можно представить в виде

$$g(z) \propto J_{|n|}(z) + 4\nu(m-1) \kappa^{2\nu} \mathcal{G}_{|n|,\nu}(z) + \sigma N_{|n|}(z). \quad (22)$$

Здесь мы не выписываем соответствующие поправки к функции Неймана. Как легко показать, они содержат более высокие степени κ и не существенны.

Теперь мы можем, сравнивая приближенное решение вида (18), справедливое при $0 < x \ll 1/\kappa$, и решение (22), применимое при $1 \ll x \ll 1/\kappa$, найти амплитуду рассеяния $\sigma_m(\kappa)$. Анализ удобно проводить отдельно для различных областей изменения параметров.

1. Случай $|n| < \nu$ включает как локальные моды с числами m в диапазоне $-\nu + 1 < m < 1$ ($0 < n < \nu$), так и нелокальные моды, для которых $-2\nu + 1 < m < -\nu + 1$ ($-\nu < n < 0$). Для построения асимптотического решения уравнения (18а) заметим, что вдали от солитона нулевые моды имеют вид

$$f_m^{(0)} \approx 2x^{-n-1} (1 - x^{-2\nu}). \quad (23)$$

Отсюда для $\Phi^{(0)}(x)$ в актуальной области $x \gg 1$ получим приближение

$$\Phi^{(0)}(x) \approx \Phi_0 - \frac{2}{n}x^{-2n} + \frac{4}{\nu+n}x^{-2n-2\nu}, \quad \Phi_0 = \frac{2\pi(\nu-n)}{\nu^2 \sin(\pi n/\nu)}, \quad (24)$$

причем вклад константы Φ_0 является определяющим при $n > 0$ и малой поправкой при $n < 0$.

Интегрирование уравнений (18а) с использованием (23) и (24) приводит к выражению для g_m^x :

$$g_m^x(x) \propto \Phi_0 x^n - \frac{2}{n}x^{-n}. \quad (25)$$

При записи (25) мы пренебрегли слагаемыми вида $x^{-2\nu}$ по сравнению с $x^{-2|n|}$.

Сравним найденную асимптотику с решением (22) задачи рассеяния. Используя разложение цилиндрических функций при малых z и сравнивая полученные асимптотики, можно сделать вывод, что слагаемое $x^{|n|}$ в (25) связано с функцией Бесселя $J_{|n|}$, слагаемое $x^{-|n|}$ связано с функцией Неймана $N_{|n|}$ и обуславливает амплитуду рассеяния σ . Простое сравнение приводит к следующей асимптотике для амплитуды рассеяния σ :

$$\sigma_m^\nu(x) = \frac{\pi (n\Phi_0/2)^{n/|n|}}{|n|! (|n|-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2|n|}, \quad -2\nu+1 < m < 1; \quad m \neq -\nu+1. \quad (26)$$

Отметим, что учет поправок $\mathcal{S}_{|n|,\nu}$ приводит к несущественному в данной области параметров вкладу в σ порядка $x^{2\nu}$.

2. Случай $|n| > \nu$ реализуется при $m < -2\nu+1$ и $m > 1$. Интегрирование уравнений (18а) с использованием тех же приближений (23) и (24) приводит к асимптотическому решению

$$g_m^x(x) \propto x^{|n|} \left(1 + \frac{\nu+|n|}{\nu+n}x^{-2\nu}\right), \quad (27)$$

в котором сохранены лишь главные поправки по $1/x$.

Асимптотика (27) справедлива для $m \leq \nu$, когда нулевые решения f_m^0 описываются функциями $f_m^{(0)}$. Аналогичный расчет может быть проведен также при $m > \nu$ с использованием в качестве нулевых решений функций $f_m^{(1)}$, откуда

$$g_m^x = \frac{1}{x f_m^{(0)}} (1 - x^2 \Phi^{(1)}(x)), \quad \Phi^{(1)}(x) = \int_0^x f_m^{(0)}(\xi) f_m^{(1)}(\xi) \xi d\xi \quad \text{при } m > \nu. \quad (28)$$

Интегрирование (28) приводит к той же асимптотике (27) при $\nu > 1$. В случае $\nu = 1$ асимптотическое решение для мод с $m > 1$ имеет вид

$$g_m^x(x) \propto x^m \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{m(m+1)} \ln x\right). \quad (29)$$

Таким образом, полученные для $|n| > \nu$ асимптотические решения (27), (29) принципиально отличаются от рассмотренного выше (25). Решения (27), (29) вообще не

содержат слагаемых вида $1/x^{|n|}$ и, следовательно, не могут давать асимптотику вида $J_{|n|} + \sigma N_{|n|}$. Это возможно лишь при условии, что в решении (22) поправка $\mathcal{S}_{|n|,\nu}$ компенсирует слагаемое рассеяния σN_n . Подчеркнем, что это достаточно сильное условие — компенсируются не только члены $1/x^{|n|}$, но также все члены вида $x^{2k}/x^{|n|}$, где $0 \leq k \leq |n| - 1$. Учитывая слагаемое в $\mathcal{S}_{|n|,\nu}$, связанное с N_n , см. (21), получим

$$4\nu(m-1)x^{2\nu} \frac{\pi N_n}{8n(n^2-1)} \prod_{k=2}^{\nu} A_k + \sigma N_n = 0,$$

откуда амплитуда рассеяния

$$\sigma_m^\nu(x) = \mathcal{A}_m^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu}, \quad -2\nu + 1 < m < 1, \quad m \neq -\nu + 1, \tag{30}$$

$$\mathcal{A}_m^\nu = -\frac{\pi 2^\nu (2\nu - 1)!!}{(\nu - 1)! |m| (m + 1) \dots (m + 2\nu - 1)}.$$

3. Специальные случаи $|n| = \nu$ и $|n| = 0$, когда решения (30) и (26) неприменимы, включают трансляционную моду ($m = 1$), локализованную моду с $m = -\nu + 1$ и нелокализованную с $m = -2\nu + 1$. Для трансляционной моды из точного решения (15) следует, что $\sigma = 0$. Расчет на основе (18а) и сравнение результатов с решением (22) задачи рассеяния приводит в двух других случаях к следующим асимптотикам для σ :

$$\sigma_m^\nu(x) = \frac{\pi}{2 \ln(1/x)}, \quad m = -\nu + 1, \tag{31}$$

$$\sigma_m^\nu(x) = \frac{4\pi}{[(\nu - 1)!]^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu} \ln \frac{1}{x}, \quad m = -2\nu + 1. \tag{32}$$

Проведенный выше анализ задачи рассеяния в длинноволновом пределе позволяет вычислить амплитуду рассеяния в длинноволновом приближении, т. е. при $k \ll 1/R$. Сейчас уместно сделать некоторые общие заключения о характере рассеяния магнонов на солитоне.

