

ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ИНТЕНСИВНОСТИ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЯ

Е. В. Орленко*, Б. Г. Матисов

Санкт-Петербургский государственный технический университет
195251, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 8 апреля 1999 г.

На основании представлений об обменном взаимодействии системы двухуровневых атомов, участвующих в процессе сверхизлучения, из первых принципов выводится гамилтониан сверхизлучения системы, аналогичный гамилтониану Гейзенберга. Последовательно вычисляется константа взаимодействия, приводящего к установлению состояния сверхизлучения. Предсказывается существование изоспиновых возбуждений в состоянии сверхизлучения, приводящих к уменьшению интенсивности соответствующего импульса. Рассчитывается температурная зависимость интенсивности импульса сверхизлучения, аналогичная закону Блоха $T^{3/2}$ для спиновых систем.

PACS: 42.50.Fx

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что в простейших квантовых системах (ансамбли двухуровневых атомов, взаимодействующих через поле излучения, электростатическое поле, диполь-дипольное взаимодействие, фотоны и т. д.) возможен целый ряд светоиндуцированных фазовых переходов [1]. Изучение таких неравновесных фазовых переходов показало, что существует глубокая аналогия с равновесными фазовыми переходами второго рода [2, 3], возникающими в системе спинов при наличии между ними взаимодействия, константа которого (обменное кулоновское взаимодействие) превосходит энергию теплового движения, приводящего к разориентации спинов. В этом случае в системе возникает спонтанная соориентация спинов, макроскопически проявляющая себя в остаточной намагниченности. Фазовые переходы в квантовооптических системах вызываются также взаимодействием, приводящим к установлению определенного порядка в ориентации так называемых энергетических спинов (или изоспинов), которые имеют место при сверхизлучении Дике [4]. Естественно, что это роднит фазовые переходы с эффектом сверхизлучения. Более того, как показано в [1] на основе анализа состояния поляритонной генерации в открытой среде двухуровневых атомов, взаимодействующих через стоксово поле при комбинационном рассеянии света, возникновение режима сверхизлучения является по сути одним из возможных фазовых переходов.

Взаимодействие через поле переизлучения считается наиболее универсальным типом взаимодействия в таких системах. Однако в среде двухуровневых атомов с постоянными дипольными моментами коллективизация ансамбля атомов может осуществляться и за счет статического диполь-дипольного взаимодействия. В кристаллах появляется еще дополнительное взаимодействие через фононы.

*E-mail:quark@citadel.stu.neva.ru

Аналогия с равновесными фазовыми переходами второго рода, имеющими место в магнитных системах, связана с тем, что гамильтониан, описывающий поведение двухуровневых атомов в поле излучения, с учетом межатомного взаимодействия аналогичен гамильтониану Гейзенберга для спиновых систем. И в квантовой оптике неоднократно предпринимались попытки свести гамильтониан непосредственно к виду гамильтониана Гейзенберга [5]. Однако константа взаимодействия, являющаяся множителем при скалярном произведении изоспинов, считается здесь либо константой взаимодействия через поле переизлучения, либо просто константой диполь-дипольного взаимодействия.

Проводя аналогию с магнитными системами, нельзя не отметить, что само по себе прямое магнитодипольное взаимодействие существует и в магнитных системах, но не оно приводит к спонтанной ориентации спинов, так как константа его мала по сравнению с энергией теплового движения. Поэтому именно обменное кулоновское взаимодействие связанных d -электронов и в меньшей степени свободных электронов приводит к установлению магнитного порядка. Константа такого взаимодействия может быть рассчитана из первых принципов [6] и по порядку величины совпадает с энергией химической связи [7], а потому ее учет может препятствовать процессу разориентации спинов. В связи с этим возникают сомнения в том, что взаимодействие атомов через поле переизлучения может само по себе вызывать ориентацию энергетических спинов, поскольку константа этого взаимодействия мала [4] и по сравнению с равновесной температурой системы атомов, и по сравнению с равновесным тепловым излучением системы, и, наконец, по сравнению с интенсивностью поля накачки, которое выступает в излучающих системах в роли варьируемого параметра и является аналогом температуры.

