ЖЭТФ, 1999, том 116, вып. 4(10), стр. 1131–1147

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ КВАНТОВЫХ ЧИСЕЛ

*С. А. Булгадаев**

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
117334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 28 января 1999 г.

Показано, как можно определить векторные топологические заряды для топологических возбуждений нелинейных σ-моделей на компактных однородных пространствах T_G и G/T_G (где G — простая компактная группа Ли, а T_G — ее максимальная коммутативная подгруппа). Для некоторых случаев найдены явные решения, их энергии и взаимодействие различных топологических зарядов. Обсуждается возможность топологической интерпретации квантовых чисел групп и частиц.

PACS: 02.20.Qs; 11.27.+d; 11.30.Hv

1. ВВЕДЕНИЕ

Открытие новых, топологически стабильных, решений [1–4] возродило старую, восходящую к античности, гипотезу о топологической природе простейших частиц. Например, Декарт предлагал вихревую модель магнетизма [5], Гельмгольц — вихревую теорию материи [6], а лорд Кельвин выдвигал предположение, что атомы могут быть представлены как заузленные конфигурации «эфира» [6]. И хотя оба предположения оказались неправильными, они были очень плодотворными: они стимулировали как изучение этих явлений и развитие теории завихренности и теории узлов [7], так и их применения в различных областях физики от гидродинамики до теории полимеров [8–10]. Преимущество этой идеи в сравнении с обычным подходом, рассматривающим частицы как точечные бесструктурные объекты, состоит в том, что она предлагает наглядный образ этих частиц. Современная физика имеет много общих свойств с физикой второй половины XIX века, при этом конденсат различных полей играет роль «эфира» или других гипотетических жидкостей. По этой причине аналогичные идеи периодически возрождались в связи с различными событиями в истории физики. В частности, такие идеи, связанные с тем или иным топологическим инвариантом, достигли большого успеха в физике конденсированного состояния, см., например, [9–11]. В теории поля гипотеза о топологической природе элементарных частиц и их свойств тоже была очень популярна, так как она давала более наглядную интерпретацию их структуры и квантовых чисел по сравнению с существующим формальным, чисто алгебраическим описанием. Имеется огромная литература по этому вопросу, мы только упомянем здесь книгу [12] для дальнейшей информации. Но набор топологических зарядов, предлагаемых только каким-нибудь одним топологическим инвариантом, оказывается недостаточным для полного описания реальных частиц с внутренними симметриями.

*E-mail: bulgad@itp.ac.ru

Для того чтобы топологическая интерпретация была возможна, необходимы следующие условия:

1) соответствующая теория поля должна иметь вырожденный вакуум, который образует некоторое многообразие $\mathscr{M}$ с нетривиальной топологией,

2) теория должна иметь решения с нетривиальной топологией и конечной (или логарифмической) энергией,

3) множество возможных топологических зарядов должно быть таким же, как и множество возможных квантовых чисел.

Два первых свойства выполняются для таких топологических решений как солитоны, вихри, инстантоны и монополи, но третье свойство остается невыполненным, по крайней мере, для трех первых возбуждений.

Здесь стоит отметить, что за прошедшее время в математике были развиты адекватные методы для описания и исследования соответствующих топологических задач (см., например, [13]).

Обычно квантовые числа частиц определяются весами неприводимых представлений, к которым они принадлежат. Как известно, веса простых компактных групп G связаны с максимальной коммутативной подгруппой T_G группы G, т. е. с максимальным абелевым тором Картана [14].

Все возможные веса простой компактной группы образуют n-мерную решетку $\mathbb{L}_w$, где n есть ранг группы G. Поэтому топологические заряды тоже должны принадлежать этой решетке. Ранее было показано, что солитоны с топологическими изовекторными зарядами, принадлежащими решетке $\mathbb{L}_w$ группы G, могут существовать в двумерных теориях, обобщающих теорию синус-Гордон (СГ). Эти теории связаны с характерами групп G ранга $n > 1$ [15]. Их вакуумные конфигурации являются точечными и образуют бесконечные решетки. Заряды соответствующих солитонов могут быть связаны с гомотопической группой π_0 этих решеток.

Вообще возможность существования топологических возбуждений в системах с вырожденным вакуумом зависит от нетривиальности гомотопических групп $\pi_i(\mathscr{M})$ вакуумного пространства $\mathscr{M}$. Например, $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ соответствует обычным вихрям и одномерным инстантонам [16], тогда как $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$ соответствует двумерным инстантонам [4, 13]. Как было показано в [17], для получения топологических зарядов, принадлежащих решетке весов простой компактной группы Ли G, необходимо рассмотреть следующие многообразия: тор T_G в случае вихрей и одномерных инстантонов и более специальное однородное пространство группы G, флаговое пространство $F_G = G/T_G$, в случае двумерных инстантонов.

В этой статье мы продолжим рассмотрение этих многообразий $\mathscr{M}$. Будет показано, как для них можно определить векторные топологические заряды, а также будут найдены явные решения с такими зарядами. Мы будем иметь дело, в основном, с нелинейными σ-моделями на многообразиях $\mathscr{M}$, так как они являются эффективными теориями для большого класса моделей, имеющих $\mathscr{M}$ в качестве их вакуумных многообразий. Мы также обсудим условия, при которых квантовые числа групп G допускают топологическую интерпретацию.

2. МНОГООБРАЗИЯ С ВЕКТОРНОЙ ГРУППОЙ π_1

Удобно начать изучение многообразий с векторными (т. е. ранга $n > 1$) гомотопическими группами с многообразий с векторной группой $\pi_1(\mathscr{M})$. Для наших целей будет достаточно рассмотреть только многообразия с абелевыми π_1, так как соответствующие топологические заряды должны коммутировать друг с другом. Мы ограничимся также для простоты свободными гомотопическими группами. Хотя их свойства просты и хорошо известны, мы обсудим их, уделяя особое внимание возможным векторным структурам. Это поможет нам при рассмотрении многообразий с векторными группами π_2. Простейшим обобщением окружности

$$S^1 = e^{2\pi i\phi}, \quad 0 \le \phi \le 1,$$

является тор T^n, который можно представить как прямое произведение n окружностей

$$T^n = \bigotimes_{i=1}^{n} S_i^1. \tag{1}$$

Тор T^n может быть также представлен как фактор n-мерного эвклидова пространства $\mathbb{R}^n$:

$$T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n, \tag{2}$$

где $\mathbb{Z}^n$ — n-мерная простая кубическая целочисленная решетка

$$\mathbb{Z}^n = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_i. \tag{3}$$

Более общий n-мерный тор T_L ранга n может быть определен как фактор

$$T_L = \mathbb{R}^n/\mathbb{L}, \tag{4}$$

где $\mathbb{L}$ — некоторая n-мерная невырожденная решетка в $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{L} = \sum_{i=1}^{n} n_i \mathbf{e}_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}_i, \quad \mathbf{e}_i \in \{\mathbf{e}_i\}_L. \tag{5}$$

Здесь набор линейно независимых векторов $\{\mathbf{e}_i\}_L$, $i = 1, ..., n$, образует базис решетки $\mathbb{L}$. Для T^n набор $\{\mathbf{e}_i\}_L$ совпадает с каноническим ортонормальным репером

$$\mathbf{e}_i = (0, .., 0, 1_i, 0, ..., 0), \quad i = 1, ..., n.$$

В любой решетке базис можно выбрать разными способами, при этом все базисы связаны между собой модулярными преобразованиями

$$\{\mathbf{e}'_i\}_L = M\{\mathbf{e}_i\}_L, \quad \det(M) = \pm 1, \tag{6}$$

где матрицы M имеют целочисленные элементы. Для базисов с одинаковой ориентацией $\det(M) = 1$. Обычно наиболее удобным базисом является базис, содержащий векторы с минимальной возможной нормой.

