

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПОНДЕРОМОТОРНЫЕ СИЛЫ

Д. Р. Битук

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119899, Москва, Россия*

*М. В. Федоров**

*Институт общей физики Российской академии наук
117942, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 5 февраля 1999 г.

В задаче о взаимодействии релятивистского классического электрона с неоднородным электромагнитным полем во втором порядке теории возмущений выполнено разделение на быстрые и медленные движения и усреднение релятивистского уравнения Ньютона по быстрым осцилляциям. Найденная скорость изменения медленной составляющей импульса электрона интерпретируется как релятивистская пондеромоторная сила. Полученный результат является обобщением на релятивистский случай известного выражения для силы Гапонова—Миллера, действующей на покоящийся электрон. В общем случае найденные выражения для релятивистских пондеромоторных сил весьма сложны. Они упрощаются в приближениях стационарного поля (импульсы большой длительности) и малых градиентов. Рассмотрена конкретная, наиболее характерная и простая, реализация неоднородного поля — стационарный плоскосфокусированный пучок. Основным отличием релятивистских пондеромоторных сил от их нерелятивистского предела является многокомпонентность. Помимо обычной силы, направленной вдоль градиента поля, в релятивистском случае возникают также компоненты силы, не имеющие вида градиента от какого-либо потенциала и параллельные волновому вектору и направлению поляризации поля. Показано, что при движении релятивистского электрона в направлении, близком к направлению волнового вектора сфокусированного лазерного пучка, эти слагаемые могут значительно превышать градиентную силу. Сила, направленная вдоль вектора поляризации поля, возникает даже в том случае, когда градиент поля в этом направлении равен нулю.

PACS: 41.85.-p, 42.65.-k

1. ВВЕДЕНИЕ

Как хорошо известно, понятие о пондеромоторных силах широко используется в физике плазмы, в лазерной физике и во многих других разделах физики. В физике сплошных сред пондеромоторные силы понимаются как усредненные по времени силы, действующие на элемент среды и обусловленные либо неоднородностью поля, либо неоднородностью среды как таковой [1]. В случае разреженных сред под пондеромоторными силами часто понимаются усредненные по времени силы, действующие на отдельный электрон в пространственно-неоднородном электромагнитном поле. Такое

*E-mail: fedorov@gon.ran.gpi.ru

определение широко используется в физике плазмы и в физике взаимодействия свободных электронов или пучков ионизированных атомов с неоднородным полем сфокусированного лазерного излучения. В нерелятивистском приближении пондеромоторная сила, действующая на отдельный электрон, оказывается направленной вдоль градиента средней интенсивности поля и поэтому часто называется градиентной силой. По-видимому, впервые явное выражение для градиентной силы, действующей на нерелятивистский электрон, было получено в работе [2], и по этой причине другое часто используемое название (особенно в физике плазмы) — это «сила Гапонова—Миллера». В работе [2] выражение для пондеромоторной силы было получено путем применения процедуры итераций по полю к нерелятивистскому уравнению Ньютона с последующим усреднением по времени формул второго порядка (по полю). В работах [3, 4] было показано, что такой же результат может быть получен с помощью элементарной процедуры усреднения по времени нерелятивистского гамильтониана электрона в неоднородном электромагнитном поле $H = (\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)/c)^2/2m$, что дает

$$\mathbf{F}_{GM} = -\nabla U_{pond}(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

где

$$U_{pond}(\mathbf{r}, t) = \frac{e^2}{2mc^2} \overline{A^2(\mathbf{r}, t)} = \frac{e^2 \varepsilon_0^2(\mathbf{r})}{4m\omega^2} \quad (2)$$

— пондеромоторный потенциал, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -(c/\omega)\varepsilon_0(\mathbf{r})\cos(\omega t)$ — векторный потенциал поля, $\varepsilon_0(\mathbf{r})$ и ω — амплитуда его напряженности и частота, горизонтальная черта обозначает усреднение по периоду поля.

Условием применимости выражений (1), (2) является малость по сравнению со скоростью света c скорости поступательного движения электрона v и скорости осцилляций электрона в поле излучения $v_\varepsilon \equiv e\varepsilon_0/m\omega$: $v, v_\varepsilon \ll c$. Предположение о малости скорости осцилляций электрона ограничивает напряженность ε и интенсивность поля I условиями $\varepsilon \ll \varepsilon_{rel} = mc\omega/e$ и $I \ll I_{rel} = m^2 c^3 \omega^2 / 8\pi e^2$. В случае частот оптического диапазона $\varepsilon_{rel} \sim 10^{10}$ В/см и $I_{rel} \sim 10^{18}$ Вт/см². В настоящей работе сохраняется ограничение на поле $v_\varepsilon \ll c$, но в отношении скорости и энергии поступательного движения электрона никаких ограничений не предполагается. Иными словами, процедура итераций и усреднения Гапонова и Миллера [2] обобщается на случай релятивистских энергий поступательного движения электрона. Как и в [2], вычисления проводятся во втором порядке теории возмущений по неоднородному полю. Основным полученным ниже результатом состоит в том, что в релятивистском случае возникают добавки к градиентной силе, которые при определенных условиях не являются малыми, не имеют вида градиента от какого-либо потенциала и направлены не по градиенту поля.

Следует отметить, что в подобной постановке задачи усреднение классических уравнений движения электрона во втором порядке по неоднородному полю проводилось еще в 1966 г. Кибблом [5]. Однако в работе [5] усредненная сила, действующая на релятивистский электрон, не вычислялась и поэтому не были обнаружены отмеченные выше особенности релятивистских пондеромоторных сил. Эти особенности не были обнаружены и в работах [6, 7], в которых рассматривалось движение релятивистских электронов в сильных полях $I \geq I_{rel}$. Как было отмечено выше, в данной работе случай сильных полей не рассматривается. Поэтому в задаче данной работы не входит и детальное сопоставление с приближениями и условиями применимости результатов работ [6, 7].

