ЖЭТФ, 1999, том 116, вып. 4(10), стр. 1484–1498

СВЕРХЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ ЦВЕТНЫМ ШУМОМ К ВНЕШНЕМУ ПЕРИОДИЧЕСКОМУ СИГНАЛУ

*С. Л. Гинзбург, М. А. Пустовойт**

Петербургский институт ядерной физики им. Б. П. Константинова Российской академии наук 188350, Гатчина, Ленинградская обл., Россия

Поступила в редакцию 17 марта 1999 г.

Аналитически и с помощью численного моделирования изучена простая нелинейная стохастическая система — передемпфированный крамерсовский осциллятор с мультипликативным цветным шумом. Показано, что в области существования *on-off*-перемежаемости система становится сверхчувствительной к слабому внешнему периодическому сигналу.

PACS: 05.40.+j, 05.45.+b

1. ВВЕДЕНИЕ

Ныне общепризнано, что влияние шума в ряде стохастических систем способно приводить к явлениям, на первый взгляд противоречащих здравому смыслу. В качестве широко известного примера такого явления можно назвать стохастический резонанс, когда воздействие шума приводит к усилению системой внешнего (как правило, периодического) сигнала [1]. Другой класс подобных явлений известен под названием индуцированного шумом переноса, когда стохастическая система с асимметричным потенциалом и цветным шумом работает подобно храповику, и в результате возникает поток вещества, вызванный шумом [2]. Такая система напоминает известного демона Максвелла. Еще один пример — индуцированный шумом фазовый переход в системах с мультипликативным (параметрическим) шумом [3]. Здесь добавление шума к мультипликативному малому бифуркационному параметру приводит к возникновению фазового состояния, не существующего в отсутствие шума.

Недавно нами было обнаружено еще одно необычное явление, демонстрирующее конструктивную роль шума в нелинейных системах. Оказалось, что нелинейная система (крамерсовский осциллятор) с мультипликативным белым шумом, находящаяся под воздействием сверхслабого периодического сигнала, в режиме *on-off*-перемежаемости способна усиливать этот сигнал на много порядков величины [4]. Мы назвали это явление индуцированной шумом сверхчувствительностью.

Однако для дальнейшего выяснения физической картины явления необходимо иметь в виду, что белый шум является абстракцией, поскольку любой физически реальный шумовой процесс является цветным, т. е. имеет конечное время корреляции τ.

*E-mail: markp@hep486.pnpi.spb.ru

При теоретическом рассмотрении задачи в общем виде необходимо обеспечить условие предельного перехода к белому шуму, когда одновременно с уменьшением τ амплитуда шума возрастает как $\tau^{-1/2}$. Реально это условие практически никогда не выполняется, и, следовательно, приближение белого шума неприменимо. Кроме того, учет конечности времени корреляции необходим, когда это время сравнимо с периодом внешнего сигнала. Поэтому в настоящей работе мы проводим теоретическое и модельное исследование крамерсовского осциллятора с мультипликативным цветным шумом с самого начала. Поскольку известно, что стохастическое дифференциальное уравнение с цветным гауссовым шумом не имеет точного решения [3], мы проводим теоретический анализ для случая дихотомического цветного шума, а численное моделирование — также и для гауссова цветного шума. В обоих этих случаях результаты оказываются практически одинаковыми. Мы определяем зависимость коэффициента усиления периодического сигнала от амплитуды и времени корреляции цветного шума и показываем, что явление сверхчувствительности имеет место в широкой области этих параметров. Коэффициент усиления сигнала возрастает на много порядков при увеличении как амплитуды, так и времени корреляции шума от нуля до оптимальных значений. При этом зависимость коэффициента усиления от этих параметров имеет универсальный характер для разных типов шума — как гауссова, так и дихотомического (телеграфного)..