Первая гомотопическая группа тора $\pi_1(T^n)$, будучи группой гомотопических классов отображений сферы S^1 в T^n, обычно записывается в следующем виде:

$$\pi_1(T^n) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_i = \mathbb{Z}^n, \tag{7}$$

где i-ая компонента описывает отображение S^1 в i-ю окружность тора T^n. Ясно, что отображения в разные компоненты не могут уничтожать друг друга. Такое же выражение часто используется для произвольных торов T_L. Тогда эта форма только означает, что координаты различных гомотопических классов отображений являются целочисленными в некотором базисе, но не содержит никакой информации об этом базисе. Это означает, что для полного описания гомотопической группы в $\pi_1(T_L)$ нужно ввести векторный базис. Для нахождения явной формы этого базиса можно использовать факторную (косетную) природу тора T_L. При этом желательно выбрать его совместным с векторной структурой накрывающего пространства $\mathbb{R}^n$. Наиболее естественный способ сделать это состоит в сохранении эвклидовой векторной структуры $\mathbb{R}^n$. Тогда получается следующее выражение для $\pi_1(T_L)$:

$$\pi_1(T_L) = \mathbb{L}, \tag{8}$$

где теперь $\pi_1(T_L)$ содержит в явном виде базисные векторы $\mathbf{e}_i$. Эта форма содержит больше информации, чем (7), так как кроме целочисленности гомотопических классов ($n_i \in \mathbb{Z}_i$) она содержит геометрические характеристики тора T_L. Для полного описания еще нужно знать метрику и соответствующее скалярное произведение в пространстве топологических зарядов. Они будут очень важны при обсуждении взаимодействия топологических возбуждений с разными топологическими зарядами. Отметим, что эта метрика может отличаться от метрики накрывающего пространства (см. ниже).

Так как каждому базисному вектору $\mathbf{e}_i$ соответствует нетривиальный элементарный гомологический цикл γ_i тора T_L, то соответствующая гомологическая группа циклов $H_1(T_L, \mathbb{Z})$ совпадает с группой $\pi_1(T_L)$. Это есть проявление общей теоремы Гуревича об изоморфизме первых нетривиальных гомотопических и гомологических групп [13]. Следовательно, $H_1(T_L, \mathbb{Z})$ тоже имеет векторную структуру, которая может быть записана в виде

$$\gamma = \sum n_i \boldsymbol{\gamma}_i, \; \boldsymbol{\gamma}_i = \gamma_i \mathbf{e}_i, \; n_i \in \mathbb{Z}_i. \tag{9}$$

Аналогичная векторная структура может быть введена в когомологическую группу целочисленных дифференциальных 1-форм $\delta \in H^1(T_L, \mathbb{Z})$, дуальную к группе $H_1(T_L, \mathbb{Z})$:

$$\boldsymbol{\delta} = \sum_k n_k \boldsymbol{\delta}_k, \quad n_k \in \mathbb{Z},$$

с базисом $\{\boldsymbol{\delta}_k\} = \{\delta_k \mathbf{s}_k\} = \{d\phi^k \mathbf{s}_k\}$ и с конволюцией

$$(\boldsymbol{\gamma}_i \circ \boldsymbol{\delta}_k) = (\mathbf{e}_i \mathbf{s}_k) \oint_{\gamma_i} d\phi^k = \delta_{ik}, \tag{10}$$

где $\{\mathbf{s}_k\}$ есть базис дуальной решетки $\mathbb{L}^*$:

$$(\mathbf{s}_i \mathbf{e}_k) = \delta_{ik}, \tag{11}$$

а $(\mathbf{s}_i\mathbf{e}_k)$ означает эвклидово скалярное произведение векторов $\mathbf{s}_i$ и $\mathbf{e}_k$.

Топологические заряды Q тора T^n обычно определяются как наборы целых чисел, равных числам намоток вокруг элементарных циклов γ_i:

$$Q = (q_1, ..., q_n), \ q_i \in \mathbb{Z}_i. \tag{12}$$

Числа намоток могут быть записаны как интегралы в пространстве параметров тора T^n от 1-форм δ_k, сопряженных циклам γ_i,

$$q_i = \oint\limits_{\gamma_i} d\phi = \oint\limits_{\gamma_i} \sum_{k=1}^{n} n_k d\phi^k = n_i, \ d\phi = \sum_{k=1}^{n} n_k d\phi^k,$$

или

$$q_i = \oint\limits_{\gamma} d\phi^i = \sum_{k=1}^{n} n_k \oint\limits_{\gamma_k} d\phi^i = n_i, \ \gamma = \sum_{k=1}^{n} n_k \gamma_k. \tag{13}$$

Здесь $\gamma \in H_1(T^n, \mathbb{Z})$ и $d\phi \in H^1(T^n, \mathbb{Z})$ — соответственно, некоторые замкнутые контур и 1-форма на T^n. Аналогичные выражения для Q часто используются и в случае произвольных торов T_L. В этом формальном виде все Q имеют одинаковую целочисленную структуру. Все геометрические свойства зарядов Q опять скрыты в абстрактных базисах элементарных циклов или 1-форм.

Для получения векторных топологических зарядов, соответствующих векторной гомотопической группе, можно использовать любую упомянутую выше векторную структуру. Например, можно подняться на накрывающее пространство $\mathbb{R}^n$ и определить векторные топологические заряды $\mathbf{Q}$ как контурные интегралы от векторных 1-форм dx^k ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$) вдоль кривой γ^*, которая является прообразом замкнутого контура γ на торе:

$$\mathbf{Q} = \int\limits_{\gamma^*} d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} n_i \mathbf{e}_i. \tag{14}$$

Последнее равенство следует из того условия, что оба конца кривой γ^* должны принадлежать решетке $\mathbb{L}$. Такое же выражение получается, если использовать векторную структуру из (9) в пространстве циклов γ:

$$\mathbf{Q} = \oint\limits_{\gamma} d\phi = \sum_{i,k}^{n} n_i \mathbf{e}_i \oint\limits_{\gamma_i} d\phi^k = \sum_{i=1}^{n} n_i \mathbf{e}_i. \tag{15}$$

В дальнейшем мы будем применять второй подход, использующий векторную структуру гомологической группы, ко всем рассматриваемым $\mathscr{M}$, так как они будут удовлетворять условиям теоремы Гуревича. Такой выбор является как наглядным, так и удобным, особенно тогда, когда используемые дифференциальные формы фиксированы, например, функционалом действия теории или свойствами симметрии.