В разд. 2 получены общие выражения для релятивистской пондеромоторной силы. В разд. 3 рассмотрен наиболее характерный частный случай конфигурации электромагнитного поля — случай плоскосфокусированного светового пучка.

2. УСРЕДНЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО УРАВНЕНИЯ НЬЮТОНА ВО ВТОРОМ ПОРЯДКЕ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим релятивистское уравнение Ньютона с силой Лоренца:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)], \quad (3)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ — напряженности электрического и магнитного полей,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t},$$

$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, \mathbf{p} — импульс электрона, \mathbf{v} — его скорость, $\mathbf{v} = c^2 \mathbf{p} / E$, а E — энергия, скорость изменения которой определяется как работа, производимая полем в единицу времени:

$$\frac{dE}{dt} = e\mathbf{v}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}, t). \quad (4)$$

С помощью уравнения (4) релятивистское уравнение Ньютона (3) может быть записано в эквивалентном виде как уравнение для скорости электрона \mathbf{v} :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{c^2}{E} \left\{ -\frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}[\nabla \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]] + \frac{e}{c^3} \mathbf{v} \left(\mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) \right\}. \quad (5)$$

В наиболее общем виде векторный потенциал поля, удовлетворяющего уравнениям Максвелла, задается в виде разложения Фурье:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} \mathbf{A}_{\mathbf{k}} \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)] + \text{c.c.}, \quad (6)$$

где $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ — коэффициенты разложения, являющиеся произвольными функциями трехмерного волнового вектора \mathbf{k} , а $\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$ — частота, соответствующая волновому вектору \mathbf{k} . Ниже будем предполагать, что спектральная ширина поля $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ невелика, $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$, где $\Delta\omega$ — ширина спектра, ω_0 — средняя частота излучения.

Заметим, что задание поля в виде (6) является достаточно общим для описания как пространственной, так и временной неоднородности, т. е. как распределения интенсивности поля в фокусе, так и включения и выключения поля при прохождении светового импульса.

Начальные условия к уравнению (6) задаются в виде

$$\mathbf{r}(t)|_{t \rightarrow t_0} = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(t)|_{t \rightarrow t_0} = \mathbf{v}_0, \quad (7)$$

где \mathbf{r}_0 и \mathbf{v}_0 — начальные радиус-вектор и скорость электрона, причем предполагается, что в области нахождения электрона в начальный момент времени t_0 поле отсутствует.

Очевидно, что в общем виде релятивистские уравнения движения электрона (3)–(5) не могут быть решены точно аналитически. По этой причине ограничимся в данной работе случаем относительно слабых полей, $v_e \ll c$ или $I \ll I_{rel}$. Предположим также, что при движении электрона в неоднородном поле возможно выделение различных масштабов времен и разделение на быстрые и медленные движения. Быстрыми являются осцилляции поля на невозмущенной траектории электрона, происходящие с частотой поля, преобразованной в соответствии с эффектом Доплера. В зависимости от направления скорости электрона частота света на его траектории меняется от $2\omega_0$ до $\omega_0/2\gamma^2$ [8, 9], где γ — релятивистский фактор поступательного движения электрона, $\gamma = [1 - (v_0/c)^2]^{-1/2}$, и движение с этими частотами считается быстрым. На фоне этих быстрых осцилляций медленным является достаточно плавное изменение амплитуды поля на траектории электрона. Предполагается, что амплитуды индуцированных полей быстрых осцилляций координат и скорости электрона малы по сравнению с амплитудами их плавных, медленных, но крупномасштабных изменений. В этом случае имеет смысл постановка задачи об усреднении уравнения движения электрона по быстрым осцилляциям и о нахождении усредненных уравнений для медленно изменяющихся составляющих скорости и импульса электрона. Заметим, что в рассматриваемом случае описанная постановка задачи имеет смысл только при выполнении определенных ограничений на размер области неоднородности поля и на начальную энергию электрона. В самом деле, отмеченный выше доплеровский сдвиг частоты осцилляций поля на траектории электрона проявляется также как увеличение пространственного периода индуцированных полей быстрых осцилляций электрона. Как известно [9], при движении релятивистского электрона вдоль оси сфокусированного лазерного излучения пространственный период осцилляций координат и скорости электрона в поле становится равным $2\gamma^2\lambda$, где $\lambda = 2\pi c/\omega_0$ — длина волны излучения. Усреднение по быстрым осцилляциям имеет смысл, если число осцилляций на длине фокуса L велико, т. е. если

$$L \gg 2\gamma^2\lambda. \quad (8)$$

Таким образом, основными идеями изложенного ниже рассмотрения являются метод итераций по взаимодействию электрона с полем и усреднение по быстрым осцилляциям. В рамках итерационной процедуры зависящие от времени радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ и скорость электрона $\mathbf{v}(t)$ ищутся в виде рядов теории возмущений

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}^{(0)}(t) + \mathbf{r}^{(1)}(t) + \mathbf{r}^{(2)}(t) + \dots, \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}^{(0)}(t) + \mathbf{v}^{(1)}(t) + \mathbf{v}^{(2)}(t) + \dots, \quad (9)$$