Работа построена следующим образом. В разд. 2 мы описываем нашу модель и приводим основные уравнения для одночастичной плотности распределения. В разд. 3 мы вкратце повторяем основные результаты работы [4] для белого шума, затем находим вид одночастичной плотности распределения для цветного дихотомического шума в адиабатическом приближении и ее моменты. В разд. 4 представлены результаты численного моделирования для белого, цветного дихотомического и цветного гауссова шумов. Здесь мы находим область параметров системы, в которой возникает сверхчувствительность. Выводы приведены в разд. 5.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Мы изучаем стохастическое уравнение передемпфированного крамерсовского осциллятора с мультипликативным шумом в периодическом поле в виде прямоугольного сигнала:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x + z(t)x - Ux^3 + AR(t),$$
$$R(t+T) = R(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \le T/2, \\ -1, & T/2 < t \le T. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь λ, U и A — постоянные параметры, а $z(t)$ — случайная величина с автокоррелятором

$$\langle z(t)z(t')\rangle = \Delta^2 e^{-\gamma|t-t'|}. \tag{2}$$

Если $z(t)$ — гауссова случайная функция, то она удовлетворяет уравнению Орнштейна—Уленбека:

$$\frac{dz}{dt} = -\gamma z + \Delta\sqrt{2\gamma}\,\xi(t),$$
$$\langle \xi(t)\xi(t')\rangle = \delta(t-t'), \tag{3}$$

где $\xi(t)$ — белый шум.

Для дихотомического шума $z(t)$ записывается следующим образом:

$$z(t) = S(t)\Delta, \quad S(t) = \pm 1, \tag{4}$$

где $S(t)$ — случайная величина, которая меняет знак с вероятностью $\gamma/2$ в единицу времени. Тогда $z(t)$ является разрывной переменной, реализацию которой можно записать следующим образом. Введем в рассмотрение дискретное время $t_k = k\Delta t$ и напишем отображение

$$\begin{gathered} S_{k+1} = \frac{1}{2}(\xi_{+,k} - \xi_{-,k}) + \frac{1}{2}(\xi_{+,k} + \xi_{-,k})S_k = \\ = \begin{cases} \xi_{+,k}S_k, & S_k = 1, \\ \xi_{-,k}S_k, & S_k = -1, \end{cases} \\ f(\xi_{\pm,k}) = \frac{\gamma}{2}\delta(\xi_{\pm,k} + 1)\Delta t + \left(1 - \frac{\gamma}{2}\Delta t\right)\delta(\xi_{\pm,k} - 1). \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $\xi_{+,k}$ и $\xi_{-,k}$ — две случайные независимые величины, значения которых определяются распределением $f(\xi)$. Если соответствующая величина отрицательна, то $S(t)$ меняет знак. В пределе $\Delta t \to 0$ получаем случайный телеграфный (симметричный дихотомический) шум. Если положить в (2)

$$\Delta^2 = \gamma\beta^2/2, \quad \gamma \to \infty, \tag{6}$$

то

$$\langle z(t)z(t')\rangle = \beta^2\delta(t - t'),$$

что означает переход как гауссова, так и дихотомического цветного шума в белый гауссов шум. Уравнение (1) понимается при этом по Стратоновичу.

В случае белого шума уравнение (1) определяет одномерный марковский процесс, для которого можно записать уравнение Фоккера—Планка:

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\left(\lambda + \frac{\beta^2}{2}\right)x - Ux^3 + AR(t)\right]F(x,t)\right\} + \frac{\beta^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[x^2F(x,t)\right]. \tag{7}$$

Для цветного шума $x(t)$ и $z(t)$ определяют двумерный марковский процесс, для которого существует двумерное уравнение Фоккера—Планка. Для гауссова шума оно имеет вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial F(x,z,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[(\lambda + z)x - Ux^3 + AR(t)\right]F(x,z,t)\right\} + \\ + \gamma\frac{\partial}{\partial z}\left[zF(x,z,t)\right] + \gamma\Delta^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}F(x,z,t). \end{gathered} \tag{8}$$

Поскольку последнее уравнение не удовлетворяет условиям потенциальности [5], написать его точное решение невозможно.