Оказалось, что при $k \rightarrow 0$ амплитуда рассеяния $\sigma_m(k) \rightarrow 0$ при всех значениях m и ν . В большинстве случаев амплитуда $\sigma_m(x)$ (30), (26) является регулярной функцией x . Для значений параметров (31), (32), в отличие от (30), (26), некоторая производная $d^p \sigma / dx^p$ имеет особенность. Величина $p = 1$ для $m = -\nu + 1$, когда рассеяние максимально. Подобная неаналитичность в поведении $\sigma(k)$ была обнаружена при численном анализе рассеяния магнонов при $m = 0$ на вихре в антиферромагнетике с плоскостью легкого намагничивания [18], см. также [32]. Интенсивность рассеяния (в отличие от случая магнитных вихрей [18, 19]) не максимальна для парциальных волн с наименьшими $m = \pm 1, 0$.

Тот факт, что для парциальной волны с данным m предельная точка $k = 0$ служит локальной нулевой модой, не является критическим для интенсивности рассеяния. В частности, мода с $m = 1$ (хорошо известная трансляционная мода) не испытывает рассеяния.

Также отметим, что в случае рассеяния на БП-солитоне нет простых закономерностей, связывающих интенсивности рассеяния при $m = +|m|$ и $m = -|m|$. Для рассеяния магнонов на вихре в магнетиках с плоскостями легкого намагничивания такие

зависимости были установлены на основе численного анализа: для антиферромагнетиков $\sigma_m^\nu(k) = \sigma_{-m}^\nu(k)$ [18]; в случае ферромагнетиков $\sigma_m^\nu(k)$ и $\sigma_{-m}^\nu(k)$ получаются друг из друга изменением знака частоты магнона [19].

В заключение раздела приведем общее решение задачи рассеяния плоской спиновой волны на БП-солитоне. Это решение удобнее привести в терминах переменной $\tilde{\Psi} = \Psi \exp(i\nu\chi)$, которая при $r \rightarrow \infty$ переходит в $(n_x + in_y) \exp(-i\omega t)$ и описывает спиновую волну на фоне однородного состояния $\mathbf{n} \parallel \mathbf{e}_z$. Необходимость перехода от Ψ к $\tilde{\Psi}$ связана с тем, что хотя вдали от солитона намагниченность однородна, $\mathbf{e}_3 \parallel \mathbf{e}_z$, орты \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 зависят от χ . Асимптотическое решение при $r \gg R$ с учетом (9) и (17) можно записать в виде

$$\tilde{\Psi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m (J_n(kr) + \sigma_m^\nu(\kappa) N_n(kr)) \exp(in\chi - i\omega t), \quad n = \nu + m, \quad (33)$$

где C_m — произвольные постоянные. Используя асимптотики цилиндрических функций в области $r \gg 1/k$ и выбирая C_n из сравнения асимптотик выражения (33) с асимптотиками свободной волны (16), можно записать общее решение задачи рассеяния плоской спиновой волны:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} &= \left[e^{ikr} + \mathcal{F}(\chi) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \right] e^{-i\omega t}, \\ \mathcal{F}(\chi) &= \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (e^{2i\delta_m^\nu} - 1) e^{i(\nu+m)\chi}. \end{aligned} \quad (34)$$

При записи (34) введена фаза рассеяния $\delta_m^\nu(\kappa)$, связанная с амплитудой простым соотношением $\sigma = -\operatorname{tg} \delta$.

Полное сечение рассеяния

$$\varrho = \int_0^{2\pi} |\mathcal{F}|^2 d\chi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varrho_m,$$

где $\varrho_m = (4/k) \sin^2 \delta_m^\nu$ — парциальные сечения рассеяния.

Как уже было отмечено выше, при малых k максимальное рассеяние связано с локальной модой $m = -\nu + 1$, для которой согласно (31) фаза рассеяния $\delta = \pi / (2 \ln \kappa)$. Поэтому в главном по k приближении достаточно ограничиться лишь вкладом этой моды, откуда для функции рассеяния получим выражение вида

$$\mathcal{F}(\chi) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2k}} \frac{e^{i(\chi+\pi/4)}}{\ln(kR)}, \quad k \ll 1/R. \quad (35)$$

В этом приближении рассеяние изотропно ($|\mathcal{F}(\chi)|$ не зависит от χ). Поправки к этому выражению имеют порядок $1/(kR)^{2\nu+1/2}$ и существенны только для определения анизотропии $\mathcal{F}(\chi)$.

Полное сечение рассеяния расходится (имеет интегрируемую особенность) в пределе $\kappa \rightarrow 0$:

$$\varrho(\kappa) \approx \frac{\pi^2}{k \ln^2 kR}, \quad k \ll 1/R. \quad (36)$$

5. АНАЛИЗ ДАННЫХ РАССЕЯНИЯ ПРИ НЕМАЛЫХ k

Анализ рассеяния может быть проведен аналитически также в коротковолновом пределе, $k \gg |m|/R$. Разумно предположить, что в этом случае задача может быть проанализирована на основе квазиклассического приближения, что дает

$$g_m^* \propto \sqrt{\frac{p(x)}{x}} \cos \left[\text{const} + \int_{x_0}^x p(\xi) d\xi \right], \quad p^2(x) = x^2 - \mathcal{U}_m(x) + \frac{1}{4x^2}. \quad (37)$$

Действительно, анализ показывает, что (37) справедливо при всех значениях $z = kr$, больших, чем координата точки поворота $z_0 = \kappa x_0$, соответствующей условию $p(x_0) = 0$. Сама величина x_0 мала, $x_0 \sim |m|/\kappa \ll 1$.