где $\mathbf{r}^{(n)}(t) \sim \mathbf{v}^{(n)}(t) \sim \varepsilon_0^n$ и решения нулевого порядка определяются начальными условиями (7):

$$\mathbf{r}^{(0)}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t, \quad \mathbf{v}^{(0)}(t) = \mathbf{v}_0. \quad (10)$$

Очевидно, что при подстановке $\mathbf{r} = \mathbf{r}^{(0)}(t)$ и $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)}(t)$ (10) в правую часть уравнения (5) в уравнении для $\mathbf{v}^{(1)}(t)$ возникают только быстроосциллирующие слагаемые. Используя представление векторного потенциала поля в виде (6), можно проинтегрировать возникающее уравнение для $\mathbf{v}^{(1)}(t)$ и найти явный вид решений первого порядка:

$$\mathbf{v}^{(1)}(t) = -\frac{ec}{2E_0} \int d\mathbf{k} \frac{\omega_{\mathbf{k}} \mathbf{B}_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k}\mathbf{v}_0} \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r}^{(0)}(t) - \omega_{\mathbf{k}} t)] + \text{с.с.}, \quad (11)$$

$$\mathbf{r}^{(1)}(t) = -\frac{ec}{2E_0} \int d\mathbf{k} \frac{\omega_k \mathbf{B}_k}{(\omega_k - \mathbf{k}\mathbf{v}_0)^2} \exp [i (\mathbf{k}\mathbf{r}^{(0)}(t) - \omega_k t)] + \text{с.с.}, \quad (12)$$

где для сокращения записи использовано обозначение

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{A}_k + \frac{[\mathbf{v}_0[\mathbf{k}\mathbf{A}_k]]}{\omega_k} - \frac{\mathbf{v}_0}{c^2} (\mathbf{v}_0 \mathbf{A}_k), \quad (13)$$

$E_0 = mc^2 [1 - (v_0/c)^2]^{-1/2}$ — начальная энергия электрона.

Очевидно, что прямое усреднение уравнений (11) и (12) дает нуль и не имеет никакого смысла. Отличные от нуля средние значения скорости и импульса электрона возникают только во втором порядке теории возмущений. Уравнение второго порядка удобно записать исходя из уравнения (3), в правую часть которого следует подставить выражения для напряженностей ϵ и \mathbf{H} через векторный потенциал \mathbf{A} , а также $\mathbf{r} = \mathbf{r}^{(1)}(t)$ и $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(1)}(t)$, что дает

$$\frac{d\mathbf{p}^{(2)}}{dt} = -\frac{e}{c} \times \left\{ (\mathbf{r}^{(1)}(t) \nabla) \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + [\mathbf{v}^{(1)}(t) [\nabla \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]] + [\mathbf{v}_0 [(\mathbf{r}^{(1)}(t) \nabla) \nabla \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]] \right\} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}^{(0)}(t)}, \quad (14)$$

где функции $\mathbf{v}^{(1)}(t)$ и $\mathbf{r}^{(1)}(t)$ определены уравнениями (11) и (12). Подставляя эти выражения в уравнение (14), усредняем последнее по быстрым осцилляциям. Практически это значит, что в возникающих суммах и интегралах мы опускаем слагаемые пропорциональные $\exp\{\pm i(\omega_k + \omega_{k'})t\}$ и оставляем только слагаемые с разностными частотами, пропорциональные $\exp\{\pm i(\omega_k - \omega_{k'})t\}$. Возникающая в результате усреднения скорость изменения медленной составляющей импульса электрона интерпретируется как пондеромоторная сила $\mathbf{F}_{pond}(t)$, действующая на электрон в любой текущий момент времени t во время его движения через область нахождения неоднородного поля. Окончательный общий результат вычислений имеет вид

$$\mathbf{F}_{pond}(t) = \frac{d\mathbf{p}^{(2)}}{dt} = -\frac{e^2}{2E_0} \text{Im} \left(\int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \exp \left\{ i [(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{r}^{(0)}(t) - (\omega_k - \omega_{k'})t] \right\} \times \right. \\ \left. \times \omega_k \left\{ \frac{[\mathbf{B}_k[\mathbf{k}'\mathbf{A}_{k'}^*]]}{\omega_k - \mathbf{k}\mathbf{v}_0} + \frac{\mathbf{k}'\mathbf{B}_k}{(\omega_k - \mathbf{k}\mathbf{v}_0)^2} (\omega_{k'}\mathbf{A}_{k'}^* + [\mathbf{v}_0[\mathbf{k}'\mathbf{A}_{k'}^*]]) \right\} \right). \quad (15)$$

Отметим, что, вообще говоря, в релятивистском случае определение средней (пондеромоторной) силы как средней по времени скорости изменения импульса \mathbf{p} не является единственным возможным. Например, средняя 4-сила может быть определена как производная по фазе $\varphi = \omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}$ от 4-импульса электрона, усредненная по φ [6]. Определение (15) не является релятивистски-ковариантным, что не мешает использованию его в лабораторной системе координат. Лабораторная система координат выделена из всех других, потому что в ней находится источник светового излучения. Как правило, поле в этой системе имеет наипростейший вид. Например, в рассматриваемом ниже случае импульсов большой длительности лабораторная система координат — это единственная система, в которой поле стационарно. Физический смысл определения (15) состоит в том, что интеграл по времени от силы $\mathbf{F}_{pond}(t)$ равен изменению импульса электрона $\Delta\mathbf{p}$ за все время взаимодействия. Изменение импульса, в свою очередь,

определяет, например, изменение направления движения электрона после прохождения им области локализации неоднородного поля (по сравнению с направлением его начального движения). Что касается усредненной по быстрым осцилляциям траектории электрона в целом ($\overline{\mathbf{r}(t)}$), то в общем релятивистском случае она не определяется средней силой (15). Для ее нахождения необходимо усреднять по времени уравнение для скорости \mathbf{v} (5), а не для импульса \mathbf{p} (3). Интегрирование усредненного уравнения (5) позволит получить и $\overline{\mathbf{r}(t)}$. Но в данной работе мы ограничимся только нахождением релятивистской пондеромоторной силы, определенной уравнением (15).