Для дихотомического шума переменная $z(t)$ может принимать лишь два значения, поэтому вместо уравнения в частных производных (8) получим два обыкновенных уравнения [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x,\Delta,t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[(\lambda+\Delta)x - Ux^3 + AR(t)\right]F(x,\Delta,t)\right\} + \\ &+ \frac{\gamma}{2}\left[F(x,-\Delta,t) - F(x,\Delta,t)\right], \\ \frac{\partial F(x,-\Delta,t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[(\lambda-\Delta)x - Ux^3 + AR(t)\right]F(x,-\Delta,t)\right\} + \\ &+ \frac{\gamma}{2}\left[F(x,\Delta,t) - F(x,-\Delta,t)\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В АДИАБАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Теперь решим уравнения (7) и (9) в адиабатическом приближении (характерное время релаксации системы много меньше периода сигнала) и затем оценим времена переключения выходного сигнала. Эта оценка даст возможность сделать вывод о применимости адиабатического приближения.

Начнем с уравнения (7). Для малых амплитуд сигнала (примем здесь и далее $A \approx$ $\approx 10^{-10}$) его решение в адиабатическом приближении имеет вид [4]

$$F(x,t) = C|x|^{\alpha-1}\theta\left(R(t)x\right)\exp\left\{-\frac{2AR(t)}{\beta^2 x} - \frac{Ux^2}{\beta^2}\right\}, \quad \alpha = 2\lambda/\beta^2, \tag{10}$$

где θ — ступенчатая функция Хевисайда. Асимптотики нормировочного множителя C при малых значениях параметра α таковы:

$$C = \begin{cases} \alpha, & \alpha > 0, \quad \zeta \gg 1, \\ \left[\ln(1/A)\right]^{-1}, & \qquad\quad \zeta \ll 1, \\ |\alpha| A^{|\alpha|}, & \alpha < 0, \quad \zeta \gg 1, \end{cases} \tag{11}$$

$$\zeta = |\alpha|\ln(1/A), \quad |\alpha| \ll 1, \quad U/\beta^2 \sim 1.$$

Решение (10) обладает двумя интересными свойствами. Во-первых, $F(x) \propto \theta(x)$ при $R(t) > 0$ и $F(x) \propto \theta(-x)$ при $R(t) < 0$. Это значит, что при смене знака входного сигнала выходной сигнал тоже изменит знак через некоторое время T_0, оценку для которого мы приводим ниже. Решение (10) получено при условии $T \gg T_0$. Детальный его вывод приведен в [4]. Во-вторых, в случае сверхслабого сигнала распределение $F(x)$ имеет скейлинговый вид в широкой области изменения x:

$$F(x) = C|x|^{\alpha-1}\theta\left(R(t)x\right), \quad A \ll x \ll x_0 \approx \beta/\sqrt{U}. \tag{12}$$

Далее, из (11) видно, что при $\zeta \sim 1$, т. е. при амплитуде сигнала

$$A_0 = \exp\left(-1/|\alpha|\right),$$

происходит кроссовер, т. е. при $|\alpha| \ll 1$ сверхслабый сигнал $A_0 \ll A \ll x_0$ меняет плотность распределения кардинально. В монографии [3] рассматривалась лишь область

$A \ll A_0$. При этом для $\lambda < 0$ функция $F(x)$ стремится к $\delta(x)$: $F(x) \to \delta(x)$. Мы же изучаем область $A_0 \ll A \ll x_0$ при малых абсолютных значениях параметра α. Именно в этой области обнаруживаются интересующие нас эффекты. Чтобы сразу увидеть их, вычислим моменты $F(x,t)$. Учитывая явный вид $R(t)$ в (1), в адиабатическом приближении получим для малых ζ:

$$\begin{aligned} &\langle x(t)\rangle = \frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{\pi}{U}}\,\frac{1}{\ln(1/A)}\,R(t), \\ &\langle x^2(t)\rangle = \frac{\beta^2}{2U}\,\frac{1}{\ln(1/A)}, \\ &\frac{\langle x(t)\rangle^2}{\langle x^2(t)\rangle} = \frac{\pi}{2\ln(1/A)} \ll 1, \\ &I = \frac{\langle x(t)\rangle}{AR(t)} = \sqrt{\frac{\pi}{4U}}\,\frac{\beta}{A\ln(1/A)}. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь I — коэффициент усиления сигнала.