С другой стороны, на малых расстояниях $r \ll R$ ($x \ll 1$) «потенциал» \mathcal{U}_m имеет асимптотический вид $\mathcal{U}_m(x) \approx (\nu - m + 1)^2/x^2$, то есть описывает свободные магныны вида (16) со смещенным индексом,

$$g_m \propto J_{|\nu-m+1|}(z), \quad f_m \propto J_{|\nu-m|}(z) \quad \text{при } r \ll R.$$

При $k \gg |m|/R$ существует широкая область значений r , $|m|/k \ll r \ll R$, в которой в этом решении можно ограничиться асимптотикой функции Бесселя при $z \gg 1$, $z \gg |m|$,

$$g_m^* \propto J_{|\nu-m+1|} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos \left(z - \frac{1}{2}|\nu - m + 1| - \frac{\pi}{4} + \frac{4(\nu - m + 1)^2 - 1}{8z} \right). \quad (38)$$

Решения (37) и (38) с точностью до членов порядка $1/z^2$ совпадают во всей области перекрытия параметров. Отсюда, проводя асимптотическое разложение (37) вдали от солитона, найдем коротковолновую асимптотику для амплитуды рассеяния:

$$\sigma_m^\nu(\kappa) \approx \frac{\pi(m-1)}{\sin(\pi/2\nu)} \frac{1}{\kappa}, \quad \kappa \gg |m|. \quad (39)$$

Прежде всего, эта формула воспроизводит свойство точного решения (15), согласно которому $\sigma_m^\nu = 0$ при $m = 1$. Кроме того, амплитуда рассеяния асимптотически стремится к нулю как $1/\kappa$ при всех $m \neq 1$, причем величины σ равны по модулю, но имеют противоположные знаки для магнанных мод с $m = |m|$ и $m = -|m| + 2$. Этот результат, как мы увидим ниже, существен при анализе плотности состояний магнонов в 2D-магнетике.

Теперь можно сравнить амплитуды рассеяния для длинноволнового и коротковолнового пределов. Легко видеть, что в обоих случаях $\sigma \rightarrow 0$, однако знаки у $\sigma(\kappa)$ при $\kappa \rightarrow 0$ и $\kappa \rightarrow \infty$ противоположные. Такая ситуация характерна для рассеяния магнонов на 1D-солитоне в моделях синус-Гордон, ϕ^4 и для уравнения Ландау—Лифшица, см. обзор [3]. Можно предполагать, что при некотором конечном $k = k_p$ амплитуда рассеяния имеет полюс. Естественно, никакой реальной расходимости при этом не происходит. Физически наблюдаемая фаза рассеяния δ_m^ν изменяется монотонно. Существование полюса означает, что полное приращение фазы рассеяния $\delta(\infty) - \delta(0)$ отлично от нуля. Согласно численным расчетам для солитона с топологическим зарядом $\nu = 1$ это приращение с точностью до знака равно π , т. е. с каждой модой связан

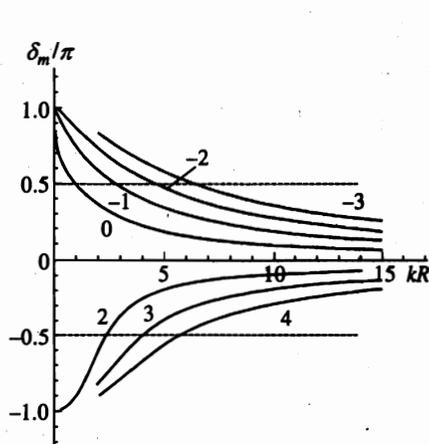


Рис. 1

Рис. 1. Зависимости $\delta_m(kR)$ для $\nu = 1$ при различных значениях m , величины m отмечены цифрами около соответствующих кривых. Штриховые линии, проведенные через значения $|\delta_m| = \pi/2$, обозначают положения полюсов амплитуды рассеяния

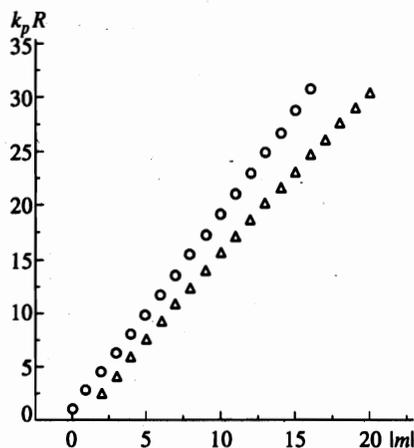


Рис. 2

Рис. 2. Положения полюсов k_p в зависимости от номера моды m для $\nu = 1$. Треугольники соответствуют $m > 0$, кружки — $m \leq 0$

один полюс. Подобная особенность проявляется при анализе числа магонных степеней свободы (см. разд. 7).

Для анализа промежуточных значений $kR \sim 1$ численно решалась задача рассеяния. Расчет проводился на основе численного интегрирования спектральных уравнений как исходной (10), так и модифицированной (13) задач в широком диапазоне $10^{-3} < kR < 10^3$ и $-20 \leq m \leq 20$ (данные счета соответствуют друг другу в согласии со сказанным выше). Мы в основном интересуемся случаем $\nu = 1$, когда энергия солитона минимальная. Однако некоторые данные были получены и для $\nu = 2, 3, 4$.

Численный расчет верифицировал длинно- и коротковолновые асимптотики амплитуды рассеяния, приведенные выше. В промежуточной области волновых векторов $k \sim 1/R$ наблюдаются полюсы в точках $k = k_p$ амплитуды рассеяния для всех перечисленных мод (на рис. 1 приведены данные для мод с различным m в случае солитона с $\nu = 1$).