Общее выражение для $\mathbf{F}_{pond}(t)$ (15) справедливо для неоднородного поля произвольной пространственной и временной конфигурации. Важный частный случай, рассматриваемый ниже, — это случай стационарного поля. Данное приближение реализуется, если длительность лазерного импульса значительно больше, чем время пролета электрона через область неоднородности поля. В этом случае спектральная ширина излучения $\Delta\omega$ столь мала, что в подынтегральной функции уравнения (15) можно положить $\omega_k = \omega_{k'} = \omega_0$, что дает

$$\mathbf{F}_{pond}^{st}(t) = -\frac{e^2\omega_0}{2E_0} \text{Im} \left(\int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \exp \{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{r}^{(0)}(t)\} \times \right. \\ \left. \times \left\{ \frac{[\mathbf{B}_k[\mathbf{k}'\mathbf{A}_{k'}^*]]}{\omega_0 - \mathbf{k}\mathbf{v}_0} + \frac{\mathbf{k}'\mathbf{B}_k}{(\omega_k - \mathbf{k}\mathbf{v}_0)^2} (\omega_0\mathbf{A}_{k'}^* + [\mathbf{v}_0[\mathbf{k}'\mathbf{A}_{k'}^*]]) \right\} \right). \quad (16)$$

Формально интегрирование по \mathbf{k} и \mathbf{k}' в уравнении (16) может быть выполнено в общем виде, без конкретизации функций $\mathbf{A}_k, \mathbf{A}_{k'}$. Для этого следует заметить, что в случае стационарного поля спектральное разложение (6) принимает вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_0 t)], \quad (17)$$

где $\mathbf{A}_0(\mathbf{r})$ — комплексная амплитуда поля:

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{k} \mathbf{A}_k \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}). \quad (18)$$

Наконец, все степенные зависимости от \mathbf{k} и \mathbf{k}' в интегралах уравнения (16) могут быть заменены на операторы дифференцирования согласно правилам $\mathbf{k} \rightarrow i\nabla = i\partial/\partial\mathbf{r}$, $\mathbf{k}' \rightarrow -i\nabla' = -i\partial/\partial\mathbf{r}'$. В результате получается следующее операторное представление для релятивистской пондеромоторной силы:

$$\mathbf{F}_{pond}^{st}(t) = \frac{e^2\omega_0}{2E_0} \text{Im} \left\{ i \frac{[\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) [\nabla'\mathbf{A}_0^*(\mathbf{r}')]]}{\omega_0 - i\mathbf{v}_0\nabla} + \frac{\nabla'\mathbf{B}_0(\mathbf{r})}{(\omega_0 - i\mathbf{v}_0\nabla)^2} \times \right. \\ \left. \times (i\omega_0\mathbf{A}_0^*(\mathbf{r}') + [\mathbf{v}_0 [\nabla'\mathbf{A}_0^*(\mathbf{r}')]]) \right\} \Bigg|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}^{(0)}(t)}, \quad (19)$$

где операторные дроби определены рядами по степеням ∇ и ∇' , а функция $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$ равна

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) + i \frac{[\mathbf{v}_0 [\nabla\mathbf{A}_0(\mathbf{r})]]}{\omega_k} - \frac{\mathbf{v}_0}{c^2} (\mathbf{v}_0\mathbf{A}_0(\mathbf{r})). \quad (20)$$

Имея в виду данное определение операторных дробей через ряды по степеням ∇ , можно сказать, что в общем случае релятивистские пондеромоторные силы в стационарном неоднородном поле произвольной конфигурации определяются бесконечным числом высших производных от средней интенсивности поля $\overline{I(\mathbf{r})}$ в произвольной точке \mathbf{r} на траектории электрона, $\mathbf{r} = \mathbf{r}^{(0)}(t)$. Упрощение полученного общего выражения для силы $\mathbf{F}_{pond}^{st}(t)$ (19) возможно в приближении малых градиентов, когда в разложении по степеням ∇ можно ограничиться только первым порядком. Это приближение и соответствующие результаты будут описаны в следующем разделе на примере плоскофокусированного стационарного светового пучка.

3. ПОНДЕРОМОТОРНЫЕ СИЛЫ В СЛАБОНЕОДНОРОДНОМ СВЕТОВОМ ПОЛЕ

Рассмотрим теперь часто встречающийся случай слабонеоднородного поля. При определенных условиях таковым является, например, поле излучения, сфокусированного линзой. Критерии слабой неоднородности сформулированы ниже. Качественно поле является слабонеоднородным, если оно мало отличается от поля плоской волны, которая в свою очередь характеризуется некоторым средним волновым вектором \mathbf{k}_0 . В случае стационарного поля это значит, что в уравнениях (17), (18) можно конкретизировать вид комплексной амплитуды $A_0(\mathbf{r})$, задавая ее в виде произведения медленной функции координат $A_{00}(\mathbf{r})$ на $\exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{r})$:

$$A(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [A_{00}(\mathbf{r}) \exp \{i(\mathbf{k}_0\mathbf{r} - \omega_0 t)\}], \tag{21}$$