Немаловажную роль в установлении состояния сверхизлучения играет электрическое дипольное взаимодействие атомов даже в том случае, когда атомы обладают только дипольными моментами переходов. В работе [8] на основании полуклассического подхода исследуется влияние кулоновского взаимодействия на сверхизлучение системы двухуровневых атомов и показано, что кулоновское взаимодействие вызывает когерентный перенос возбуждения между атомами, что приводит к приближительной пространственной однородности инверсии в цепочке атомов. Таким образом, делается и последовательно доказывается утверждение о том, что кулоновское диполь-дипольное взаимодействие не только не разрушает, как принято было считать, состояние сверхизлучения, но и способствует его установлению. Показано также, что кулоновское взаимодействие должно учитываться во всех системах с малым числом Френеля, так как в таких системах время «обмена» возбуждениями $\tau_c \ll \tau_R$, где τ_R — время сверхизлучения. Попытка учета кулоновского взаимодействия для малого числа атомов была предпринята и в более ранних работах [9, 10], авторы которых показали, что электростатическое взаимодействие в полуклассическом приближении не влияет на динамику сверхизлучения, а приводит к фазовой модуляции. Однако при более детальном анализе динамики сверхизлучения с учетом кулоновского взаимодействия [8] выяснилось, что интенсивность высвечивания имеет явные осцилляции в зависимости от времени, что можно было бы связать с распространением возбуждений в системе, имеющих волновой характер.

В настоящей работе выводится из первых принципов с учетом как дипольного кулоновского взаимодействия атомов, так и взаимодействия через поле переизлучения гамильтониан системы, аналогичный гамильтониану Гейзенберга в теории магнетизма. На основе полученного гамильтониана исследуются волновые возбуждения систе-

мы, аналогичные спиновым волнам в ферро- или антиферромагнетике. Показано, что именно эти возбуждения приводят к характерной температурной зависимости интенсивности сверхизлучения. Вычисляется также критическая температура, при которой явление сверхизлучения пропадает, а в системе наступает фазовый переход второго рода. Силы дальнего порядка, возникающие в больцмановском атомном газе, когда в нем распространяются длинноволновые изоспиновые возбуждения, предсказываемые в данной работе, должны быть рассмотрены на основе применения квантовомеханических принципов. При таком подходе *ab initio*, который и реализуется в настоящей работе, удастся провести не только процедуру вывода изоспиновых вкладов во взаимодействие атомов между собой, но и понять их физическую природу. Механизм образования изоспиновых возбуждений и дисперсионные зависимости для них получаются естественным путем на основе операторных моделей.

2. ГАМИЛЬТОНИАН КООПЕРАТИВНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим энергетические состояния системы двух не взаимодействующих атомов, в каждом из которых рабочими являются два уровня с энергиями E_1 и E_2 . Состояние каждого атома можно описывать спинором χ [4], где $\chi_{(\uparrow)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ означает, что атом находится в энергетическом состоянии с $E = E_2$, а $\chi_{(\downarrow)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ — в состоянии с $E = E_1$. Тогда состояние системы двух не взаимодействующих атомов может быть записано в виде простого произведения спиноров χ_I и χ_{II} соответствующих атомов I и II:

$$\chi_{I,II} = \chi_{I(i)}\chi_{II(j)}, \tag{1}$$

где индексы i и j пробегает значения 1 и 2, соответствующие состояниям \downarrow и \uparrow .

Если, как и в [4], ввести оператор

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

то гамильтониан не взаимодействующей системы может быть записан в виде

$$\hat{H}_0 = E (\hat{S}_{Iz} + \hat{S}_{IIz}), \tag{2}$$

где $E = E_2 - E_1$, тогда

$$\hat{H}_0\chi_{I,II} = E (\hat{S}_{Iz} + \hat{S}_{IIz}) \chi_{I,II}.$$

Некоторым энергетическим состояниям системы, например, с $E = E_1 + E_2$, могут соответствовать две функции $\chi_{I,II} = \chi_{I(\uparrow)}\chi_{II(\downarrow)}$ и $\chi'_{I,II} = \chi_{I(\downarrow)}\chi_{II(\uparrow)}$.

Таким образом, в системе существует вырождение. Функции же $\chi_{I,II}$ и $\chi'_{I,II}$ ортогональны между собой, что легко можно проверить.

Учтем взаимодействие атомов, механизм которого может быть любым из перечисленных выше в соответствии с экспериментальной ситуацией. Будем описывать это взаимодействие с помощью оператора $\hat{V}_{I,II}$. Константа любого из рассматриваемых выше типов взаимодействия мала по сравнению с разностью энергий E_2 и E_1 , так что

применима обычная теория возмущений с вырождением. Поправка к полной энергии системы на указанное возмущение хорошо известна [7]:

$$\varepsilon^{(1)} = K \pm A,$$

где в нашем случае

$$K = \langle \chi_{I,\Pi} | \hat{V}_{I,\Pi} | \chi_{I,\Pi} \rangle, \quad A = \langle \chi'_{I,\Pi} | \hat{V}_{I,\Pi} | \chi_{I,\Pi} \rangle,$$