Остановимся на вопросе о положения полюсов амплитуды рассеяния подробнее. Согласно численным данным при $\nu = 1$ для всех $m \neq 1$ наблюдается только один полюс при $k = k_p$. Величина k_p растет с увеличением $|m|$, причем зависимость $k_p = k_p(m)$ различна для $m = +|m|$ и $m = -|m|$ (напомним, что речь идет о солитонах с $|\nu| = 1$). Для предельно больших значений $|m|$ полюс уходит на бесконечность, см. рис. 2. Для $\nu > 1$ ситуация несколько более сложная. А именно, предварительные численные данные показывают, что при данном m может быть несколько полюсов, причем их число N_m не превышает ν .

Для сравнительного анализа зависимостей рассеяния мод с различным m выпишем явный вид асимптотик фазы рассеяния при $\nu = 1$

$$\delta(x) \approx \begin{cases} \pi \operatorname{sign} m \left(1 - \frac{x^2}{2m(m+1)} \right), & x \ll 1, \quad m \neq -1, 0, \\ \frac{\pi(1-m)}{x}, & x \gg |m|. \end{cases} \quad (40)$$

Считая, что приведенные асимптотики качественно справедливы и при $x \sim 1$, можно грубо оценить положение полюса, приравнивая значения $\delta(x)$ при $x \ll 1$ и $x \gg 1$. Это дает $k_p \approx |m|/R$ при $|m| \gg 1$. Такая оценка неплохо воспроизводит линейный рост k_p как функцию $|m|$ при больших $|m|$, см. рис. 2.

6. МАГНОННЫЕ МОДЫ В ОГРАНИЧЕННОМ МАГНЕТИКЕ

Проведенный выше в длинноволновом пределе анализ задачи рассеяния может быть применен для исследования собственных магнонных мод в магнетике с конечной площадью, содержащем солитон. Такая задача важна для многих приложений. Прежде всего, ее решение может быть использовано для аналитического описания данных численного моделирования движения солитонов, которое всегда проводится для системы конечных размеров. В частности, в [33, 19] на этой основе была описана динамика вихря в ферромагнетике с плоскостью легкого намагничивания и верифицированы неньютоновские уравнения движения, содержащие третьи производные координаты вихря по времени. Во-вторых, как отмечалось выше, этот расчет непосредственно применим для описания собственных мод для малых частиц магнетика, находящихся в так называемом вихревом состоянии [34].

Исследуем простейший случай, а именно, магнонные моды в круговой системе с конечным радиусом L и солитоном в центре. Мы обсудим как граничные условия Дирихле

$$\Psi(r, \chi) \Big|_{r=L} = 0, \quad (41)$$

отвечающие фиксированному значению намагниченности на границе, так и граничные условия Неймана

$$\frac{\partial}{\partial r} \Psi(r, \chi) \Big|_{r=L} = 0, \quad (42)$$

моделирующие случай свободных граничных условий. Распространение этих результатов на случай общих граничных условий не представляет труда, и мы не будем его обсуждать. Магнонный спектр в такой системе дискретен. В отсутствие солитонов собственные волновые числа $k_{m,i} = j_{m,i}/L$, где $j_{m,i}$ есть i -й нуль функции Бесселя J_m или ее производной соответственно для случаев (41) и (42).

В магнетике с БП-солитоном для достаточно больших k можно пренебречь локализованной частью функции и записать

$$J_n(kL) + \sigma(k)N_n(kL) = 0.$$

Тогда естественно ожидать то же поведение $k = j/L$, где величина j лежит между значениями соответствующего корня функции Бесселя и Неймана или их производных.

Однако для $-\nu < m \leq \nu$, т.е. в случае нулевых мод симметрия задачи выше (восстанавливается масштабная инвариантность). Поэтому следует ожидать появления голдстоуновских мод. В безграничном магнетике частоты голдстоуновских мод равны нулю, при наличии границы они проявляют себя как моды с аномально малой частотой, т.е. $kL \ll 1$. В частности, такие моды возникают для вихря в ферромагнетике с плоскостью легкого намагничивания в случае $|m| = 1$, отвечающем его трансляционному движению. Для этой моды $k \sim r_v/L^2 \ll 1/L$, где r_v — радиус кора вихря. Поскольку в этом случае решение приближалось к (17) с экспоненциальной точностью уже при $r > r_v$, то существование голдстоуновских мод полностью определялось матрицей рассеяния.

В случае БП-солитона при анализе голдстоуновских мод недостаточно ограничиться решением в виде (17), отвечающем задаче рассеяния, необходимо учитывать также вклад локализованной части решения. Соответствующий расчет достаточно громоздкий, поэтому для исследования голдстоуновских мод удобно исходить из полученных выше длинноволновых асимптотик, которые применимы при $r \ll 1/k$, т.е. при $kr < kL \ll 1$. Именно эта область актуальна для анализа таких мод. Заметим, что для модифицированной задачи голдстоуновские моды отсутствуют (в длинноволновых асимптотиках (18а) отсутствует малый параметр, поэтому граничное условие $g_m^x = 0$ приводит лишь к решению $k \sim 1/L$).

Для анализа голдстоуновских мод удобно вернуться к исходной задаче для функции f_m^x . В указанном диапазоне k для нахождения f_m^x естественно использовать приближение (18b). Проведенный на его основе анализ показывает, что голдстоуновские моды возникают только в области существования локальных мод. В случае граничных условий Дирихле их спектр, найденный из условия $f_m(kL) = 0$, имеет вид

$$kL = \begin{cases} 2\nu \sqrt{\frac{1+n}{\nu-n} \frac{\sin(\pi n/\nu)}{\pi}} \left(\frac{R}{L}\right)^n, & -\nu + 1 \leq m \leq \nu, \\ \sqrt{\frac{2}{\ln(L/R)}}, & m = -\nu + 1. \end{cases} \quad (43)$$

Для свободных граничных условий ситуация является более сложной. В частности, решение (18b) не допускает состояния с $kL \ll 1$ для граничных условий Неймана. Но в этом случае решение можно построить, рассмотрев цилиндрические функции мнимого аргумента, что дает $\omega = Dk^2 < 0$ для случая ферромагнетика или $\omega^2 < 0$ для антиферромагнетика. Ниже в этом разделе мы обсудим физический смысл отрицательных значений ω и ω^2 .