где для медленной функции $A_{00}(\mathbf{r})$ по-прежнему аналогично (18) может быть использовано разложение в интеграл Фурье

$$A_{00}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{k} A_{0k} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}). \tag{22}$$

В этих обозначениях пондеромоторная сила определяется прежним уравнением (16), в котором следует заменить \mathbf{k} и \mathbf{k}' на $\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}'$. Медленность функции $A_{00}(\mathbf{r})$ (22) по сравнению с $\exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{r})$ означает, что в среднем $|\mathbf{k}| \ll k_0$. Аналогично тому, как сделано при переходе от уравнения (16) к (19), вновь можно провести интегрирование по переменным \mathbf{k} и \mathbf{k}' и представить выражение для пондеромоторной силы в виде

$$\mathbf{F}_{pond}^{st}(t) = \frac{e^2\omega_0}{2E_0} \text{Im} \left\{ i \frac{[\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) [(\nabla' + i\mathbf{k}_0)A_{00}^*(\mathbf{r}')]]}{\omega_0 - i\mathbf{k}_0\mathbf{v}_0 - i\mathbf{v}_0\nabla} + \frac{(\nabla' + i\mathbf{k}_0)\mathbf{B}_0(\mathbf{r})}{(\omega_0 - i\mathbf{k}_0\mathbf{v}_0 - i\mathbf{v}_0\nabla)^2} \times \right. \\ \left. \times (i\omega_0 A_{00}^*(\mathbf{r}') + [\mathbf{v}_0 [(\nabla' + i\mathbf{k}_0)A_{00}^*(\mathbf{r}')]]) \right\} \Bigg|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}^{(0)}(t)}, \tag{23}$$

где

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = A_{00}(\mathbf{r}) + i \frac{[\mathbf{v}_0 [(\nabla - i\mathbf{k}_0)A_{00}(\mathbf{r})]]}{\omega_k} - \frac{\mathbf{v}_0}{c^2} (\mathbf{v}_0 A_{00}(\mathbf{r})). \tag{24}$$

Медленность функции $A_{00}(\mathbf{r})$ (22) будем понимать как малость градиентов ∇ и ∇' по сравнению с $(\omega_0 - \mathbf{k}_0\mathbf{v}_0)/v_0$ в знаменателях уравнения (23):

$$|\mathbf{v}_0\nabla| \ll \omega_0 - \mathbf{k}_0\mathbf{v}_0. \tag{25}$$

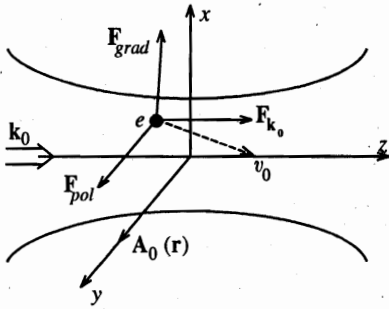


Рис. 1. Пондеромоторные силы, действующие на релятивистский электрон в неоднородном лазерном пучке

Разумеется, неравенство (25) — это условная запись, требующая расшифровки. Соответствующая явная оценка будет дана ниже. Пока заметим только, что в силу условия (25) при разложении операторных дробей в уравнении (23) в ряды по степеням ∇ и ∇' можно ограничиться низшим (линейным) приближением по градиентам, что дает

$$\mathbf{F}_{pond} = \mathbf{F}_{pol} + \mathbf{F}_{k_0} + \mathbf{F}_{grad}, \quad (26)$$

где \mathbf{F}_{pol} и \mathbf{F}_{k_0} направлены вдоль вектора поляризации $\mathbf{e} \equiv \mathbf{A}_{00}/|\mathbf{A}_{00}|$, а компонента силы \mathbf{F}_{grad} направлена вдоль градиента средней интенсивности поля. Вычисления по описанной схеме приводят к следующим уравнениями для указанных составляющих релятивистской пондеромоторной силы:

$$\mathbf{F}_{pol} = \frac{e^2}{2E_0(\omega_0 - \mathbf{k}_0\mathbf{v}_0)} (\mathbf{v}_0 \nabla) \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{A}_{00}^*(\mathbf{r}) \left(\mathbf{k}_0 \mathbf{A}_{00}(\mathbf{r}) + \frac{\omega_0}{c^2} (\mathbf{v}_0 \mathbf{A}_{00}(\mathbf{r})) \right) \right\}, \quad (27)$$

$$\mathbf{F}_{k_0} = -\frac{e^2}{2E_0(\omega_0 - \mathbf{k}_0\mathbf{v}_0)^2} \mathbf{k}_0 (\mathbf{v}_0 \nabla) \operatorname{Re} \left[(\mathbf{v}_0 \mathbf{A}_{00}(\mathbf{r})) (\mathbf{k}_0 \mathbf{A}_{00}^*(\mathbf{r})) \right], \quad (28)$$

$$\mathbf{F}_{grad} = -\frac{e^2}{2E_0} \nabla \left\{ |\mathbf{A}_{00}(\mathbf{r})|^2 + \frac{\operatorname{Re} [(\mathbf{v}_0 \mathbf{A}_{00}(\mathbf{r})) (\mathbf{k}_0 \mathbf{A}_{00}^*(\mathbf{r}))]}{\omega_0 - \mathbf{k}_0\mathbf{v}_0} \right\}. \quad (29)$$