Выражение для I справедливо лишь в адиабатическом приближении. В общем случае коэффициент усиления определяется как

$$I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\langle x(t)\rangle^2}{A^2}\,dt. \tag{14}$$

Поскольку $\ln(1/A)$ — довольно слабая функция, первый момент имеет величину порядка x_0, а коэффициент усиления гигантский (при $\beta = 0.7$, $U = 1$, $A = 10^{-11}$ величина I равна $2.5\cdot 10^9$). Заметим, что $x(t)$ сильно флуктуирует и дисперсия велика по сравнению со средним. Однако, поскольку $\langle x(t)\rangle$ — знакопеременная величина, а $\langle x^2(t)\rangle$ — нет, сигнал легко обнаруживается обычными спектральными методами.

Описанное выше явление, индуцированное сильным мультипликативным шумом, мы назвали сверхчувствительностью к слабым переменным сигналам.

Оценим теперь время T_0 переключения сигнала при изменении знака $R(t)$ исходя из простых физических соображений. При переключении знака $R(t)$ траектория $x(t)$ меняет знак только тогда, когда $|x|$ достигает A. Поэтому необходимо определить из (10) вероятность того, что переменная x окажется в области $|x| \le A$, т. е. будет готова перейти через нуль. Очевидно, что значение T_0 обратно пропорционально этой вероятности:

$$T_0^{-1} \propto \int_0^A F(x)dx \propto CA^\alpha,$$

$$T_0 \propto \begin{cases} A^{-\alpha}/\alpha, & \alpha > 0, \quad \zeta \gg 1, \\ \ln(1/A), & \qquad\quad\;\; \zeta \ll 1, \\ 1/|\alpha|, & \alpha < 0, \quad \zeta \gg 1. \end{cases} \tag{15}$$

Видно, что адиабатичность нарушается (время T_0 становится велико) в области положительных α. При $\alpha < 0$, $\zeta \gg 1$ она выполняется всегда, а при $\zeta \ll 1$ происходит кроссовер к неадиабатическому поведению. Приведенные ниже результаты численного моделирования отчетливо это демонстрируют.

Перейдем теперь к случаю дихотомического шума, т. е. к решению (9) в адиабатическом приближении. В монографии [3] показано, что при постоянном входном сигнале ($R(t) = 1$) можно найти стационарное решение уравнения (9). Переходя к адиабатическому переменному сигналу, выпишем отдельно решение для положительных и отрицательных значений входного сигнала. При $R(t) = 1$ получим из (9) для плотности распределения $F(x) = F(x,\Delta) + F(x,-\Delta)$ следующие замкнутые выражения [3]:

$$\begin{gathered}
F(x) = C\frac{g(x)}{\Delta^2 g^2(x) - f^2(x)}\exp\left[-\frac{\gamma}{2}\int dz\left(\frac{1}{f(z)-g(z)\Delta}+\frac{1}{f(z)+g(z)\Delta}\right)\right],\\
F(x,\Delta) = \frac{g(x)\Delta - f(x)}{2g(x)\Delta}F(x), \quad F(x,-\Delta) = \frac{g(x)\Delta + f(x)}{2g(x)\Delta}F(x),\\
f(x) = \lambda x - Ux^3 + A, \quad g(x) = x.
\end{gathered} \tag{16}$$

Прежде всего заметим, что при предельном переходе к белому шуму (6) получается стандартное решение уравнения (7) [3, 5]:

$$F(x) = \frac{C}{g(x)}\exp\left[\frac{2}{\beta^2}\int\frac{f(x)}{g^2(x)}\,dx\right]. \tag{17}$$

Далее, в задаче присутствуют три константы одной размерности: Δ, λ и γ. Нас интересует область малых λ, поэтому в дальнейшем примем $|\lambda| < \Delta$. Никаких других соотношений между этими константами мы априори не вводим. Тогда решение (16) после вычисления интегралов имеет вид