Итак, мы ввели векторные топологические заряды тора T_L, содержащие в явной форме базис решетки $\{\mathbf{e}_i\}_L$. Для получения метрики и соответствующего скалярного произведения в пространстве топологических зарядов нужно рассмотреть конкретную реализацию тора T_L и киральную модель на нем. Тор T_L ранга n может быть реализован как диагональная n-мерная матрица $\mathbf{t}$

$$\mathbf{t} = \mathrm{diag}(e^{2\pi i(\mathbf{s}_1\boldsymbol{\phi})}, ..., e^{2\pi i(\mathbf{s}_n\boldsymbol{\phi})}), \tag{16}$$

где набор векторов $\{\mathbf{s}_i\}$ является базисом дуальной решетки $\mathbb{L}^*$ из (10), (11). Легко увидеть, что каждому элементарному циклу $\mathbf{e}_i$ соответствует одна экспонента в матрице $\mathbf{t}$ с дуальным вектором $\mathbf{s}_i$.

Решетка $\mathbb{L}^*$ является решеткой весов тора T_L, рассматриваемого как группа. Для топологической интерпретации всех его весов необходимо, чтобы $\mathbb{L} \supseteq \mathbb{L}^*$. Например, решетка $\mathbb{Z}^n$ совпадает с дуальной к ней, и, следовательно, все веса группы T^n имеют топологическую интерпретацию.

По этой причине, в случае общих торов T_L, торы, соответствующие самодуальным решеткам $\mathbb{L} = \mathbb{L}^*$, играют важную роль, так как для них все веса находятся во взаимно-однозначном соответствии с возможными топологическими зарядами.

Теперь мы перейдем к рассмотрению компактных киральных моделей, связанных с торами T_L, и приведем явную реализацию введенных выше векторных топологических зарядов. Первая модель обобщает двумерную нелинейную σ-модель на окружности S^1 [19]. Мы будем использовать для T_L реализацию в форме (16). Двумерную (эвклидову) нелинейную σ-модель на T_L можно определить следующим действием $\mathscr{S}$ (или энергией E):

$$\mathscr{S} = \frac{1}{2\alpha}\int d^2x\,\mathrm{Tr}(\mathbf{t}_\mu^{-1}\mathbf{t}_\mu) = \frac{(2\pi)^2}{2\alpha}\int d^2x(\boldsymbol{\phi}_\mu\cdot\boldsymbol{\phi}_\mu), \tag{17}$$

где $\mathbf{t}_\mu = \partial_\mu\mathbf{t}$, $\boldsymbol{\phi}_\mu = \partial_\mu\boldsymbol{\phi}$, $\mu = 1, 2$. Здесь новое скалярное произведение $(\cdot)$ определяется эффективной n-реперной метрикой g_{ik} на пространстве тора:

$$(\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\phi}) = \sum_{p=1}^{n}(\mathbf{s}_p\boldsymbol{\phi})(\mathbf{s}_p\boldsymbol{\phi}) = \sum g_{ik}\phi^i\phi^k, \quad g_{ik} = \sum_{p=1}^{n} s_p^i s_p^k. \tag{18}$$

Легко увидеть, что метрика g_{ik} для общей решетки $\mathbb{L}$ не совпадает с канонической эвклидовой на $\mathbb{R}^n$. Именно эта метрика будет определять взаимодействие различных топологических зарядов на торе T_L.

Такие киральные модели можно рассматривать как эффективные теории, соответствующие в длинноволновом пределе теориям типа Гинзбурга—Ландау с вакуумным многообразием $\mathscr{M} = T_L$ или решеточным моделям с переменными, принадлежащими T_L. Из-за нетривиальности $\pi_1(T_L)$ в теории имеются вихревые решения. Эти вихревые решения плохо определены на малых расстояниях, где должно быть использовано полное действие для нахождения структуры вихревого ядра. Но для описания топологических свойств важно только поведение на больших масштабах. По этой причине мы будем использовать в наших рассуждениях на малых расстояниях эффективный обрезающий параметр a, который является аналогом радиуса ядра вихря или постоянной решетки.

Соответствующие уравнения

$$g_{ik}\partial^2\phi^k = 0 \tag{19}$$

имеют N-вихревые решения в плоскости $\mathbb{R}^2$ с N проколами в точках (x_i, y_i):

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{q}_i \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{y - y_i}{x - x_i}\right), \quad \mathbf{q}_i \in \mathbb{L}, \quad (\mathbf{q}_i \mathbf{s}_k) \in \mathbb{Z}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{20}$$

Энергия одного вихря с топологическим зарядом

$$\mathbf{q} = \sum_{i=1}^{n} n_i \mathbf{e}_i$$

логарифмически расходится:

$$E_q = \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q})}{2\alpha} 2\pi \ln \frac{R}{a}, \quad (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{n} n_i^2, \tag{21}$$

где R — радиус пространства. Энергия N-вихревого решения с полным топологическим зарядом

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{q}_i = 0$$

конечна и равна

$$E_N = \frac{2\pi}{2\alpha} \sum_{i \neq k}^{N} (\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_k) \ln \frac{|x_i - x_k|}{a} + C(a) \sum_{i}^{N} (\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_i). \tag{22}$$

Здесь скалярное произведение топологических зарядов дается формулой

$$(\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_k) = \sum_{p=1}^{n} n_{ip} n_{kp}, \quad \mathbf{q}_i = \sum_{p=1}^{n} n_{ip} \mathbf{e}_p, \tag{23}$$

а $C(a)$ — неуниверсальная константа, определяющая «собственную» энергию (или энергию ядра) вихрей и зависящая от вида регуляризации ядра. Из (21), (22) следует, что независимо от решетки $\mathbb{L}$ топологические заряды, соответствующие различным циклам, не взаимодействуют между собой, как и в случае тора T^n! Это является следствием появления эффективной метрики g_{ik} на пространстве тора. Мы видим, что свойства вихревых возбуждений нелинейных σ-моделей на всех торах T_L (с размерностью тора, равной его рангу, к ним также относятся комплексные абелевы торы) подобны таковым нелинейной σ-модели на торе T^n. Это можно легко понять, так как на любом торе всегда можно деформировать исходные циклы в канонические. В то же время этот результат подтверждает, что мы правильно ввели векторную структуру в пространство топологических зарядов.

Но это еще не все. Существуют торы, отличные от торов типа T^n и T_L. Они могут быть названы вырожденными, потому что их ранг n меньше, чем их размерность p. Мы рассмотрим их в следующем разделе.