Оценим теперь условия применимости приближения слабонеоднородного поля (25). Рассмотрим достаточно простую схему плоскосфокусированного лазерного излучения (рис. 1), градиент интенсивности которого направлен вдоль оси x , волновой вектор \mathbf{k}_0 — вдоль оси z и вектор поляризации $\mathbf{e} = \mathbf{A}_{00}/|\mathbf{A}_{00}|$ — вдоль оси y . Основным характерным параметром такой схемы является угол дифракционной расходимости излучения θ_{las} :

$$\theta_{las} = \frac{1}{k_0 d} = \frac{2\pi\lambda_0}{d} \sim \frac{d}{L} \sim \left(\frac{\lambda_0}{L} \right)^{1/2} \ll 1, \quad (30)$$

где d — поперечный размер и L — длина фокуса, $\lambda_0 = 2\pi/k_0$. Параметры θ_{las} и λ_0 могут быть использованы для оценки характерных величин поперечного и продольного (по отношению к \mathbf{k}_0) градиентов интенсивности поля:

$$\nabla_{\perp} = \frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{1}{d} \sim \frac{\theta_{las}}{\lambda_0}, \quad \nabla_{\parallel} = \frac{\partial}{\partial z} \sim \frac{1}{L} \sim \frac{\theta_{las}^2}{\lambda_0}. \quad (31)$$

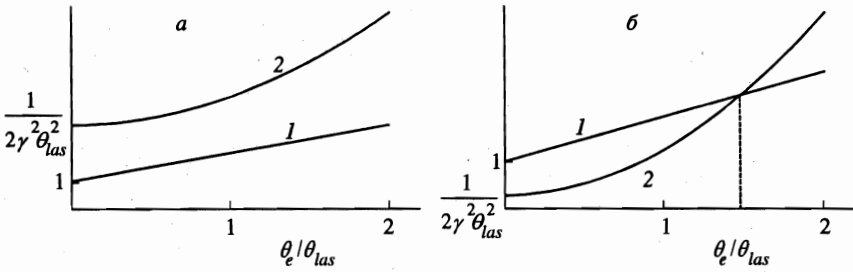


Рис. 2. Зависимости левой (1) и правой (2) частей неравенства (32) от θ_e/θ_{las} при $\gamma\sqrt{2} < 2\theta_{las}$ (а) и $\gamma\sqrt{2} > 2\theta_{las}$ (б)

Заметим, что оценки (31) характеризуют максимально возможные величины градиентов. В частности, оценки ∇_{\perp} и ∇_{\parallel} относятся к областям, достаточно удаленным, соответственно от оси фокуса и от фокальной плоскости (на оси $\nabla_{\perp} = 0$, а в фокальной плоскости $\nabla_{\parallel} = 0$). Пусть θ_e — малый угол между вектором скорости электрона v_0 и направлением распространения лазерного луча (т. е. вектором k_0). Пусть также скорость электрона v_0 близка к скорости света c и $1 - v_0 \approx 1/2\gamma^2$, где $\gamma \gg 1$. В этих условиях с помощью оценок (31) критерий (25) может быть представлен в виде

$$1 + \frac{\theta_e}{\theta_{las}} \ll \frac{1}{2\gamma^2\theta_{las}^2} + \left(\frac{\theta_e}{\theta_{las}}\right)^2. \tag{32}$$

Зависимости левой и правой частей этого неравенства от отношения углов θ_e/θ_{las} при двух различных величинах параметра $\gamma^2\theta_{las}^2$ изображены графически на рис. 2. Если степень релятивизма электрона не слишком велика, $\gamma^2\theta_{las}^2 \ll 1$, то неравенство (32) выполняется при любых значениях θ_e/θ_{las} . Если же энергия электрона столь велика, что $\gamma^2\theta_{las}^2 \gg 1$, то неравенство (32) выполняется только при $\theta_e > \theta_{las}$, т. е. если угол между направлением скорости электрона v_0 и вектором k_0 не слишком мал. Это значит, что при $\gamma^2\theta_{las}^2 \gg 1$ и при движении электрона вдоль или почти вдоль оси фокуса ($\theta_e < \theta_{las}$) приближение слабонеоднородного поля неприменимо и релятивистская пондеромоторная сила определяется общими уравнениями (16), (19), (23), (24), но не упрощенными уравнениями (27)–(29), линейными по градиенту поля. В важном частном случае $\gamma = 1/\theta_e$ условие (32) выполняется только при $\theta_e > \theta_{las}$.

Перейдем теперь к анализу зависимостей и оценкам величин составляющих пондеромоторной силы (27)–(29). Рассмотрим ту же схему плоской фокусировки, что и выше (рис. 1). В силу предположения о том, что вектор поляризации поля ортогонален как градиенту поля, так и волновому вектору k_0 , $k_0 A_{00}(\mathbf{r}) \equiv 0$ и, следовательно, также и $F_{k_0} \equiv 0$. Если, кроме того, вектор скорости v_0 лежит в плоскости, образованной векторами k_0 и e , то уравнения (27) и (29) для F_{pol} и F_{grad} принимают вид

$$F_{pol} = e_y \frac{e^2 \theta_e \gamma^2}{2E_0(1 + \gamma^2 \theta_e^2)} \frac{\partial}{\partial z} |A_{00}(\mathbf{r})|^2, \quad |F_{pol}| \sim \frac{e^2 \theta_e \theta_{las}^2 \gamma^2 |A_{00}|^2}{2E_0 \lambda_0 (1 + \gamma^2 \theta_e^2)}, \tag{33}$$

$$F_{grad} = -\frac{e^2}{2E_0} \left(e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_z \frac{\partial}{\partial z} \right) |A_{00}(\mathbf{r})|^2 \sim -\frac{e^2 |A_{00}|^2}{2E_0 \lambda_0} (e_x \theta_{las} + e_z \theta_{las}^2), \tag{34}$$

где e_x , e_y и e_z — единичные векторы вдоль осей x , y и z (см. рис. 1).