$$\begin{aligned}
F(x) &= Cx\left(x+\frac{A}{\Delta+\lambda}\right)^{-1-\gamma/2(\Delta+\lambda)}\left(x-\frac{A}{\Delta-\lambda}\right)^{-1+\gamma/2(\Delta-\lambda)}\times\\
&\times\left(\frac{\Delta+\lambda}{U}-x^2\right)^{-1+\gamma/4(\Delta+\lambda)}\left(\frac{\Delta-\lambda}{U}+x^2\right)^{-1-\gamma/4(\Delta-\lambda)},\\
F(x,\Delta) &= \frac{CU}{2\Delta}\left(x+\frac{A}{\Delta+\lambda}\right)^{-1-\gamma/2(\Delta+\lambda)}\left(x-\frac{A}{\Delta-\lambda}\right)^{\gamma/2(\Delta-\lambda)}\times\\
&\times\left(\frac{\Delta+\lambda}{U}-x^2\right)^{-1+\gamma/4(\Delta+\lambda)}\left(\frac{\Delta-\lambda}{U}+x^2\right)^{-\gamma/4(\Delta-\lambda)},\\
F(x,-\Delta) &= \frac{CU}{2\Delta}\left(x+\frac{A}{\Delta+\lambda}\right)^{-\gamma/2(\Delta+\lambda)}\left(x-\frac{A}{\Delta-\lambda}\right)^{-1+\gamma/2(\Delta-\lambda)}\times\\
&\times\left(\frac{\Delta+\lambda}{U}-x^2\right)^{\gamma/4(\Delta+\lambda)}\left(\frac{\Delta-\lambda}{U}+x^2\right)^{-1-\gamma/4(\Delta-\lambda)},\\
R(t) &= +1.
\end{aligned} \tag{18}$$

Следуя [3], можно показать, что $F(x)$ и $F(x,\pm\Delta)$ заданы на интервале $(A/(\Delta-\lambda), \sqrt{(\Delta+\lambda)/U})$. Этот интервал называется носителем функции $F(x)$.

Из (18) видно, что при малых γ для $z = \Delta$ имеется сингулярность лишь при $x = \sqrt{(\Delta+\lambda)/U}$, а при $z = -\Delta$ — лишь при $x = A/(\Delta-\lambda)$, т.е. при $\gamma \to 0$ имеется очень сильная корреляция между x и z, что совершенно естественно.

Далее, для отрицательного входного сигнала имеем

$$F(x) = C\cdot(-x)\left(-x+\frac{A}{\Delta+\lambda}\right)^{-1-\gamma/2(\Delta+\lambda)}\left(-x-\frac{A}{\Delta-\lambda}\right)^{-1+\gamma/2(\Delta-\lambda)}\times$$
$$\times\left(\frac{\Delta+\lambda}{U}-x^2\right)^{-1+\gamma/4(\Delta+\lambda)}\left(\frac{\Delta-\lambda}{U}+x^2\right)^{-1-\gamma/4(\Delta-\lambda)}, \tag{19}$$
$$R(t) = -1, \quad x\in\left(-\sqrt{\frac{\Delta+\lambda}{U}},-\frac{A}{\Delta-\lambda}\right)$$

и аналогично для $F(x,\pm\Delta)$.

Таким образом, (18) и (19) переходят друг в друга при замене x на $-x$, что означает зеркальную симметрию плотности распределения относительно нуля. Поэтому в дальнейшем мы рассматриваем в основном лишь случай положительного входного сигнала.

Примем сначала в (18) $A = 0$. Тогда

$$F(x) = Cx^{-1+\alpha}\left(\frac{\Delta+\lambda}{U}-x^2\right)^{-1+\gamma/4(\Delta+\lambda)}\left(\frac{\Delta-\lambda}{U}+x^2\right)^{-1-\gamma/4(\Delta-\lambda)},$$
$$F(x,\Delta) = \frac{UC}{2\Delta}x^{-1+\alpha}\left(\frac{\Delta+\lambda}{U}-x^2\right)^{-1+\gamma/4(\Delta+\lambda)}\left(\frac{\Delta-\lambda}{U}+x^2\right)^{-\gamma/4(\Delta-\lambda)},$$
$$F(x,-\Delta) = \frac{UC}{2\Delta}x^{-1+\alpha}\left(\frac{\Delta+\lambda}{U}-x^2\right)^{\gamma/4(\Delta+\lambda)}\left(\frac{\Delta-\lambda}{U}+x^2\right)^{-1-\gamma/4(\Delta-\lambda)}, \tag{20}$$
$$\alpha = \frac{\lambda\gamma}{\Delta^2-\lambda^2}, \quad x\in\left(0,\sqrt{\frac{\Delta+\lambda}{U}}\right).$$