Другие модели, которые мы рассмотрим здесь, — это одномерные конформные σ-модели на T_L, которые обобщают аналогичные σ-модели на S^1. Их действие имеет следующий вид:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\alpha} \int dx dx' \operatorname{Tr} \frac{|\mathbf{t}(x) - \mathbf{t}(x')|^2}{(x - x')^2} = \tag{24}$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\int \frac{dxdx'}{(x-x')^2} 2\sum_{i=1}^{n}\left\{1-\cos\left[2\pi(\mathbf{s}_i(\phi(x)-\phi(x')))\right]\right\}, \qquad (25)$$

где $x \in \mathbb{R}^1$. Следуя методу статьи [16], можно показать, что эти модели имеют N-инстантонные решения вида (20) с векторными топологическими зарядами $\mathbf{Q} = \sum_i^N \mathbf{q}_i \in \mathbb{L}$:

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{q}_i \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x-a_{1i}}{a_{2i}}. \qquad (26)$$

Здесь a_{1i}, a_{2i} — произвольные константы, характеризующие положение и ширину соответствующих инстантонов. Все топологические заряды $\mathbf{q}_i$ в (26) должны одновременно удовлетворять условию

$$(\mathbf{q}_i\mathbf{s}_k) \le 0 \quad \text{или} \quad (\mathbf{q}_i\mathbf{s}_k) \ge 0 \qquad (27)$$

для всех $\mathbf{s}_k$, $k = 1, ..., n$. Это условие обобщает аналогичное условие в σ-модели на S^1, которое, в свою очередь, является аналогом свойства аналитичности (или антианалитичности) двумерных инстантонов. Соответствующее действие равно

$$\mathcal{S}_N = \frac{(2\pi)^2}{2\alpha}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i}^{N}|(\mathbf{s}_k\mathbf{q}_i)|, \quad (\mathbf{s}_k\mathbf{q}_i) \in \mathbb{Z}. \qquad (28)$$

Такая аддитивная форма действия, линейная по $|q_i|$, имеет место только для наборов зарядов, удовлетворяющих условию (27). Взаимодействие между различными зарядами появляется только для суперпозиций инстантонов с произвольными зарядами (или при учете флуктуаций на фоне инстантонов).

3. ТОРЫ КАРТАНА

В этом разделе исследованы вырожденные торы, связанные с максимальными абелевыми торами Картана T_G простых компактных групп Ли G. Мы рассмотрим некоторые их представления, соответствующие гомотопические группы $\pi_1(T_G)$ и топологические заряды.

Тор Картана T_G состоит из элементов

$$\mathbf{g} = e^{2\pi i(\mathbf{H}\phi)}, \quad \mathbf{H} = \{H_1, ..., H_n\} \in \mathcal{C}, \quad [H_i, H_j] = 0, \qquad (29)$$

где n — ранг группы G, $\mathcal{C}$ — максимальная коммутативная подалгебра Картана алгебры Ли $\mathcal{G}$ группы G. В (29) предполагается, что произведение в $(\mathbf{H}\phi)$ есть обычное эвклидово скалярное произведение. Все H_i, благодаря их коммутативности, могут быть одновременно диагонализованы. Их собственные значения $\mathbf{w}$, называемые весами, зависят от конкретного представления G и $\mathcal{C}$. Веса $\{\mathbf{w}_a\}_\tau$, $a = 1, ..., p$, принадлежащие p-мерному неприводимому представлению $\tau(G)$, образуют набор «квантовых чисел» этого представления.

Все возможные веса $\mathbf{w}$ односвязной группы G (или универсальной накрывающей группы $\tilde{G}$ в случае многосвязной группы G) образуют решетку весов $\mathbb{L}_w$. Ее базис может быть выбран разными способами. С точки зрения теории представлений наиболее удобным является базис фундаментальных весов $\bar{\mathbf{w}}_i$, $i = 1, ..., n$. Любой вес $\mathbf{w}$ может быть представлен в следующем виде:

$$\mathbf{w} = \sum_{1}^{n} n_i \bar{\mathbf{w}}_i, \tag{30}$$

где все n_i целые. В общем случае, не все $\bar{\mathbf{w}}_i$ имеют минимальную норму. В некоторых случаях более удобным является базис из векторов с минимальными возможными нормами.

Решетка весов $\mathbb{L}_w$ и связанные с ней решетка корней $\mathbb{L}_r$ и решетка дуальных корней $\mathbb{L}_v$ необходимы для нахождения $\pi_1(T_G)$. Последняя может зависеть от конкретного представления $\tau(G)$. Группа $\pi_1(T_G)$ может быть найдена в общем виде методами теории групп и алгебр Ли [14]. Мы используем здесь более простой и наглядный способ, использованный выше для торов T_L. Так как в каждом неприводимом представлении $\tau(G)$ размерности p можно выбрать собственные векторы $|a\rangle$ операторов $\mathbf{H}$ в качестве базиса

$$\mathbf{H}|a\rangle = \mathbf{w}_a|a\rangle, \quad a = 1, ..., p, \tag{31}$$

то в этом базисе все H_i (а также любой элемент $\mathbf{g} \in T_G$) имеют диагональную форму:

$$\mathbf{g}_\tau = \mathrm{diag}(e^{2\pi i(\mathbf{w}_1\phi)}, ..., e^{2\pi i(\mathbf{w}_p\phi)}). \tag{32}$$

В общем случае в (32) некоторые веса могут совпадать или даже равняться 0. След элемента $\mathbf{g}_\tau$ является характером τ-представления G:

$$\chi(\mathbf{g})_\tau = \sum_{a=1}^{p} e^{2\pi i(\mathbf{w}_a\phi)}.$$

Главные отличия этой формы торов T_G от торов типа T_L в форме (16) следующие:

1) размерность диагональных матриц в (32) совпадает с размерностью p представления τ, которое обычно больше ранга n группы G;

2) набор весов $\{\mathbf{w}\}_\tau$ имеет дискретную симметрию Вейля, которая обеспечивает вейль-инвариантность тора T_G и приводит к двум свойствам:

$$\sum_{a=1}^{p} \mathbf{w}_a = 0, \quad g_{ik} = \sum_{a=1}^{p} w_i^a w_k^a = B_\tau \delta_{ik}, \tag{33}$$

где константа B_τ зависит от представления.

Из (33) следует, что в случае тора T_G эффективная метрика g_{ik} на пространстве его параметров пропорциональна эвклидовой. Это свойство окажется очень важным для взаимодействия различных топологических зарядов и для отличия свойств нелинейных σ-моделей на торах T_L и торах T_G [18].

Из (32) очевидно, что в этом представлении все $\mathbf{g} \in T_G$ периодичны с решеткой периодов $\mathbb{L}_\tau^{-1}$, обратной решетке $\mathbb{L}_\tau$, порождаемой весами $\mathbf{w}_a (a = 1, ..., p)$ представления τ.