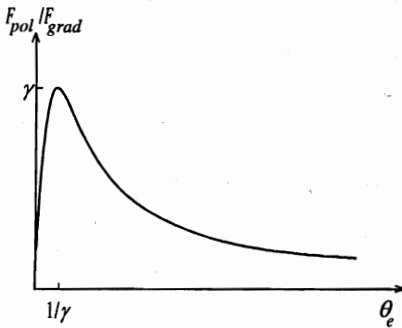


Рис. 3. Зависимость от угла θ_e отношения составляющей релятивистской пондеромоторной силы, направленной вдоль вектора поляризации поля, F_{pol} (33), к градиентной составляющей $F_{grad\parallel}$ (34)

Легко видеть, что уравнение (34) есть прямое и достаточно элементарное обобщение силы Гапонова—Миллера: F_{grad} (34) получается из (1), (2) с помощью замены массы электрона m на $E_0/c^2 = \gamma m$.

Из уравнения (33) следует, что зависимость силы F_{pol} от θ_e имеет максимум (рис. 3) при $\theta_e = 1/\gamma$ и в максимуме

$$F_{pol}^{max} = \frac{e^2 \gamma}{2E_0} \frac{\partial}{\partial z} |A_{00}(\mathbf{r})|^2 \sim \frac{e^2 \theta_{las}^2 \gamma |A_{00}|^2}{2E_0 \lambda_0} \sim \gamma F_{grad\parallel} \gg F_{grad\parallel}, \tag{35}$$

т. е. сила, направленная вдоль вектора поляризации \mathbf{e}_y , в γ раз превышает продольную (направленную вдоль \mathbf{k}_0) компоненту градиентной силы $F_{grad\parallel} \equiv F_{gradz}$. В силу условия слабой неоднородности (32), при $\gamma = 1/\theta_e$ выполняемого только при $\theta_e > \theta_{las}$, сила F_{pol}^{max} (35) превышает также и поперечную градиентную силу $F_{grad\perp} \equiv F_{gradx}$:

$$\frac{F_{pol}^{max}}{F_{gradx}} \sim \frac{\gamma}{\theta_{las}} = \frac{\theta_e}{\theta_{las}} > 1. \tag{36}$$

Следует отметить, что, вообще говоря, целесообразно сравнивать одинаково направленные величины градиентной силы и добавок к ней. Однако в рассматриваемом случае плоской фокусировки градиентная сила в направлении y равна нулю, в то время как $F_{pol}^{max} \neq 0$ (35). В этом смысле можно сказать, что неградиентная пондеромоторная сила, направленная вдоль вектора поляризации поля, в бесконечное число раз превышает сонаправленную с ней градиентную силу.

Ввиду того что данный результат может показаться несколько неожиданным, поясним его происхождение на качественном уровне. Основная причина возникновения в релятивистском случае пондеромоторной силы, направленной вдоль вектора поляризации поля, состоит в отличии релятивистского уравнения для скорости электрона \mathbf{v} (5) от его нерелятивистского предела. Это различие определяется в основном последним слагаемым в правой части уравнения (5), пропорциональным $\mathbf{v}(\mathbf{v}\epsilon)$. При решении этого уравнения методом итераций в первом порядке возникает поправка к скорости, направленная вдоль вектора начальной скорости электрона $\mathbf{v}^{(1)} \propto \mathbf{v}_0$. Подстановка найденной таким образом составляющей $\mathbf{v}^{(1)}$ в последнее слагаемое уравнения (3) приводит к появлению в силе второго порядка слагаемого, пропорционального векторному произведению $[\mathbf{v}_0 \mathbf{H}]$. В случае, когда проекция начальной скорости электрона на направление волнового вектора \mathbf{k}_0 отлична от нуля, векторное произведение $[\mathbf{v}_0 \mathbf{H}]$ имеет компоненту, направленную вдоль вектора поляризации поля ϵ . Вычисление составляющей силы

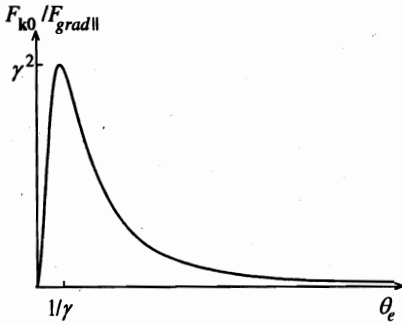


Рис. 4. Зависимость от угла θ_e отношения составляющей релятивистской пондеромоторной силы, направленной вдоль волнового вектора, F_{k_0} (37), к градиентной составляющей $F_{grad||}$ (37) в (34)

второго порядка таким элементарным способом и усреднение ее по быстрым осцилляциям приводит к результату, совпадающему с (33).

При другой поляризации поля, такой что вектор $A_{00}(\mathbf{r})$ лежит в плоскости градиента и вектора \mathbf{k}_0 (плоскость xz на рис. 1), произведение $\mathbf{k}_0 A_{00}(\mathbf{r})$ непостоянно и, вообще говоря, отлично от нуля. Если при этом и скорость электрона \mathbf{v}_0 лежит в той же плоскости xz , что и $A_{00}(\mathbf{r})$, то отличны от нуля как F_{pol} (27), так и F_{k_0} (28). При этом составляющая силы, направленная вдоль волнового вектора \mathbf{k}_0 , принимает вид

$$F_{k_0} = -e_z \frac{2e^2 \gamma^4}{E_0 (1 + \gamma^2 \theta_e^2)^2} \left(\theta_e \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \text{Re} [\theta_e A_{00x} + A_{00z}] A_{00z}^* \quad (37)$$