Следующие корни уравнения уже отвечают условию $kL \sim 1$. Им соответствуют $k^2 > 0$ для всех типов граничных условий. Так как при $k \sim 1/L$ и $R \ll L$ величина r/L на границе велика, значение $k_p L$ близко к величине соответствующего нуля функции Бесселя $j_p \equiv j_{\nu+1,p}$, где $J_{\nu+1}(j_p) = 0$, либо нуля ее производной j'_p , где $J_{\nu+1}(j'_p) = 0$, в случаях, соответственно, фиксированных и свободных граничных условий:

$$k_p L = j_p + \frac{2\nu}{kL} \frac{J_\nu(j_p)}{J'_{\nu+1}(j_p)} \left(\frac{R}{L}\right)^{2\nu}, \quad (44a)$$

$$k_p L = j'_p + \frac{2\nu}{kL} \frac{(R/L)^{2\nu}}{J''_{\nu+1}(j'_p)} \left\{ \frac{2\nu+1}{kL} J_\nu(j'_p) - J'_\nu(j'_p) \right\}. \quad (44b)$$

Таким образом, спектр собственных частот малой частицы магнетика в неоднородном состоянии содержит аномально малые частоты, которые должны проявляться в магнитном резонансе для образцов, содержащих такие частицы, например, феррожидкостей, гранулярных магнетиков. В работе [34] отмечалось, что распределение намагниченности в частице, находящейся в вихревом состоянии, хорошо аппроксимируется БП-солитоном. Хотя наш расчет применим буквально лишь к частицам в форме тонкого диска, обобщение на случай цилиндра не представляет проблемы.

Вернемся теперь к обсуждению смысла результата $k^2 < 0$ для голдстоуновской моды при свободных граничных условиях. Рассмотрим наиболее интересный случай $m = 1$, отвечающий трансляционному движению БП-солитона (как мы покажем ниже, параметры голдстоуновской моды можно непосредственно связать с уравнениями движения солитона). Параметры так называемой трансляционной голдстоуновской моды можно непосредственно получить исходя из точного решения (15). В области $kR \ll 1$ это решение имеет вид

$$\Psi(x) \propto r^{\nu+1} \left(1 - \frac{4\nu(\nu+1)}{(kr)^2} \frac{1}{(r/R)^{2\nu} + 1} \right),$$

откуда получается, что для фиксированных граничных условий

$$k^2 = \frac{4\nu(\nu+1)}{L^2} \left(\frac{R}{L} \right)^{2\nu}. \quad (45)$$

Для свободных граничных условий решение имеет тот же вид, но с отрицательным k^2 . Тот факт, что величина $k^2 < 0$ и в решение входят функции Бесселя мнимого аргумента, не имеет противоречия, так как мы рассматриваем это решение в области $|k| \lesssim 1/L$, когда экспоненциальный рост функции $I_n(z) \propto e^z$ при $z \gg 1$ не проявляется.

Для ферро- и антиферромагнетиков эти ответы приводят к принципиально различным физическим картинам динамики солитонов, поэтому эти случаи нужно анализировать отдельно.

В случае антиферромагнетика есть две частоты, отвечающие трансляционной голдстоуновской моде

$$\omega_0^2 = \pm \frac{4\nu(\nu+1)c^2}{L^2} \left(\frac{R}{L} \right)^{2\nu}. \quad (46)$$

Ясно, что эта частота имеет физический смысл только для фиксированных граничных условий, отрицательные ω^2 означают неустойчивость системы. В то же время значение $\omega = Dk^2 < 0$ для ферромагнетика не противоречит условию устойчивости. Эти ответы могут быть легко объяснены на основе простой физической картины движения солитона.

Очевидно, что для антиферромагнетика, который описывается лоренц-инвариантными уравнениями, динамика всех возмущений также должна носить лоренц-инвариантный характер. Для случая малых скоростей солитона, $v \ll c$, это означает, что в основном приближении координата солитона X (начало координат для X в центре системы) в случае антиферромагнетика удовлетворяет уравнению типа Ньютона

$$M \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = F_e, \quad (47a)$$

где F_e — внешняя сила, действующая на солитон, $M \mp E_0/c^2$ — эффективная масса солитона, E_0 — его энергия, см. (3). Считая, что при малом отклонении солитона от положения равновесия, расположенного в центре системы, F_e имеет вид

$$F_e = \frac{\alpha X}{L^p}, \quad (47b)$$

сопоставим значение частоты, полученное из (46), с величиной $\omega^2 = -\alpha/(ML^p)$. При этом получается, что $p = 2(\nu + 1)$, а величина $\alpha = \mp 16\pi\nu^2(\nu + 1)AR^{2\nu}$ соответственно для граничных условий Дирихле и Неймана. Это отвечает простой картине, что сила F_e есть сила изображения, действующая на солитон за счет наличия границы. Поскольку магнитные вихри взаимодействуют как $2D$ -заряды, а БП-солитон с $\nu = 1$ есть вихревой диполь, солитоны с данным $\nu > 1$ можно представить как 2ν -мультиполи, что объясняет величину p в зависимости (47b), а также знак α .

Таким образом, свойства трансляционной голдстоуновской моды в антиферромагнетике легко понять из следующего простого рассуждения. Солитон при отклонении из положения равновесия $X = 0$ движется под действием силы изображения. Для граничных условий Дирихле сила является возвращающей (отталкивание от границы) и движение устойчиво. Если же солитон притягивается к границе (граничные условия Неймана), то уравнение (47) описывает уход солитона из неустойчивого положения равновесия $X = 0$.