Из (18) и (20) видно, что при $\gamma = \gamma_c = 4(\Delta+\lambda)$ меняется характер плотности вероятности. При $\gamma < \gamma_c$ имеется сингулярность функций $F(x)$, $F(x,\Delta)$ при $x = x_0 = \sqrt{(\Delta+\lambda)/U}$ (т.е. система много времени проводит вблизи x_0), а при $\gamma > \gamma_c$ она исчезает. Далее, из (20) видно, что в широком интервале $A \ll x \ll x_0$ плотность распределения имеет вид $F(x) \propto x^{\alpha-1}$, как и в случае белого шума, только с иначе определенным параметром α (при предельном переходе к белому шуму эти два определения совпадают). Из (20) следует также, что у всех функций $F(x)$, $F(x,\pm\Delta)$ имеется одинаковая сингулярность при $x = 0$, а при $x = x_0$ функции $F(x)$ и $F(x,\Delta)$ сингулярны, а $F(x,-\Delta)$ обращается в нуль. Далее, при $\alpha < 0$ нормировочный интеграл расходится, т.е. необходимо учитывать конечность амплитуды сигнала A.

Множитель C выражается через гипергеометрическую функцию. Однако ясно, что, поскольку сингулярность при $x = 0$ обрезается нижней границей носителя $F(x)$, достаточно хорошая оценка для C получится, если положить просто

$$C^{-1} = B^{-1}\int\limits_A^{x_0} x^{\alpha-1}dx = B^{-1}\frac{x_0^\alpha - A^\alpha}{\alpha},$$

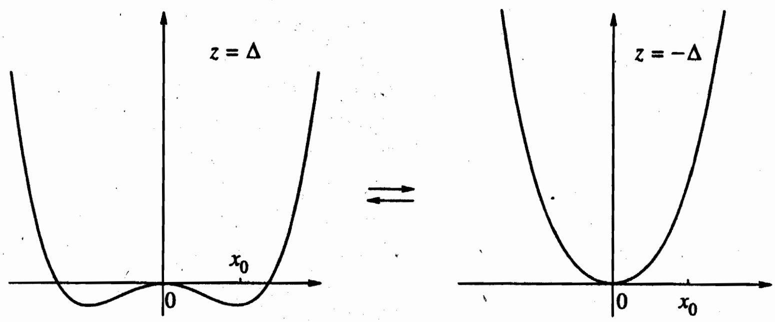


Рис. 1. Вид потенциальной кривой для уравнения (1) при двух значениях дихотомического шума в (4) и $A = 0$

где B — константа, не зависящая от A. При малых α

$$C = \begin{cases} B\alpha, & \alpha > 0, \quad \zeta \gg 1, \\ B/\ln(1/A), & \qquad\quad\ \zeta \ll 1, \\ B|\alpha|A^{|\alpha|}, & \alpha < 0, \quad \zeta \gg 1. \end{cases} \tag{21}$$

Это выражение совпадает с нормировкой (11). Поскольку явление сверхчувствительности связано с зависимостью C от α, ясно, что введение цветного дихотомического шума не меняет картину явления, влияя лишь на определение параметра α. Тем не менее интересно, что в случае сильно коррелированного шума, т. е. при уменьшении γ, уменьшается и α, т. е. дополнительно индуцируется сверхчувствительность. Рассмотрим область малых γ отдельно. Как видно из (17), при $\gamma \to 0$ все показатели степени стремятся к единице. Чтобы понять структуру ответа, рассмотрим случай $A = 0$, т. е. формулы (20). Главные множители в них — это $x^{\alpha-1}$ и $(x_0 - x)^{-1+\gamma/4(\Delta+\lambda)}$. Поэтому рассмотрим только их, т. е. напишем модельную плотность вероятности (для положительных λ):

$$\begin{gathered} F(y) = Cy^{\alpha-1}(1-y)^{\varepsilon-1}, \\ \varepsilon = \frac{\gamma}{4(\Delta+\lambda)}, \quad \alpha = \frac{\lambda\gamma}{\Delta^2-\lambda^2}, \quad y = \frac{x}{x_0}, \\ C = \frac{\Gamma(\alpha+\varepsilon)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\varepsilon)} \underset{\alpha,\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{\alpha\varepsilon}{\alpha+\varepsilon}. \end{gathered} \tag{22}$$