а соответствующие правильные волновые функции

$$\chi_+ = \frac{1}{2} (\chi_I(i)\chi_{II}(j) + \chi_I(j)\chi_{II}(i)),$$

$$\chi_- = \frac{1}{2} (\chi_I(i)\chi_{II}(j) - \chi_I(j)\chi_{II}(i)).$$

Хорошо видно, что если исходно система находилась в состоянии с $E = E_1 + E_2$, то при учете взаимодействия более выгодным будет состояние

$$\chi_- = \frac{1}{2} (\chi_I(\uparrow)\chi_{II}(\downarrow) - \chi_I(\downarrow)\chi_{II}(\uparrow)),$$

если $A > 0$, и наоборот, χ_+ , если $A < 0$. Энергетические состояния двухатомной системы с $E = 2E_1$ и $E = 2E_2$ исходно не были вырождены, и для них, поскольку $\chi_- \equiv 0$, реализуется только одно состояние, а именно χ_+ , т. е. симметричное.

Введем оператор

$$\hat{P}_{I,\Pi} = \frac{1}{2} (1 + 4\hat{S}_I\hat{S}_{II}),$$

где $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$, как и в [4], эквиваленты матрицам Паули с множителем 1/2. Можно убедиться, что собственное значение оператора $\hat{S}^2 = (\hat{S}_I + \hat{S}_{II})^2$ для симметричного состояния соответствует полному изоспину системы, равному единице. Для антисимметричного же состояния полный изоспин системы равен нулю. Аналогично, собственные значения оператора $\hat{P}_{I,\Pi}$ равны +1 и -1 для χ_+ - и χ_- -состояний соответственно. Тогда оператор энергии взаимодействия двух атомов, учитывающий в явном виде их изоспиновые состояния, можно представить как

$$\hat{H}_{int} = K + A\hat{P}_{I,\Pi} = K + \frac{A}{2} (1 + 4\hat{S}_I\hat{S}_{II}) = K + \frac{A}{2} + 2A\hat{S}_I\hat{S}_{II}. \quad (3)$$

Полный гамильтониан системы из N атомов с учетом только парных взаимодействий может быть записан в виде

$$\hat{H} = \sum_{k,l} (\hat{H}_{0,k} + \hat{H}_{int,k,l}) = E \sum_k \hat{S}_{kz} + \sum_{k<l} J_{kl} \hat{S}_k \hat{S}_l + \frac{N}{2} E_0, \quad (4)$$

где $E_0 = K + A/2$, $J_{kl} = 2A_{kl}$, k, l — номера атомов.

Мы получили гамильтониан, аналогичный гамильтониану Гейзенберга в теории спиновых систем. Так же, как в гамильтониан Гейзенберга, в гамильтониан (4) входит

обменный параметр J_{kl} , поскольку именно обменное взаимодействие является результатом симметрии волновой функции исходной системы и потому тесно связано с ориентацией (в данном случае изоспинов). Но, в отличие от гейзенберговского гамильтониана, в (4) перед членом, отвечающим за обменное взаимодействие, стоит знак плюс. Это связано с тем, что знак перед «обменным» слагаемым непосредственно связан с симметрией χ_+ . Соответствующий знак в аналогичном выражении в задаче Гайтлера—Лондона связан с симметрией только координатной части полной волновой функции, тогда как симметрия спиновой части, в соответствии со схемами Юнга [7], является дополнительной.

Теперь обсудим связь гамильтониана (4) с состояниями Дике. Состояния Дике [4], характеризующиеся значением полного изоспина системы, или так называемым кооперативным квантовым числом r , и проекцией полного спина на ось z — поляризационным числом m , являются собственными для оператора (4), и, следовательно, матрица этого оператора, вычисленная по состояниям Дике, является диагональной. В нашей задаче состояния с определенным поляризационным числом m перестают быть вырожденными, поскольку вырождение по полному изоспину системы снимается из-за наличия взаимодействия, описываемого вторым слагаемым (4). Состояния Дике $|r, m\rangle$ с разными r , но с одинаковыми m теперь соответствуют разным подуровням энергии:

$$\hat{H}|r, m\rangle = \left\{ Em + \frac{J}{2} \left(r(r+1) - N \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \right) \right\} |r, m\rangle, \quad (5)$$

где оператор $J \sum_{k < l} \hat{S}_k \hat{S}_l$, $J = J_{kl}$, из (4) представлен в виде

$$\frac{J}{2} \left(\left(\sum_k \hat{S}_k \right)^2 - \sum_k \hat{S}_k^2 \right).$$

Основной вклад в энергию системы, в отличие от магнитных спиновых систем, здесь вносит первое слагаемое, поскольку $|E| \gg |J|$ и при отсутствии предварительной накачки системы атомы будут находиться в состоянии с энергией E_1 , что соответствует состоянию Дике $|r = N/2, m = -N/2\rangle$. Однако из всех возможных состояний с $m = 0$ наиболее энергетически выгодным является состояние $|r = 0, m = 0\rangle$, что видно из (5).