Учитывая оценки максимально возможных величин проекций векторного потенциала сфокусированного поля $A_{00x} \sim A_{00}$, $A_{00z} \sim \theta_{ias} A_{00}$, а также оценки производных потенциала (31), находим и оценку величины силы F_{k_0} (37):

$$F_{k_0} \sim \frac{e^2 \gamma^4 A_{00}^2 \theta_{ias}^2 (\theta_{ias} + \theta_e)^2}{E_0 \lambda_0 (1 + \gamma^2 \theta_e^2)^2} \quad (38)$$

Зависимость $|F_{k_0}(\theta_e)|$ изображена качественно на рис. 4. При $\gamma \theta_{ias} < 1$ и $\theta_e > \theta_{ias}$ максимум кривой достаточно хорошо выражен. Он достигается при $\theta_e \sim 1/\gamma > \theta_{ias}$, и в максимуме

$$F_{k_0}^{max} = -\frac{e^2 \gamma^2 A_{00}^2 \theta_{ias}^2}{E_0 \lambda_0} \sim \gamma^2 F_{grad||} \gg F_{grad||} \quad (39)$$

Как показывает этот результат, в рассматриваемом случае слабонеоднородного плоскософокусированного лазерного поля в оптимальных условиях сила, направленная вдоль оси фокуса, может в γ^2 раз превышать продольную градиентную силу. Иначе говоря, оценка силы, действующей на электрон в направлении \mathbf{k}_0 , по формуле (34) для тривиального релятивистского обобщения силы Гапонова—Миллера ($m \rightarrow \gamma m$) может приводить к грубой ошибке — в γ^2 раз, где $\gamma \gg 1$. Этот эффект имеет место при поляризации излучения в плоскости градиента поля xz , если, кроме того, вектор начальной скорости электрона \mathbf{v}_0 лежит в той же плоскости xz и составляет угол $\theta_e = 1/\gamma$ с направлением оси фокуса z , а релятивистский фактор γ и угол дифракционной расходимости сфокусированного излучения удовлетворяют условиям $\gamma \gg 1$, $\gamma \theta_{ias} < 1$ и $\theta_{ias} < \theta_e$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе найдено общее выражение (15) для пондеромоторных сил, действующих на релятивистский электрон со стороны неоднородного электромагнит-

ного поля произвольной конфигурации и с произвольной временной зависимостью. Конкретный анализ полученных результатов выполнен в приближении стационарного слабонеоднородного плоскосфокусированного поля. Дана оценка условий применимости приближения малой неоднородности поля (32), из которой следует, в частности, что при очень большой энергии электрона ($\gamma \gg 1/\theta_{las}$) и направлении его скорости, очень близком к направлению оси фокуса ($\theta_e \leq \theta_{las}$), приближение слабонеоднородного поля неприменимо и следует использовать найденное общее выражение (15) для релятивистских пондеромоторных сил. В условиях применимости приближения слабой неоднородности поля найдено, что релятивистские пондеромоторные силы являются многокомпонентными, т. е. помимо обычных градиентных сил они содержат также и слагаемые, направленные вдоль векторов поляризации поля и оси фокуса. Полученные оценки показывают, что найденные «добавки» могут значительно превышать градиентную составляющую релятивистской пондеромоторной силы. Найдены условия, при которых отличие релятивистской пондеромоторной силы от ее градиентной составляющей существенно. В основном эти условия сводятся к правильному выбору поляризации поля и направления вектора начальной скорости электрона v_0 , а также к такому соотношению между направлениями v_0 и оси фокуса (k_0), которые соответствуют условию $\gamma = 1/\theta_e$.

Помимо найденных выражений для релятивистских пондеромоторных сил как таковых представляет интерес и нахождение усредненных траекторий электрона в неоднородном поле в целом. Как было отмечено выше, эта задача может быть решена с помощью усреднения по времени релятивистского уравнения (5) для скорости электрона $v(t)$.

Результаты данной работы получены во втором порядке итераций по световому полю, что соответствует относительно малой интенсивности $I \ll I_{rel}$. Представляет несомненный интерес обобщение на случай более сильных полей. Кроме того, помимо данного в настоящей работе классического рассмотрения проблемы представляет интерес и решение квантовомеханической задачи о нахождении релятивистских пондеромоторных сил. По-видимому, при определенных условиях результаты настоящей работы могут быть воспроизведены на основе квантового решения, если в последнем начальное состояние электрона задавать в виде локализованных волновых пакетов [10, 11].

Авторы благодарны Н. Б. Нарожному за полезные критические замечания.

Литература

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
2. А. В. Гапонов, М. А. Миллер, ЖЭТФ 34, 242 (1958).
3. М. В. Федоров, ЖЭТФ 52, 1434 (1967).
4. L. S. Bartell, J. Appl. Phys. 38, 1561 (1967).
5. T. W. B. Kibble, Phys. Rev. 150, 1060 (1966).
6. S. P. Goreslavsky, N. B. Narozhny, O. V. Shcherbachev, and V. P. Yakovlev, Laser Phys. 3, 418 (1993).
7. D. Bauer, P. Mulser, and W.-H. Steeb, Phys. Rev. Lett. 75, 4622 (1995).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).
9. M. Fedorov, *Atomic and Free Electrons in a Strong Light Field*, World Sci., Singapore (1997).
10. M. V. Fedorov, S. P. Goreslavsky, and V. S. Letokhov, Phys. Rev. E 55, 1015 (1997).
11. D. R. Bitouk and M. V. Fedorov, Phys. Rev. A 58, 1195 (1998).