Усредняя произвольную функцию $f(y)$ по распределению (22), получим

$$\begin{aligned} \langle f(y)\rangle &= \frac{\alpha\varepsilon}{\alpha+\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\alpha+n+\varepsilon)} \underset{\alpha,\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} f(0) + \frac{\alpha}{\alpha+\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \\ &= \frac{\varepsilon}{\alpha+\varepsilon}f(0) + \frac{\alpha}{\alpha+\varepsilon}f(1). \end{aligned} \tag{23}$$

Из (23) видно, что при устремлении параметров α и ε к нулю

$$F(y) \to \frac{\varepsilon}{\alpha+\varepsilon}\,\delta(y) + \frac{\alpha}{\alpha+\varepsilon}\,\delta(y-1), \tag{24}$$

т. е. плотность распределения в (22), а значит, и в (19) при $\gamma \to 0$, представляет собой две размазанные дельта-функции. Физически это очевидно, поскольку при малых γ система в основном находится в состояниях $x = 0$, $x = x_0$, к которым релаксирует экспоненциально. Однако, если просто рассматривать адиабатическое приближение по времени корреляции шума, мы вместо (24) получим $F(x) = [\delta(x) + \delta(x - x_0)]/2$. Это означает, что адиабатическое приближение по корреляционному времени не верно, а верно (24). Причина такого поведения видна из следующих рассуждений. При переключении шума с $z = \Delta$ на $z = -\Delta$ система экспоненциально релаксирует к нулю с $x = x_0$, а при обратном переключении релаксация начинается с очень малых значений x, и поэтому система сильно задерживается при $|x| \ll 1$. Это хорошо видно на рис. 1, где изображен потенциал при разных значениях шума. При $z = \Delta$ возникает потенциальный барьер при $x = 0$, где задерживается система, а при $z = -\Delta$ этот барьер исчезает, и система быстро релаксирует к единственному минимуму потенциала. Неэквивалентность переключений следует также из формул (18) и (20) для $F(x, \Delta)$ и $F(x, -\Delta)$. Кроме того, размазка дельта-функций в (22), (20), а также в (18) далека от стандартной.

Вычислим теперь моменты распределения в адиабатическом приближении по периоду сигнала ($T \gg T_0$). Учитывая, что их величины определяются областью $|x| \gg A$, можно пользоваться формулой (20) (и аналогичной ей формулой для $R(t) = -1$). Тогда, учитывая (21), аналогично (13) при $\zeta \ll 1$ получим

$$\begin{gathered}
\langle x(t)\rangle \sim \frac{x_0}{\ln(1/A)} R(t), \\
\langle x^2(t)\rangle \sim \frac{x_0^2}{\ln(1/A)}, \\
\frac{\langle x(t)\rangle^2}{\langle x^2(t)\rangle} \sim \frac{1}{\ln(1/A)}, \\
I = \frac{\langle x(t)\rangle}{AR(t)} \sim \frac{x_0}{A\ln(1/A)}
\end{gathered} \tag{25}$$

и аналогичные выражения для других асимптотик. Сравнивая (25) и (13), мы видим, что цветной дихотомический шум также индуцирует сверхчувствительность к слабому переменному сигналу. Существенное отличие от белого шума здесь заключается в том, что условие возникновения сверхчувствительности ($|\alpha| \ll 1$) выполняется не только при малых λ, но и при малых γ, т. е. в области больших времен релаксации шума τ. Вышесказанное справедливо, естественно, только при $\tau \ll T$. В противном случае сигнал не успевает переключаться и возникает новый класс явлений (в частности, может появиться неэргодичность), которые мы здесь не рассматриваем.