Можно говорить, что этому состоянию соответствует мелкая яма, на единственный уровень которой могут «свалиться» все спаренные атомы, независимо от того, были ли они изначально бозонами или фермионами. Дике показал, что такое полностью антисимметричное состояние является стабильным, так как в этом случае система не излучает, находясь как бы в «замороженном» состоянии.

Процесс лавинного сброса фотонов может быть инициирован наличием взаимодействия с внешним полем накачки, которое описывается оператором

$$\hat{W} = -\mathbf{P} \left(\mathbf{e}_x \hat{S}_x + \mathbf{e}_y \hat{S}_y \right) = -\mathbf{P} \sum_k \left(\mathbf{e}_x \hat{S}_{kx} + \mathbf{e}_y \hat{S}_{ky} \right), \quad (6)$$

где

$$\hat{S}_x = \sum_k \hat{S}_{kx}, \quad \hat{S}_y = \sum_k \hat{S}_{ky},$$

\mathbf{P} — вектор поляризации. Отличные от нуля матричные элементы этого оператора в состояниях Дике соответствуют переходам $m \rightarrow m \pm 1$. Так что это взаимодействие позволяет системе пробегать все возможные значения m , и система, предварительно накаченная до состояния $m = N/2$, может легко оказаться в состоянии с $m = 0$. Но это последнее состояние реализуется как суперпозиция состояний с различными r ($|m\rangle = \sum_r C_{rm}|r, m\rangle$), поэтому вероятность того, что система будет выведена из «замороженного» состояния и будет излучать, как было предсказано Дике, с интенсивностью $I \propto N^2$, равна

$$P_{rad} = 1 - |C_{00}|^2.$$

Наличием такого «замороженного» состояния можно объяснить известную задержку, предшествующую режиму сверхизлучения.

Таким образом, полученный нами гамильтониан (4) описывает как общий случай кооперативных систем, так и частный случай состояния сверхизлучения.

3. ИЗОСПИНОВЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ. ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим систему атомов при низкой температуре такую, что длина свободного пробега атомов за время сверхизлучения τ_R была бы меньше характерного межатомного расстояния:

$$v_T \tau_R \ll n^{-1/3},$$

где n — концентрация атомов, v_T — тепловая скорость атомов. Тогда можно считать, что «соседи» атомов практически не меняются и, как и в [8], атомную систему можно представить в виде цепочки взаимодействующих атомов. В твердом теле такая модель является тем более оправданной.

Будем связывать спонтанное отклонение вектора поляризации \mathbf{P} от своего квазиравновесного значения в момент начала процесса лавинного сброса сверхизлучения с имеющимися в системе возбуждениями. Будем полагать, что любые тепловые эффекты вызывают релаксацию системы изоспинов, когда оба «соседа» переходят в состояние $E = E_1$. Обозначим такое состояние

$$|\xi_n\rangle = |\chi_{(1)n-1}, \chi_{(1)n} + \chi_{(1)n} \chi_{(1)n+1}\rangle. \quad (7)$$

Гамильтониан, описывающий возбуждения, выберем в форме (4) с учетом (3), из которого вычтем энергию основного когерентного состояния

$$\hat{V}_{exc} = \sum_i \hat{H}_{int i, i+1} - \varepsilon_0 = A \sum_i (\hat{P}_{i, i+1} - 1), \quad (8)$$

где

$$\varepsilon_0 = \frac{N}{2} E_1 + \frac{N}{2} E_2.$$

Легко показать, что

$$\hat{P}_{k, k+1} |\chi_{k(\uparrow)} \chi_{k+1(\uparrow)}\rangle = |\chi_{k(\uparrow)} \chi_{k+1(\uparrow)}\rangle,$$

$$\hat{P}_{k,k+1}|\chi_{k(\uparrow)}\chi_{k+1(\downarrow)}\rangle = |\chi_{k(\downarrow)}\chi_{k+1(\uparrow)}\rangle$$