Это означает, что $\mathbb{L}_\tau^{-1}$ образует множество всех топологических зарядов τ-представления тора T_G. Обозначим это множество $\mathbb{L}_\tau^Q$. Из определения решетки $\mathbb{L}_\tau$ ясно, что для сопряженных представлений (чьи наборы весов противоположны друг другу) эти решетки совпадают. Вообще говоря, решетка $\mathbb{L}_\tau$ может быть подрешеткой решетки $\mathbb{L}_w$: $\mathbb{L}_w \supseteq \mathbb{L}_\tau$. Если $\mathbb{L}_w \supset \mathbb{L}_\tau$, тогда можно определить фактор-группу $\pi_\tau = \mathbb{L}_w/\mathbb{L}_\tau$, которая должна быть конечной абелевой группой.

Решетка дуальных корней $\mathbb{L}_v$ обратна решетке $\mathbb{L}_w$ и имеет свой базис дуальных корней $\mathbf{r}_i^v$ ($i = 1, ..., n$):

$$(\mathbf{r}_i^v \bar{\mathbf{w}}_k) = \delta_{ik}. \tag{34}$$

Теперь можно увидеть, что для тех представлений τ, для которых $\mathbb{L}_\tau = \mathbb{L}_w$, решетка $\mathbb{L}_\tau^Q$ изоморфна n-мерной решетке $\mathbb{L}_v$ дуальных корней $\mathbf{r}^v$:

$$\mathbb{L}_\tau^Q = \mathbb{L}_v.$$

Для тех представлений, для которых $\mathbb{L}_w \supset \mathbb{L}_\tau$, решетка $\mathbb{L}_\tau^Q$ увеличивается на фактор π_τ:

$$\mathbb{L}_\tau^Q = \mathbb{L}_v \times \pi_\tau,$$

здесь символ $\times$ обозначает полупрямое произведение. Это означает, что $\mathbb{L}_v$ является подрешеткой решетки $\mathbb{L}_\tau^Q$. Такая структура $\mathbb{L}_\tau^Q$ аналогична структуре группы $\pi_1(T_G)$ для многосвязных групп G [17]. Опять максимальный фактор π_τ соответствует присоединенному (ad) представлению

$$\pi_{ad} = Z_G,$$

где Z_G — центр группы G.

Для топологической интерпретации всех весов $\{\mathbf{w}_a\}_\tau$ в терминах топологических зарядов $\mathbf{Q} \in \mathbb{L}_\tau^Q$ нужно, чтобы

$$\mathbb{L}_\tau^Q = \mathbb{L}_v \times \pi_\tau \supseteq \mathbb{L}_\tau = \mathbb{L}_w/\pi_\tau.$$

В случае точного равенства это дает

$$\mathbb{L}_v \times \pi_\tau = \mathbb{L}_w/\pi_\tau.$$

Структура всех решеток $\mathbb{L}_w$, $\mathbb{L}_r$, $\mathbb{L}_v$ простых компактных групп известна [14]. Например, решетки $\mathbb{L}_r$ и $\mathbb{L}_v$ принадлежат четырем сериям целочисленных решеток типов A, D, E, Z. Для просто устроенных групп G (т. е. для групп серий $A_n = SU(n+1)$, $D_n = SO(2n)$, $E = E_{6,7,8}$) решетка $\mathbb{L}_v$ совпадает с решеткой корней $\mathbb{L}_r$, которая есть подрешетка решетки весов $\mathbb{L}_r \subseteq \mathbb{L}_w$:

$$\mathbb{L}_w/\mathbb{L}_r = Z_G. \tag{35}$$

В дальнейшем мы рассмотрим только минимальное и присоединенное представления. Веса минимальных представлений обычно генерируют решетку весов $\mathbb{L}_w$ (кроме случая ортогональных групп из серий B, D). В этом случае решетка топологических зарядов совпадает с решеткой дуальных корней $\mathbb{L}_v$. Весами присоединенных представлений являются корни. Они генерируют решетку весов $\mathbb{L}_r$. В этом случае топологические заряды принадлежат решетке $\mathbb{L}_r^{-1} = \mathbb{L}_{w^*}$, которая является решеткой весов дуальной группы

G^* (или решеткой дуальных весов $\mathbf{w}^*$). Отсюда следует, что для любой простой компактной группы G топологические заряды тора T_{G^*} присоединенной дуальной группы G^* воспроизводят все веса группы G.

Обычно стараются описать все веса группы G в терминах самой группы G. Как было показано в [17], для групп $G = G_2, E_8, C_n, \mathrm{ad}A_n$, $\mathrm{ad}B_n, \mathrm{ad}D_n$ и $\mathrm{ad}E_{6,7}$ решетка всех возможных топологических зарядов $\mathbb{L}_t \supseteq \mathbb{L}_w$. Следовательно, для этих групп имеется возможность топологической интерпретации всех их «квантовых чисел» в терминах этих же групп. Для групп G и G' таких, что $\mathbb{L}_t^G = \mathbb{L}_w^{G'}$, есть также возможность топологической интерпретации всех «квантовых чисел» группы G' в терминах топологических зарядов группы G. Например, $\mathbb{L}_{min}^{G_2} = \mathbb{L}_w^{A_2}$. Для других групп G, для которых $\mathbb{L}_t^{adG} = \mathbb{L}_w^G$ (например, $G = A_n, B_n, D_n, E_{6,7}$), не все наборы топологических зарядов, отвечающих некоторому представлению (например, кварковые представления групп A_n или спинорные представления групп B_n, D_n), будут соответствовать точным (однозначным) представлениям.

Теперь рассмотрим двумерную киральную модель на торе T_G. Соответствующее действие $\mathscr{S}$ имеет вид

$$\mathscr{S} = \frac{1}{2\alpha}\int d^2x \mathrm{tr}_\tau(\mathbf{g}_\nu^{-1}\mathbf{g}_\nu) = \frac{(2\pi)^2}{2\alpha}\int d^2x \mathrm{tr}_\tau(\mathbf{H}\boldsymbol{\phi}_\nu)^2 = \frac{(2\pi)^2}{2\alpha}B_\tau\int d^2x(\boldsymbol{\phi}_\nu)^2, \tag{36}$$

где

$$\mathbf{g} = e^{2i\pi(\mathbf{H}\boldsymbol{\phi})} \in T_G, \quad \boldsymbol{\phi} = (\phi^1, ..., \phi^n),$$

n — ранг группы G. Здесь появляется эффективная метрика g_{ik} из (33), порожденная системой весов $\{\mathbf{w}\}_\tau$ τ-представления.