Учет следующих значений $k_{n,i}$ для $i > 0$ также может быть объяснен на основе эффективных уравнений для X . При этом появляется иерархия эффективных уравнений движения, содержащих только четные производные по времени. Коэффициенты при этих высших производных расходятся при $L \rightarrow \infty$. Уравнения такого типа были предложены в [33] для описания внутрислоистых вихрей в ферромагнетике.

Для ферромагнетика ситуация совершенно иная. Обычно для описания в нем динамики солитона используют уравнение

$$M \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + G \left[\mathbf{e}_z \frac{\partial X}{\partial t} \right] = F_e. \quad (48)$$

Здесь F_e — внешняя сила, которая, очевидно, такая же как и для случая антиферромагнетика, см. (47b), G — гироскопическое слагаемое, величина которого определяется только топологией и хорошо установлена [3, 24, 35, 36], $G = 4\pi\nu A/D$. О значении эффективной массы $2D$ -солитонов и вихрей данные противоречивы: в [37] утверждается, что в ферромагнетике с плоскостью легкого намагничивания величина M конечна, но расходится при стремлении к нулю константы анизотропии K , $M \propto 1/K$. В [38] для вихря был получен результат $M \propto 1/L$, в работе [33] масса $M \propto \ln L$, в [19] величина M конечна, но только при наличии в эффективных уравнениях типа (48) члена $G_3 [\mathbf{e}_z \partial^3 X / \partial t^3]$. В работах [36, 39] динамика БП-солитона описывалась на основе гамильтонова формализма с неканоническими скобками Пуассона. При этом связь импульса и скорости, а также значение массы не обсуждались.

Частота трансляционной голдстоуновской моды для ферромагнетика согласно (45) имеет вид

$$\omega_0 = \pm \frac{4\nu(\nu + 1)D}{L^2} \left(\frac{R}{L} \right)^{2\nu}, \quad (49)$$

знаки (+) и (–) соответствуют граничным условиям Дирихле и Неймана. В данном случае неустойчивости нет, так как уравнение (48) с $M = 0$ (с учетом только гиросилы) описывает малые колебания солитона как в случае притяжения к границе, так и в случае отталкивания. Учет следующей трансляционной моды, частота которой определяется формулой

$$\omega_1 = D (j/L)^2 \quad \text{или} \quad \omega_1 = -D (j'/L)^2 \quad (50)$$

в случаях граничных условий Дирихле или Неймана соответственно, позволяет сделать заключение об инерционных слагаемых в уравнении движения.

Считая, что $\omega_0 \ll \omega_1$, эти корни легко сопоставить с двумя частотами, возникающими при решении уравнения (48). Действительно, в этом случае $\omega_0 \approx -\alpha/(GL^p)$, что в точности дает значение частоты трансляционной голдстоуновской моды. Для второй частоты получается $\omega_1 \approx -G/M$. Эта величина может быть сопоставлена с (50), если предположить, что

$$M = -\frac{4\pi\nu A}{D^2} \left(\frac{L}{j}\right)^2 \quad \text{или} \quad M = \frac{4\pi\nu A}{D^2} \left(\frac{L}{j'}\right)^2 \quad (51)$$

соответственно для фиксированных либо свободных граничных условий. Таким образом, как и для вихря, динамика с частотой ω_1 определяется всей областью, ограничивающей магнетик. Как и коэффициент G_3 в уравнениях третьего порядка для вихрей в ферромагнетике, коэффициент M является нелокальным — он зависит от граничных условий и расходится при $L \rightarrow \infty$. По-видимому, расходимость M есть общее свойство $2D$ -магнетиков с бесщелевым законом дисперсии.

Отметим также, что конечное значение массы солитона, $M \propto 1/K$, где K — константа анизотропии, полученное в [37] для магнетика с осью легкого намагничивания, не противоречит найденной выше зависимости $M \propto L^2$ для изотропного ферромагнетика. Действительно, в магнетике с осью легкого намагничивания щель в спектре магнонов отлична от нуля и возникает характерный масштаб длины $\Delta_0 = \sqrt{A/K}$, откуда при замене $L \rightarrow \Delta_0$ в (51) получается тот же результат, что и в [37], $M \propto \Delta_0^2 \propto 1/K$.

7. ПЛОТНОСТЬ МАГНОННЫХ СОСТОЯНИЙ $2D$ -ИЗОТРОПНОГО МАГНЕТИКА В ПРИСУТСТВИИ СОЛИТОНА

Термодинамическое описание $2D$ -магнетика с учетом солитонных возбуждений может быть проведено на основе обобщения солитонной феноменологии, предложенной в [1, 2] для $1D$ -систем, на двумерный случай. Согласно этой концепции, при низких температурах состояние $1D$ -магнетика может быть описано в терминах почти свободных возбуждений — магнонов и кинков. Главный эффект их взаимодействия проявляется в виде асимптотического сдвига фазы магнона, рассеивающегося на кинке. Это обуславливает изменение полного числа состояний магнонов непрерывного спектра (по сравнению со случаем магнетика без солитона) на величину $\Delta N = \int_{-k_0}^{k_0} \rho(k) dk$, где

$\rho(k) = (1/2\pi) d\delta(k)/dk$ — плотность состояний. Эта величина является отрицательным целым числом, то есть число магнонных состояний в присутствии солитона уменьшается на величину ΔN . Это понятно, так как часть магнонных состояний теперь описывается как коллективные моды динамики кинка. Изменение плотности состояний

магнонов при добавлении к системе кинка приводит к изменению термодинамических характеристик газа магнонов, в частности, свободной энергии магнонов. В феноменологическом подходе это изменение свободной энергии магнонов рассматривается как изменение энергии кинка за счет кинк-магнонного взаимодействия.