и т. д. Возможное состояние с одним переброшенным спином в цепочке атомов может быть записано в виде суперпозиции состояний $|\xi_n\rangle$:

$$|\xi\rangle = \sum_n C_n |\xi_n\rangle. \tag{9}$$

Обозначим энергию такого возбуждения $\hbar\omega$, тогда можно записать

$$\hat{V}_{exc}|\xi\rangle = \hbar\omega|\xi\rangle.$$

После непосредственного действия оператора (8) на функцию (9), учитывая при этом свойства оператора \hat{P}_{ij} , получим

$$\begin{aligned} \hbar\omega \sum_n C_n |\xi_n\rangle &= A \sum_n (P_{n-2,n-1} - 1 + P_{n,n-1} - 1) C_n |\xi_n\rangle, \\ \hbar\omega \sum_n C_n |\xi_n\rangle &= A \sum_n C_n |(\xi_{n-1} + \xi_{n+1} - 2\xi_n)\rangle. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при ξ_n , получим

$$\hbar\omega C_n = A(C_{n-1} + C_{n+1} - 2C_n).$$

Будем искать решение для C_n в виде суперпозиции бегущих волн

$$\sum_k q_k \exp(i(kx_n - \omega_k t)), \quad x_n = n\rho,$$

где \mathbf{k} — волновой вектор. Тогда

$$\hbar\omega = 4A \sin^2 \frac{k\rho}{2},$$

где ρ — среднее расстояние между атомами в газе или постоянная решетки в твердом теле.

В длинноволновом приближении $k\rho \ll 1$ получаем

$$\hbar\omega_k = 4A \left(\frac{k\rho}{2}\right)^2 = A\rho^2 k^2,$$

или дисперсионное соотношение для изоспиновых возбуждений

$$\omega_k = \frac{A\rho^2}{\hbar} k^2,$$

такое же, как и для спиновых волн в твердом теле. Гамильтонова форма энергии указанных возбуждений с различными числами переброшенных спинов может быть записана в обобщенных координатах и импульсах как сумма энергий гармонических осцилляторов с различными ω_k :

$$\hat{V}_{exc} = \sum_k \left(\frac{\hat{P}_k^2}{2} + \frac{\omega_k^2 \hat{x}_k^2}{2} \right), \tag{10}$$

а энергия состояния осцилляторных систем, усредненная по ансамблю, в виде

$$u = \sum_k \hbar \omega_k \left(\bar{n}_k + \frac{1}{2} \right), \quad (11)$$

где \bar{n}_k — планковская функция распределения числа квантов возбуждения системы (псевдомагнонов). Суммирование по k ведется ($k = 2\pi\nu/\rho$, где ν — целое) от $k = 0$ до некоего k_{max} , связанного с существованием минимальной длины волны λ_{min} . Ясно, что относительное отклонение вектора поляризации от своего оптимального значения $p_\infty = |d|N/2$ при $T = 0$ будет связано с распространением в системе возбуждений. Таким образом, степень этого отклонения можно вычислить, определив полное число тепловых возбуждений псевдомагнонного типа:

$$\frac{|P_\infty - P(T)|}{P_\infty} \sim V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 (e^{\hbar\omega_k/T} - 1)} = \frac{V}{4\pi^2} \int \frac{\sqrt{k^2} dk^2}{e^{\hbar\omega_k/T} - 1}. \quad (12)$$

Определим ω_{max} . Полное число мод равно числу атомов, следовательно, используя дисперсионное соотношение

$$\omega_k = A\rho^2 k^2 / \hbar,$$

получим

$$(6\pi^2 n)^{2/3} \frac{A\rho^2}{\hbar} = \omega_{max}. \quad (13)$$

Вычислим интеграл (12) в двух пределах.

1) $T \ll \hbar\omega_{max}$ — низкотемпературный предел:

$$\frac{|P_\infty - P(T)|}{P_\infty} \sim \frac{V}{4\pi^2} \int_0^{\omega_{max}} \frac{\sqrt{k^2} dk^2}{e^{\hbar\omega_k/T} - 1} = \frac{3}{2} \left(\frac{T}{\hbar\omega_{max}} \right)^{3/2} \zeta \left(\frac{3}{2} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (14)$$

где $\zeta(x)$ — дзета-функция Римана.

2) $T \geq \hbar\omega_{max}$ — высокотемпературный предел:

$$\begin{aligned} \frac{|P_\infty - P(T)|}{P_\infty} &\sim \frac{V}{4\pi^2} \int_0^{\omega_{max}} \frac{\sqrt{\hbar\omega_k/\rho^2 A} d(\hbar\omega_k/\rho^2 A)}{\hbar\omega_k/T} = \\ &= \frac{V}{4\pi^2} \frac{1}{(A\rho^2)^{3/2}} 2\sqrt{(6\pi^2 n)^{2/3} A\rho^2 T} = \frac{3T}{\hbar\omega_{max}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом,

$$\frac{|P_\infty - P(T)|}{P_\infty} \sim \Theta(T) = \begin{cases} \frac{3}{2} \left(\frac{T}{\hbar\omega_{max}} \right)^{3/2} \zeta \left(\frac{3}{2} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{2}, & T \ll \hbar\omega_{max}, \\ 3 \frac{T}{\hbar\omega_{max}}, & T \geq \hbar\omega_{max}. \end{cases} \quad (16)$$