Удобно ввести в эту модель нормализованный след, для того чтобы устранить константу B_τ из эффективной метрики:

$$\mathrm{Tr} = \frac{\mathrm{tr}_\tau}{B_\tau}. \tag{37}$$

Тогда $\mathscr{S}$ принимает обычную форму без коэффициента B_τ. Соответствующие уравнения

$$(\partial_\nu)^2(\mathbf{H}\boldsymbol{\phi}) = 0 \tag{38}$$

имеют классические вихревые решения в области $R > r > a$, аналогичные решениям (20),

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi}\mathbf{Q}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}\right), \quad \mathbf{Q} \in \mathbb{L}_\tau^{-1}. \tag{39}$$

Именно эти решения для таких групп G, для которых $\mathbb{L}_\tau^{-1} \supseteq \mathbb{L}_w$, дают топологическую интерпретацию всех их квантовых чисел [17]. Энергия этих вихрей тоже логарифмически расходится:

$$E = \frac{(2\pi)^2}{2\alpha}\int(\partial_\mu\boldsymbol{\phi})^2 d^2x = \frac{2\pi}{2\alpha}(\mathbf{Q})^2\ln\left(\frac{R}{a}\right). \tag{40}$$

Это приводит к логарифмическому взаимодействию вихрей с различными неколлинеарными топологическими зарядами в отличие от случая торов типа T_L:

$$E = \frac{2\pi}{2\alpha}(\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2)\ln\left(\frac{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}{a}\right). \tag{41}$$

Это взаимодействие зависит от относительной ориентации векторных топологических зарядов, и поэтому геометрия решеток зарядов очень важна. Энергия N-вихревого решения имеет ту же форму, что и (22), но с обычным скалярным произведением топологических зарядов. Теперь видно, что свойства σ-моделей на торах Картана будут зависеть от геометрии набора весов, определяющих тор, и решетки $\mathbb{L}_\tau^{-1}$. Как уже было отмечено выше, все решетки корней, связанные с простыми компактными группами, принадлежат четырем сериям A, D, E, Z, которые в подходящем масштабе являются целочисленными [20]. Как от них зависят критические свойства топологических фазовых переходов в нелинейных σ-моделях на торах Картана T_G, рассмотрено в работах [18] (см. также [15]).

Одномерные конформные σ-модели на торах T_G могут быть рассмотрены так же, как и модели на торах T_L. Единственное отличие будет в том, что теперь сумма в следе идет по всем весам данного представления. Так как инстантоны (или антиинстантоны) не взаимодействуют между собой, то, пока мы интересуемся только несмешанными конфигурациями, нет никаких значительных различий в свойствах σ-моделей на торах T_L и T_G. Но они будут различаться, если учитывать все возможные конфигурации.

Было бы интересно перечислить все компактные пространства, кроме торов, которые могут иметь гомотопическую группу π_1 типа целочисленной решетки ранга $n \geq 2$. Для таких пространств топологические возбуждения могут иметь новые свойства. Например, в нелинейных σ-моделях на торе T^2 существуют заузленные вихревые конфигурации, отвечающие так называемым «торическим» узлам [13]. В частности, вихрь с топологическим зарядом $\mathbf{q} = (2, 3)$ будет соответствовать узлу «трилистник».

Но такие заузленные вихри могут существовать только в d-мерных ($d \geq 3$) физических пространствах. В пространствах $\mathbb{R}^d$ с $d \leq 2$ они могут существовать только в изотопическом пространстве $\mathscr{M}$, так как тор T^2 не может быть вложен в $\mathbb{R}^{1,2}$. Поэтому в низкоразмерных теориях предположение лорда Кельвина может быть реализовано только в изотопическом пространстве.

Стоит также отметить, что есть пространства с π_1 равной конечным циклическим группам. Для них тоже существуют вихревые возбуждения, при этом их топологические заряды будут определены по модулю этих групп. Мы, однако, не будем обсуждать их здесь.

4. МНОГООБРАЗИЯ С $\pi_2 = \mathbb{L}$

Теперь перейдем к рассмотрению компактных многообразий $\mathscr{M}$ с векторной гомотопической группой π_2. Такие наиболее известные многообразия могут быть разделены на два больших класса:

1) однородные пространства простых групп Ли,

2) подмногообразия Ходжа комплексных проективных пространств $\mathbb{CP}^n$, не совпадающие с $\mathscr{M}$ из предыдущего класса. Однородные пространства являются более интересными для нас, потому что они могут иметь группу π_2 с топологическими зарядами,

принадлежащими решеткам весов (или их подрешеткам) соответствующих групп Ли. Для нахождения решений инстантонного типа с топологическими зарядами $\mathbf{q} \in \mathbb{L}_r$ наиболее важными являются комплексные однородные пространства. Основная классификационная теорема о таких многообразиях говорит, что все они могут рассматриваться как расслоения над флаговыми пространствами F

$$\mathscr{M} \xrightarrow{T} F,$$

где слой T является параллелезуемым пространством. Более того, пространство T должно быть комплексным тором, если $\mathscr{M}$ односвязно или кэлерово. Если же выполняются оба условия, то $\mathscr{M}$ должно быть флаговым пространством F [21, 22]. Так как $\pi_2(T) = 0$, то с точки зрения существования инстантонных решений наиболее важными являются флаговые пространства F. Среди них имеются максимальные флаговые пространства $F_G = G/T_G$ с $\pi_2(F_G) = \mathbb{L}_v$ [17, 23].

Киральные модели на F_G рассматривались в статьях [23, 24], где было показано, что, так как $\pi_2(G/T_G) = \pi_1(\tilde{T}_G) \neq 0$ и на G/T_G существует комплексная структура, соответствующие уравнения имеют голоморфные инстантонные решения. Но при рассмотрении топологических зарядов не учитывалась возможная векторная структура соответствующих групп $\pi_2(F_G)$. Авторы исходили из представления, что соответствующие топологические заряды, будучи конволюцией некоторых 2-форм с различными 2-циклами, являются скалярными целыми числами. Так как $\pi_2(G/T_G) = \mathbb{L}_v$, то можно рассматривать соответствующие топологические заряды как изовекторы. Для того чтобы увидеть, как они могут быть реализованы, нужно обратиться к σ-модели на G/T_G. Ее действие имеет следующий вид [23]:

$$\mathscr{S}[u] = \frac{1}{2g^2}\int d^2x g_{a\bar{b}}(u,\bar{u})\partial_\mu u^a \partial_\mu \bar{u}^b, \quad a, b = 1, ..., p, \quad 2p + n = \dim G. \tag{42}$$

Здесь u^a — локальные комплексные координаты на G/T_G (они же — полевые переменные теории), а метрика $g_{a\bar{b}}(u,\bar{u})$ представляет целочисленную 2-форму из когомологического класса ϱ, где $\boldsymbol{\varrho}$ есть изовектор, равный половине суммы всех положительных корней алгебры Ли $\mathscr{G}$:

$$\boldsymbol{\varrho} = \frac{1}{2}\sum_{a>0}\mathbf{r}_a = \sum_{i=1}^{n}\bar{\mathbf{w}}_i,$$

а $\bar{\mathbf{w}}_i$ — фундаментальные веса группы G. Именно эта метрика является эйнштейновой на G/T_G [24, 25], т. е.

$$g_{a\bar{b}}(u,\bar{u}) = kR_{a\bar{b}}(u,\bar{u}), \quad k = 1/2, \tag{43}$$

где $R_{a\bar{b}}(u,\bar{u})$ — тензор Риччи пространства F_G. Такой выбор инвариантной метрики обеспечивает ренормируемость (42) [24, 26].