Перенесем эти представления на $2D$ -случай. Ясно, что в $2D$ -магнетике полное число состояний должно быть пропорционально $L_x L_y$. Свободному магнону отвечает разложение (16) по цилиндрическим гармоникам $J_m(kr)e^{im\chi}$, в которых угловая переменная уже квантована и квантованию подлежит лишь радиальная часть $J(kr)$. В круговой геометрии с радиусом L простейшее условие квантования (41) имеет вид $J_m(kL) = 0$, откуда $k_n L = j_{m,n}$. В актуальной области $n \gg 1$ нули функции Бесселя $j_{m,n} \approx \pi n$, откуда допустимые значения волнового числа определяются формально тем же выражением, что и в $1D$ -случае. Однако надо учесть, что подобное приближение для $j_{m,n}$ справедливо при не слишком больших m . Для мод с $|m| \gg 1$ первый нуль $j_{m,1} \approx |m|$, поэтому в системе с конечным размером L возникает ограничение на допустимые номера мод: $|m| \leq L$. Учитывая это обстоятельство, приходим к правилу суммирования по магнонным состояниям для $2D$ -магнетика без солитона:

$$\sum_{k,m} = (L/\pi) \int_0^{k_0} dk \sum_{m=-kL}^{kL}$$

Естественно, что для полного числа магнонных состояний получается обычная формула $N_{2d} = L^2 k_0^2 / \pi$.

Учет взаимодействия магнонов с солитоном приводит к сдвигу фазы магнона и аналогично тому, как это имеет место для $1D$ -систем, изменяет выражение для плотности состояний (в данном случае парциальных состояний для магнонов с данным m) $\rho_m(k) = (1/\pi) d\delta_m(k)/dk$. Полная плотность магнонных состояний получается суммированием по m :

$$\mathcal{R}(k) = \sum_{m=-kL}^{kL} \rho_m(k) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=-kL}^{kL} \frac{d\delta_m(k)}{dk}. \quad (52)$$

Отметим, что плотность состояний $\mathcal{R}(k)$ в длинноволновой области имеет (интегрируемую) расходимость, обусловленную модой $m = 0$, для которой согласно (31) $\rho_0(k) \approx (2k)^{-1} \ln^{-2}(kR)$ расходится в пределе $kR \rightarrow 0$, ср. (36). Очевидно также, что при низких температурах, $T \ll T_*$, где $T_* = \hbar D/R^2$ для ферромагнетика и $T_* = \hbar c/R$ для антиферромагнетика, достаточно ограничиться рассмотренным длинноволновым приближением. В частности, в указанном приближении плотность энергетических состояний может быть представлена в виде

$$g(E) \propto \frac{1}{ER \ln^2(E/T_*)}. \quad (53)$$

Плотность состояний может быть в принципе рассчитана численно для произвольных k . При этом наличие полюса в амплитуде рассеяния магнонов с данным m означает, что полная фаза изменяется на $+\pi$ или $-\pi$ при изменении k от нуля до бесконечности, причем моды с $m > 1$ и $m < 1$ вносят противоположные по знаку вклады в $\mathcal{R}(k)$. Таким образом, для немалых значений k происходит не уменьшение полного числа магнонных состояний, как в $1D$ -случае, а перераспределение магнонных мод

между состояниями с различными m . В целом оказывается, что ряд (52) знакопеременный. При термодинамических вычислениях своеобразным регуляризующим фактором в этом суммировании является температура. Существенный вклад различных мод, в частности, изменение числа парциальных состояний на единицу, проявляется при увеличении k в порядке появления полюсов k_p амплитуды рассеяния. Поскольку величина k_p растет с ростом m (см. выше разд. 5), при повышении температуры последовательно проявляются вклады мод со все большими m .

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, для простейшей, но физически содержательной двумерной модели изотропного магнетика в настоящей работе построена матрица рассеяния магнов на солитоне. Анализ проведен как для уравнения Ландау—Лифшица, описывающего ферромагнетики, так и для лоренц-инвариантной сигма-модели, которая используется в теории поля и для описания антиферромагнетиков. Впервые получено точное решение задачи рассеяния для парциальной моды с азимутальным квантовым числом $m = 1$. Заметим, что такие решения известны даже не для всех одномерных задач.

Важно отметить, что возможность такого подробного исследования не связана с точной интегрируемостью задачи. Действительно, модель изотропного магнетика является точно интегрируемой в статическом случае, $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x, y)$, но ничего не известно о ее интегрируемости для $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x, y, t)$.

Вычислена амплитуда рассеяния для значений $m \neq 1$ (аналитически в длинноволновом приближении $kR \ll 1$ и при больших kR , а также численно при произвольных значениях kR). Обнаружено, что парциальные амплитуды рассеяния имеют полюсы (фазы рассеяния проходят через $\pi/2$) при определенных значениях $k = k_p$, причем величина k_p растет с ростом m приблизительно по линейному закону. Этого достаточно, чтобы вычислить магنونную плотность состояний в присутствии солитона.

Полученные данные использованы для описания различных физических свойств солитонов и локальных магنونных мод. В частности, вычислены частоты магنونных мод для магнетика с конечными размерами. Показано, что в малых частицах ферромагнетиков, содержащих солитон (частицах в так называемом вихревом состоянии, свойства которых широко обсуждаются), возникают собственные моды с аномально малыми частотами. Данные о частотах локальных мод использованы для построения уравнения движения солитона в ферромагнетике. Вычислена магنونная плотность состояний в присутствии солитона, что дает возможность построения солитонной феноменологии для 2D-магнетиков с учетом солитон-магنونного взаимодействия.

Отметим еще некоторые возможные применения полученных результатов. В ряде работ (см. обзор [7]) для упорядоченных 1D-сред, в том числе магнетиков, исследовались различные неравновесные характеристики газа солитонов, прежде всего, коэффициенты диффузии и вязкости. Развитые теории базировались на использовании точных волновых функций магнов на фоне солитона. Построенные в данной работе асимптотики волновых функций при малых k позволяют исследовать необратимые процессы для двумерного газа элементарных возбуждений, включающего солитоны и магны, в изотропных магнетиках при низких температурах.