Характерная критическая температура, при которой исчезает сверхизлучение,

$$T_C = \hbar\omega_{max} \approx A. \quad (17)$$

Интенсивность сверхизлучения тоже будет функцией температуры $I(T) \sim P^2(T)$. А именно, поскольку

$$P(T) = P_\infty (1 - \Theta(T)),$$

для температурной зависимости сверхизлучения можно записать

$$I(T) = I_\infty (1 - \Theta(T))^2.$$

При низких температурах ($\Theta(T) \ll 1$) $I(T)$ можно разложить в ряд:

$$I(T) = I_\infty (1 - 2\Theta(T)) = I_\infty \left[1 - 3\zeta \left(\frac{3}{2} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{T}{\hbar\omega_{max}} \right)^{3/2} \right]. \quad (18)$$

В случае высоких температур ($\Theta(T) \sim 1$) получим

$$I(T) = I_\infty \left(1 - \frac{T}{A} \right)^2. \quad (19)$$

Существование характерной критической температуры T_C свидетельствует о том, что в системе может происходить фазовый переход с установлением порядка, подобного спиновому упорядочению в антиферромагнетиках, когда равновесным состоянием является состояние с последовательной антипараллельной ориентацией спинов. Именно такое упорядочение изоспинов, по нашему мнению, устанавливается в сверхизлучательных системах перед моментом сброса когерентного импульса. Существующие тепловые возбуждения спонтанным образом отклоняют систему от установившегося порядка и потому вызывают уменьшение интенсивности высвечивания.

4. КОНСТАНТА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Здесь мы остановимся на аспекте учета перекрытий координатных функций взаимодействующих одинаковых атомов. Известно, что учет свойств симметрии функции системы одинаковых частиц приводит к энергетическому расщеплению термов. Подчеркнем, что это расщепление не является следствием прямого (диполь-дипольного и т. д.) взаимодействия атомов. Согласно обменной теории возмущений [6], поправка к энергии взаимодействия, связанная с перестановкой атомов, определяется по формуле

$$\varepsilon(R) = (\Phi' | \hat{V}(R) | \Phi), \quad (20)$$

где штрихом отмечена волновая функция атомов, отличающаяся от исходной (без штриха) перестановкой ядер. Что же касается функции $V(R)$ (где R — расстояние между ядрами), то она представляет собой потенциальную энергию взаимодействия атомов в дипольном приближении. Иными словами, функция $V(R)$ описывает нерасщепленный энергетический терм системы двух атомов.

Расчетная модель, аналогичная рассмотренной в [11], основывается на следующих соображениях. Прямому взаимодействию атомов ставится в соответствие $A(R)$, фигурирующий в (3), который записывается в виде потенциала типа потенциала Сюзерленда:

$$V(R) = A(R) = \begin{cases} -\frac{C}{R^3}, & R > \alpha, \\ \infty, & R < \alpha, \end{cases}$$

где C — константа, определяемая как произведение дипольных моментов переходов между «работающими» уровнями двухуровневой системы (см. Приложение А), α — расстояние, на котором действуют силы отталкивания между атомами. Пусть T — температура газа в принятых атомных единицах. Тогда вероятность того, что расстояние между соседними атомами равно R , определяется бoльцмановской функцией;

$$W(R) = \frac{1}{Z} \exp(-V(R)/T),$$

где Z — нормировочный фактор, который определим из условия

$$\int_0^{\rho} W(R) dR = 1,$$

ρ — среднее расстояние между атомами. Усредненное значение энергии взаимодействия найдем по модифицированной формуле (20):

$$\bar{\varepsilon}(R_0) = \langle \Phi' | \hat{V}(R) W(R) | \Phi \rangle. \quad (21)$$

Заметим, что приведенная процедура эквивалентна усреднению с матрицей плотности в координатном представлении, причем обменное перекрытие не было учтено в нормировочных факторах, поскольку соответствующие вклады содержат интегралы от сильно осциллирующих функций. Вектор состояния относительного движения атомов запишем в виде

$$|\Phi\rangle = e^{ikz} + f(\Theta)e^{ikR}/R,$$

$z = R \cos \Theta$ — координата, отсчитанная вдоль оси, соединяющей атомы, $f(\Theta)$ — амплитуда рассеяния, определяемая прямым взаимодействием атомов, т. е. потенциалом V , $k = p/\hbar$ — волновое число (p — импульс относительного движения атомов). Вектор состояния, в котором учтена перестановка атомов, имеет вид

$$|\Phi'\rangle = e^{-ikz} + f(\pi - \Theta)e^{ikR}/R.$$

Используя эти определения, получим для искомой энергии обмена следующее выражение (см. Приложение В):

$$\bar{\varepsilon} = \frac{bT}{2kZ} \operatorname{Im} (I_2(k) + 2\bar{f}I_3(k)). \quad (22)$$