На голоморфных полях $u^a(z)$, $z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, действие $\mathscr{S}$ формально совпадает (с точностью до коэффициента) с топологическим инвариантом

$$Q = \frac{1}{2}\int d^2x g_{a\bar{b}}(u,\bar{u})\varepsilon_{\mu\nu}\partial_\mu u^a \partial_\nu \bar{u}^b = \frac{1}{2}\int g_{a\bar{b}} du^a \wedge d\bar{u}^b. \tag{44}$$

Как известно [21, 24], все целочисленные 2-формы на $F_G = G/T_G$

$$\Omega = \Omega_{a\bar{b}} du^a \wedge d\bar{u}^b$$

могут быть разложены (по модулю точных форм) по базису 2-форм ω_i, $i = 1, ..., n$, параметризуемых фундаментальными весами $\bar{\mathbf{w}}_i$:

$$\Omega = \sum_1^n c_i \omega_i, \quad c_i \in \mathbb{Z}. \tag{45}$$

Такое разложение с коэффициентами $c_i = 1$ имеет и 2-форма, соответствующая метрике $g_{a\bar{b}}(u, \bar{u})$. С другой стороны, на G/T_G имеется пространство 2-циклов γ, которое дуально пространству 2-форм. Все 2-циклы могут быть представлены как линейные комбинации ячеек Шуберта минимальной размерности (вещественной размерности 2 или комплексной размерности 1), число которых равно рангу группы G [21]. Так как $\pi_1(F_G) = 0$ и, согласно теореме Гуревича, $\pi_2(F_G) = H_2(F_G, \mathbb{Z}) = \mathbb{L}_v$, на пространстве 2-циклов можно ввести векторную структуру, аналогичную таковой из (9), и выбрать параметризацию 2-циклов решеткой $\mathbb{L}_v$. При этом базисные циклы $\{\gamma_i\}$ будут параметризоваться простыми дуальными корнями $\mathbf{r}^v{}_i$:

$$\gamma \to \gamma = \sum_1^n n_i \gamma_i \, \mathbf{r}_i^v, \; n_i \in \mathbb{Z}. \tag{46}$$

Конволюция 2-форм ω_i и дуальных к ним 2-циклов γ_k, т. е. интеграл от 2-формы ω_i по 2-циклу γ_k, равна

$$(\omega_i \circ \gamma_k) = \int_{\gamma_k} \omega_i = \delta_{ik}.$$

Так как 2-форма ϱ, определяющая действие и соответствующие топологические заряды, фиксирована, векторность пространства 2-циклов индуцирует векторность пространства топологических зарядов $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}_i^v = (\varrho \circ \sum_1^n q_i \gamma_i) \mathbf{r}_i^v, \quad q_i \in \mathbb{Z}. \tag{47}$$

Отсюда следует, что топологические заряды, отвечающие различным независимым циклам, не могут складываться как скаляры и, в частности, компенсировать друг друга. Для вычислений полезно отметить схожесть топологической клеточной структуры тора T^n и флага F_G в их первых нетривиальных клеточных комплексах: для тора T^n такой комплекс равен букету окружностей $T^n = S_1^1 \vee ... \vee S_n^1$ [13], тогда как для пространства флагов он похож на букет 2-сфер $M = S_1^2 \vee ... \vee S_n^2$.

Например, для $G = SU(n+1)$ можно выбрать в качестве локальных координат на этих 2-сферах элементы верхней, ближайшей к главной диагонали, диагональной линии. Тогда инстантоны, соответствующие этим 2-сферам, будут просто инстантонами Белавина—Полякова [4]. Для действия $\mathscr{S}$ n инстантонов с топологическими зарядами $q_1, ..., q_n$, отвечающими n различным 2-циклам, получаем

$$\mathscr{S} = \frac{1}{2g^2} \sum_1^n |q_i|. \tag{48}$$

Это выражение похоже на аналогичное выражение для одномерных инстантонов из (28).

Итак, показано, что инстантонные решения двумерных киральных моделей на максимальных флаговых пространствах $F_G = G/T_G$ могут реализовать изовекторные топологические заряды, принадлежащие $\pi_2(G/T_G) = \mathbb{L}_v$, и, следовательно, могут реализовать все квантовые числа групп G, для которых $\mathbb{L}_w \subseteq \mathbb{L}_v$. Для других групп нужна дополнительная факторизация пространства F_G.

5. ТРЕХМЕРНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ

Топологические возбуждения типа вихря и инстантона, т. е. связанные с группами $\pi_1(T_G)$ и $\pi_2(F_G)$, могут также существовать в 3-мерном пространстве. Возбуждения типа вихря теперь образуют замкнутые или открытые линии. В первом случае они могут образовывать заузленные конфигурации как в физическом пространстве, так и в изотопическом. Для открытых вихревых линий их энергия $E \sim L \ln R/a$, где L — длина линии. Топологические возбуждения, связанные с топологическими зарядами $\mathbf{Q} \in \pi_2(G/T_G)$, могут существовать в обобщенных моделях Хиггса—Салама—Вейнберга (ХСВ) как трехмерные частицеподобные монополи. Они будут иметь конечную энергию, если в них будут задействованы калибровочные поля, и будут иметь расходящуюся энергию без этих полей. Здесь стоит заметить, что, так как $\pi_2(F_G) = \mathbb{L}_v$, которая в случае $G = SU(n)$ не содержит весов фундаментальных кварковых представлений, последние не могут существовать как топологические возбуждения на F_G. Может быть, этот факт связан с конфайнментом кварков. Для топологической интерпретации кварков потребуется дополнительная факторизация F_G или дополнительное спонтанное нарушение симметрии в модели ХСВ (см., например, [27]).

В качестве примера трехмерных топологических возбуждений, связанных с гомотопической группой π_2, рассмотрим трехмерную киральную модель на сфере S^2 с действием [19]

$$S = \frac{1}{2\alpha} \int d^3x (\partial_\mu \mathbf{n})^2, \quad \mathbf{n} \in S^2. \tag{49}$$

Соответствующие уравнения имеют решения типа инстантонов, которые можно представить в виде

$$n_i(x) = \frac{x_i}{r} \theta_r(r-a), \tag{50}$$

где $\theta_r(r)$ — регуляризованная ступенчатая функция. Топологический заряд равен

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int dS, \tag{51}$$

где интеграл $\int dS$ берется по сфере S^2 в изотопическом пространстве, а энергия

$$E = \frac{1}{2\alpha} \int d^3x (\partial_\mu \mathbf{n})^2 = \frac{1}{\alpha} 4\pi \int\limits_a^R dr \simeq \frac{4\pi}{\alpha} R \tag{52}$$

растет линейно с ростом R. Это означает, что в этой модели инстантоны должны быть связаны в нейтральные комплексы, как кварки в КХД, и могут проявлять себя только на малых расстояниях! Все инфракрасные (длинноволновые) свойства не будут зависеть от их существования. Аналогичные свойства будут иметь σ-модели на других многообразиях с $\pi_2 = \mathbb{L}$.