Результаты, касающиеся σ -модели, легко переносятся на эвклидов случай и могут быть использованы для описания квантовых свойств спиновых цепочек с анти-

ферромагнитным взаимодействием. Свойства таких систем определяются инстантонами эвклидовой версии нелинейной σ -модели. Обсуждаются инстантоны со структурой БП-солитона (см. [40]) и так называемые мероны, имеющие половинный топологический заряд (см. [41]). Для вычисления предэкспоненциальных факторов в соответствующих амплитудах перехода (флуктуационного детерминанта) необходимо знать полный набор собственных состояний на фоне инстантона. Особенно существенными являются нулевые моды, см. подробнее [42]. Поэтому полученные в работе ответы, особенно касающиеся нетривиальных локальных нулевых мод, могут быть существенными для развития инстантонного подхода в квантовой теории одномерных магнетиков.

Мы благодарны В. Г. Барьяхтару, Г. Хольцварду (G. Holzwarth), Ф. Г. Мертенсу (F. G. Mertens), Д. И. Шеке и Г. М. Вайсину (G. M. Wysin) за обсуждение работы. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Украины (проект 2.4/27). Исследования одного из авторов (Д. Ш.) были поддержаны грантом Международной научно-образовательной программы № YSU082065.

Литература

1. J. A. Krumhansl and J. R. Schriber, Phys. Rev. B **11**, 3535 (1975).
2. J. F. Currie, J. A. Krumhansl, A. R. Bishop, and S. E. Trullinger, Phys. Rev. B **22**, 477 (1980).
3. Б. А. Иванов, А. К. Колежук, ФНТ **21**, 355 (1995).
4. М. М. Bogdan and A. S. Kovalev, Zh. Phys. B **71**, 341 (1988).
5. J. P. Boucher, G. Rius, and Y. Henry, Europhys. Lett. **4**, 1073 (1987).
6. F. G. Mertens, A. R. Bishop, G. M. Wysin, and C. Kawabata, Phys. Rev. B **39**, 591 (1989).
7. V. G. Bar'yakhtar and B. A. Ivanov, *Solitons and Thermodynamics of Low-Dimensional Magnets*, Sov. Sci. Rev., A. Phys. **16**, ed. by I. M. Khalatnikov (1992), p. 1.
8. F. Waldner, J. Magn. Magn. Mater. **31-34**, 1203 (1983).
9. F. Waldner, J. Magn. Magn. Mater. **54-57**, 873 (1986).
10. F. Waldner, J. Magn. Magn. Mater. **104-107**, 793 (1992).
11. C. E. Zaspel, Phys. Rev. Lett. **48**, 926 (1993).
12. C. E. Zaspel, T. E. Grigereit, and J. E. Drumheller, Phys. Rev. Lett. **74**, 4539 (1995).
13. C. E. Zaspel and J. E. Drumheller, Int. J. Mod. Phys. **10**, 3649 (1996).
14. K. Subbaraman, C. E. Zaspel, and J. E. Drumheller, Phys. Rev. Lett. **80**, 2201 (1998).
15. G. M. Wysin, Phys. Rev. B **49**, 8780 (1994).
16. G. M. Wysin and A. R. Völkel, Phys. Rev. B **54**, 12921 (1996).
17. G. M. Wysin, Phys. Rev. B **54**, 15156 (1996).
18. B. A. Ivanov, A. K. Kolezhuk, and G. M. Wysin, Phys. Rev. Lett. **76**, 511 (1996).
19. B. A. Ivanov, H. J. Schnitzer, F. G. Mertens, and G. M. Wysin, Phys. Rev. B **58**, 8464 (1998).
20. А. А. Белавин, А. М. Поляков, Письма в ЖЭТФ **22**, 503 (1975).
21. Б. А. Иванов, Письма в ЖЭТФ **61**, 898 (1995).
22. Б. А. Иванов, В. М. Муравьев, Д. Д. Шека, УФЖ **44**, 500 (1999).
23. А. К. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наук. думка, Киев (1983).
24. I. V. Bar'yakhtar and B. A. Ivanov, Sov. J. Low Temp. Phys. **5**, 361 (1979).
25. А. Ф. Андреев, В. И. Марченко, УФН **130**, 39 (1980).
26. B. A. Ivanov and D. D. Sheka, Chaos, Solitons & Fractals, Special issue «Solitons in Science and Engineering: Theory and Application» **5**, 2605 (1995).
27. Б. А. Иванов, А. Л. Сукстанский, ЖЭТФ **84**, 370 (1983).

28. B. A. Ivanov and A. L. Sukstanskii, *Sol. St. Comm.* **50**, 523 (1984).
29. А. М. Переломов, УФН **134**, 577 (1981).
30. V. B. Matveev and V. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer-Verlag, Berlin (1991).
31. Г. Е. Ходенков, ФММ **61**, 850 (1986); P. Sodano, M. El-Batanony, and C. R. Willis, *Phys. Rev. B* **34**, 4936 (1981); B. A. Ivanov and H. Benner, *J. Phys.: Condens. Matter* **11**, 513 (1999).
32. Б. А. Иванов, В. М. Муравьев, ФНТ **24**, 672 (1998).
33. F. G. Mertens, H. J. Schnitzer, and A. R. Bishop, *Phys. Rev. B* **56**, 2510 (1997).
34. N. A. Usov and S. E. Peschany, *J. Magn. Magn. Mat.* **118**, L290 (1993).
35. А. Малоземов, Дж. Слонзуски, *Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами*, Мир, Москва (1982).
36. S. Komineas and N. Papanicolaou, *Physica D* **99**, 81 (1996).
37. В. А. Иванов and V. A. Stephanovich, *Phys. Lett. A* **141**, 89 (1989).
38. F. G. Mertens et al., in *Nonlinear Coherent Structures in Physics and Biology*, ed. by F. G. Mertens and K. H. Spatschek, Plenum, New York, (1994).
39. N. Papanicolaou and T. N. Tomaras, *Nucl. Phys. B* **360**, 425 (1991).
40. E. Fradkin, in *Frontiers in Physics*, **82**, Addison-Wesley (1991).
41. Ian Affleck, *J. Phys.: Condens. Matter.* **1**, 3047 (1989).
42. А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, В. А. Новиков, М. А. Шифман, УФН **136**, 553 (1979).