Здесь \bar{f} — усредненное по угловым переменным значение амплитуды, по порядку величины равное α , $b = C/T$, а

$$Z = \int_{\alpha}^{\rho} \exp\left(\frac{b}{R^3}\right) R^2 dR.$$

При выполнении неравенств $k\alpha > 1$, $\rho \gg \alpha$, $\alpha > a$ (a — боровский радиус, равный единице в атомной системе), используя приближенные значения интегралов, получаем

$$\bar{\varepsilon} = \pm \frac{3b^2T}{k\alpha^6} \frac{1}{R_0} \exp\left(\frac{4}{3}kR_0 - \frac{b}{\alpha^3}\right) \left(1 + \frac{2\bar{f}}{R_0} - \frac{1.5}{\alpha}\right) = \pm J, \quad (23)$$

где J — константа взаимодействия, которая входит в (4).

Численные оценки приведем для случая атомарного водорода. В области почти комнатных температур $T = 10^{-14}$ эрг (~ 100 К) константа $b = 5 \cdot 10^3 c$ (где $c \approx 0.3$), $k \approx 1$ (значения приведены в атомных единицах). Радиус потенциального барьера в модели Сюзерленда обычно выбирается в районе ван-дер-ваальсового минимума и равен приблизительно $\alpha \approx 5$, радиус $R_0 \approx 10$. При таких значениях величин из (23) получаем

$$J = 3C/R_0^3 \approx 3T.$$

При увеличении температуры на порядок точка перевала в интегралах оказывается внутри потенциального барьера, т. е. $R_0 < \alpha$, и расчет теряет силу.

Увеличение константы взаимодействия атомов за счет обменных эффектов есть следствие интерференционного перераспределения концентрации атомов в газе таким образом, что существенно повышается вероятность «когерентного» контакта атомов, дипольным образом попарно связанных друг с другом.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Известное положение о том, что увеличение температуры сверхизлучения системы ухудшает характеристики излучения тем, что уменьшается интенсивность высвечивания, на сегодняшний день не подвергается сомнению, но и не описывается последовательно теоретически [13]. Мы предлагаем модель, которая охватывает в своей основе как принципы взаимодействия атомов в сверхизлучающей системе, так и представление о тепловых возбуждениях такой системы, по характеру напоминающих спиновые волны. Мы назвали эти волны изоспиновыми. Наличие подобных возбуждений может быть подвергнуто экспериментальной проверке, идентифицировать их можно по характерной k -квадратной зависимости тонкой структуры линии сверхизлучения. Более того, существование подобных возбуждений должно по нашему мнению приводить к характерной температурной зависимости интенсивности сверхизлучающего импульса

$$I(T) = I_\infty \left(1 - \left(\frac{T}{T_C} \right)^{3/2} \right).$$

Исходя из представлений об изоспиновых волнах, мы рассчитали критическую температуру, выше которой эффект сверхизлучения пропадает. Эта температура в случае натрия составляет ~ 700 К (натрий в ридберговских состояниях перестает «сверхизлучать» при более высоких температурах), а в случае чистого водорода ~ 40 К.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-02-17076).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Обменная энергия при дипольном взаимодействии атомов

1. Система атомов водорода

Возьмем в качестве двухуровневой системы состояния $\psi_2 = \psi_{210}(\mathbf{r})$ и $\psi_1 = \psi_{100}(\mathbf{r})$, тогда обменный вклад в энергию в первом приближении равен

$$A = \frac{2d_{21}^z d_{12}^z}{R^3} = \langle \psi_{210}(\bar{\mathbf{r}}_I) \psi_{100}(\bar{\mathbf{r}}_{II}) \left| \frac{3d_{Iz} d_{IIz} - \mathbf{d}_I \mathbf{d}_{II}}{R^3} \right| \psi_{100}(\bar{\mathbf{r}}_I) \psi_{210}(\bar{\mathbf{r}}_{II}) \rangle,$$

где

$$d_{12}^z = d_{21}^z = \int \psi_{210}(\bar{\mathbf{r}}) r \cos \theta \psi_{100}(\bar{\mathbf{r}}) d^3 r = \frac{2^8}{3^5 \sqrt{2}} a.$$

Тогда

$$A = \frac{C}{R^3}, \quad C = \frac{2^{15}}{3^{10}} a^2, \quad (\text{A.1})$$

где a — радиус Бора.