Используя точную гомотопическую последовательность для расслоения $G \xrightarrow{T_G} F_G$, можно показать (см., например, [14]), что

$$\pi_k(G) = \pi_k(G/T_G) = \pi_k(G, T_G), \quad k = 3, 4...,$$

здесь $\pi_k(G, T_G)$ — соответствующие относительные гомотопические группы. Это означает, что для $k > 2$ флаговое пространство F_G имеет те же гомотопические свойства, что и сама группа G. По этой причине возможно, что нелинейная σ-модель на флаговом пространстве F_G может иметь заузленные решения, связанные с группой $\pi_3(F_G) = \pi_3(G) = \mathbb{Z}$, аналогичные недавно предложенным для четырехмерной теории Янга—Миллса в [28].

6. ОБСУЖДЕНИЕ

Мы показали, что квантовые числа групп могут быть представлены в виде топологических зарядов вихрей и инстантонов. Но инстантоны, в строгом понимании этого термина, в общем не взаимодействуют друг с другом. Поэтому одни инстантоны не могут реализовать настоящие взаимодействующие частицы. Для их реализации нужны топологические возбуждения, взаимодействующие как двумерные вихри, но с трехмерными потенциалами $V(r)$ типа Кулона и Юкавы (или логарифмическими):

$$E = (\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)V(r), \quad V_C(r) = \frac{1}{r}, \quad V_Y(r) = \frac{e^{-mr}}{r}.$$

В трехмерном пространстве такие возбуждения могут быть получены в конформной (и, следовательно, нелокальной) нелинейной σ-модели на многообразиях с $\pi_2 = \mathbb{L}$ [29]. В локальных теориях для этого нужно рассматривать соответствующие теории типа ХСВ или σ-модели с добавленными калибровочными полями. Последнее может быть выполнено разными способами. Например, в одном варианте можно рассматривать калибровочные нелинейные σ-модели на фиксированных F_G. В другом, более изощренном, варианте F_G рассматривается как один из элементов семейства таких сопряженных подпространств в группе G. Тогда, если нет никакого фиксирующего потенциала для F_G, все эти подпространства будут эквивалентны. Это означает, что поля σ-моделей в различных точках физического пространства могут принимать значения в различных подпространствах F_G, при этом калибровочные поля могут проявляться как преобразования сопряжения, связывающие эти подпространства. Этот подход еще требует значительной доработки.

В заключение отметим, что многообразия T_G и F_G должны рассматриваться как необходимые ингредиенты любых теорий типа Большого Объединения или теории струн, которые пытаются получить наглядную физическую (особенно, топологическую) интерпретацию элементарных частиц.

Автор благодарен Г. Воловику за полезные обсуждения некоторых вопросов, затронутых в этой статье, и В. Гурарию за информацию о литературе по комплексным однородным пространствам.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 96-02-17331-а, 96-15-96861).

Литература

1. А. М. Поляков, Письма в ЖЭТФ **20**, 430 (1974).
2. G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **79**, 276 (1974).
3. A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, and Yu. S. Tyupkin, Phys. Lett. B **59**, 85 (1975).
4. А. А. Белавин, А. М. Поляков, Письма в ЖЭТФ **22**, 245 (1975).
5. Д. Маттис, *Теория магнетизма*, Мир, Москва (1967); (D. Mattis, *The Theory of Magnetism*, Harper & Row Publishers (1965)).
6. Ф. Клейн, *Лекции о развитии математики в XIX столетии*, т. I, Наука, Москва, (1989).
7. W. H. Thomson, Trans. Roy. Soc. Edin. **25**, 217 (1869); P. G. Tait, *On knots*, I, II, III, Scientific Papers, Cambridge University Press, (1900); M. F. Atiyah, *The Geometry and Physics of Knots*, Cambridge University Press (1990).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
9. П. Де Жен, *Сверхпроводимость металлов и сплавов*, Мир, Москва (1968); (P. G. De Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys*, W. A. Benjamin, Inc. (1966).
10. M. D. Frank-Kamenetskii, A. V. Lukashin, and A. V. Vologodskii, Nature **258**, 398 (1975); М. Д. Франк-Каменецкий, А. В. Вологодский, УФН **134**, 641 (1981).
11. G. E. Volovik, *Exotic properties of superfluid* ^{3}He, World Scientific, Singapore (1992).
12. Р. Раджараман, *Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля*, Мир, Москва (1985); (R. Rajaraman, *Solitons and instantons*, North-Holland Pub.Company, Amsterdam–New-York–Oxford (1982)).
13. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия*, части I, II, Наука, Москва (1979); часть III, Наука, Москва (1984).
14. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, главы IV–VI, Мир, Москва (1972), главы VII, VIII, Мир, Москва (1978); (N. Bourbaki, *Groupes et algebres de Lie*. Chapters IV–VI, Hermann, Paris (1968); Chapters VII, VIII, Hermann, Paris (1975)).
15. S. A. Bulgadaev, Nucl. Phys. B **224**, 349 (1983); Phys. Lett. B **166**, 88 (1986).
16. S. A. Bulgadaev, Phys. Lett. A **125**, 299 (1987).
17. С. А. Булгадаев, Письма в ЖЭТФ **63**, 796 (1996).
18. С. А. Булгадаев, Письма в ЖЭТФ **63**, 780 (1996); E-print archives hep-th/9906091, hep-th/9909031.
19. A. M. Polyakov, *Gauge Fields and Strings*, Harwood Academic Publishers (1987).
20. Дж. Конвей, Н. Слоэн, *Упаковки шаров, решетки и группы*, т. I, II, Мир, Москва (1990); (G. H. Conway, N. J. A. Sloane, *Sphere Packing, Lattices and Groups*, vol. I, II, Springer-Verlag (1988)).
21. Н. Харт, *Геометрическое квантование в действии*, Мир, Москва (1985); (N. E. Hurt, *Geometric Quantization in Action*, D. Reidel Publ. Company (1983).
22. С. Кобаяши, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, т. 2, Наука, Москва (1981); (S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, vol. II, Interscience Publishers (1969).
23. А. М. Переломов, УФН **134**, 577 (1981).
24. A. M. Perelomov and M. C. Prati, Nucl. Phys. B **258**, 647 (1985).
25. D. S. Freed, *Flag Manifolds and Infinite Dimensional Kahler Geometry*, in *Proc. of Intern. Conf.* (1985).
26. E. Witten, Phys. Rev. D **16**, 2991 (1977).
27. T. Vachaspati, Phys. Rev. Lett. **76**, 188 (1996).
28. L. D. Faddeev and A. Niemi, E-print archives, hep-th/9705176.
29. S. A. Bulgadaev, Landau Institute Preprint 29/05/97 (1997).