2. Система атомов натрия

Для этой системы состояния имеют вид

$$\psi_2 = A_{n_2} \left(\frac{r}{2a} \right)^4 e^{-1.68r/2a} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta,$$

$$\psi_1 = A_{n_1} \left(\frac{r}{a} \right)^3 e^{-1.68r/a} \frac{1}{\sqrt{4\pi}}.$$

Определим нормировочные множители:

$$A_{n_2} = \frac{(1.68)^5 \sqrt{1.68}}{\sqrt{2a^3} \sqrt{10!}} 2^4, \quad A_{n_1} = \frac{(1.68)^4 \sqrt{1.68}}{\sqrt{a^3} \sqrt{8!}}.$$

В случае натрия дипольный момент перехода равен

$$d_{12}^z = d_{21}^z = \frac{2^{10} \sqrt{2^5}}{3^{11}} \frac{\sqrt{30}}{1.68} a. \quad (\text{A.2})$$

Тогда для обменного вклада в энергию дипольного взаимодействия атомов натрия получаем

$$A = \frac{C}{R^3}, \quad C = \frac{2^{26}}{3^{21} 1.68} 10a^2. \quad (\text{A.3})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Расчет интегралов вида

$$I_n(k) = \int_{\alpha}^{\rho} \exp \left(2ikR + \frac{b}{R^3} \right) \frac{dR}{R^n} \quad (\text{B.1})$$

проводится следующим образом.

Если $k \ll 1$, $n > 0$, $b > 0$, то интеграл вычисляется методом наискорейшего спуска [12]. Перевальная точка в комплексной плоскости определяется как

$$z_0 = R_0 \exp\left(-\frac{\pi i}{8} - \frac{in}{8k}\right), \quad \alpha < R_0 = \left(\frac{3b}{kT}\right)^{1/4}.$$

Интеграл быстро сходится при выполнении неравенства $kR_0 > 1$ и равен

$$I_n(k) = \frac{1}{R_0^{n-1}} \left(\frac{\pi}{4kR_0}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{4}{3}kR_0 + \frac{n+3}{8}\pi i\right). \quad (B.2)$$

При $k = 0$, $n = -2$ интеграл рассчитывается методом асимптотического разложения, при этом

$$Z = I_{-2}(0) = \frac{b^{1/2}}{3x_\alpha^{3/2}} e^{x_\alpha} \left(1 + \frac{3}{2x_\alpha} + O\left(\frac{x_\alpha}{x_\rho}\right)\right). \quad (B.3)$$

Здесь $x_\alpha = b/\alpha^3$, $x_\rho = b/\rho^3$.

Литература

1. А. В. Андреев, В. И. Емельянов, Ю. А. Ильинский, *Кооперативные явления в оптике*, Наука, Москва (1988).
2. С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, А. С. Чиркин, *Введение в статистическую радиофизику и оптику*, Наука, Москва (1981).
3. Ю. Л. Климонтович, *Кинетическая теория электромагнитных процессов*, Наука, Москва (1980).
4. R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **93**, 99 (1954).
5. V. I. Yukalov, *Acta Phys. Pol. A* **57**, 295 (1980).
6. Е. В. Орленко, А. А. Румянцев, *ЖЭТФ* **97**, 439 (1990). Е. В. Орленко, Т. Ю. Латышевская, *ЖЭТФ* **113**, 2129 (1998).
7. Д. И. Блохинцев, *Основы квантовой механики*, Наука, Москва (1983). Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1983).
8. А. И. Зайцев, В. А. Малышев, Е. Д. Трифионов, *ЖЭТФ* **84**, 475 (1983).
9. V. Coffey and R. Friedberg, *Phys. Rev. A* **17**, 1033 (1978). K. Nakamura and S. J. Washimiga, *J. Phys. C* **13**, 3483 (1980); H. Steudel, *Ann. Physik Leipz.* **37**, 57 (1980).
10. C. R. Stroud, J. H. Eberly, W. L. Lama, and L. Mandel, *Phys. Rev. A* **5**, 1094 (1972).
11. Е. В. Орленко, А. А. Румянцев, *ФНТ* **15**, 485 (1989).
12. Дж. Мэтьюз, Р. Уокер, *Математические методы физики*, Атомиздат, Москва (1972).
13. L. Moi, P. Goy, P. Gross, and J. M. Rainmond, *Phys. Rev. A* **27**, 2043 (1983); L. Moi, P. Goy, P. Gross, and J. M. Rainmond, *ibid*, 2065 (1983).