В заключение раздела рассмотрим связь явления сверхчувствительности с *on-off*-перемежаемостью. В предыдущей работе [4] мы показали, что система (1) с белым шумом демонстрирует явление *on-off*-перемежаемости. Суть явления — гигантские флуктуации физических величин, которые с близкой вероятностью могут принимать конечные значения (фаза всплеска) и становиться исчезающе малыми на протяжении длительных спокойных периодов (ламинарная фаза). Такое поведение связано со скейлинговым характером плотности вероятности $F(x)$ при $A \ll x \ll x_0$. Поскольку все функции плотности вероятности для телеграфного шума обладают таким же скейлинговым поведением, естественно ожидать существования *on-off*-перемежаемости и в этом случае. Общепринятым критерием наличия в конкретной системе *on-off*-перемежаемости является степенная зависимость распределения длительности ламинарных участков с показателем 3/2 [6]:

$$\rho(l) \propto l^{-3/2}. \tag{26}$$

В случае коррелированного шума распределение (26) может наблюдаться только при $l > \tau = 1/\gamma$.

4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Моделирование процесса (1) мы проводили для цветного телеграфного (4), (5) и цветного гауссова (3) шума. Интегрирование проводилось по схеме Эйлера с шагом по времени $\Delta t = 0.01$. Дальнейшее уменьшение этой величины уже не влияет на интересующие нас характеристики системы — время переключения при смене знака входного сигнала и коэффициент его усиления.

Наглядно поведение системы с телеграфным шумом иллюстрирует рис. 2*а*, где изображены фрагменты реализаций выходного сигнала и соответствующего входного шума при большом времени корреляции $\tau = 1/\gamma = 2000$. Импульсы выходного сигнала быстро отслеживают импульсы шума, а их знак определяется знаком сверхслабого периодического воздействия. Видна также описанная выше неэквивалентность переключений шума, когда сигнал не успевает возрасти до x_0. Для сравнения приведены аналогичные данные для гауссова цветного шума при тех же значениях параметров (рис. 2*б*).

Далее, явление сверхчувствительности четко проявляется в средних по ансамблю $\langle x(t)\rangle$ (рис. 3) и величине коэффициента усиления (рис. 4). Коэффициент усиления I в уравнении (14) определяется через спектральную плотность выходного сигнала $S(\omega)$ следующим образом. Известно [7], что

$$S(\omega) = 2\pi \sum_k |x_k|^2 \delta(\omega - k\Omega) + S_{noise}(\omega), \tag{27}$$

где x_k — коэффициенты Фурье периодической функции $\langle x(t)\rangle$, а S_{noise} — стохастическая составляющая. Из (14) и (27) видно, что

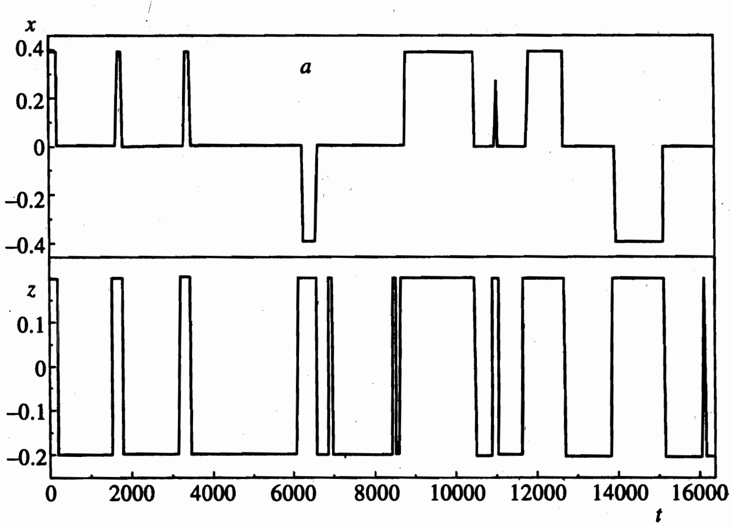
$$I^2 = \frac{1}{A^2} \sum_k |x_k|^2 = \frac{\delta\omega}{2\pi A^2} \sum_i (S_i - S_{noise}), \tag{28}$$

где S_i — i-я гармоника сигнала в спектре, $\delta\omega$ — ширина спектральной полосы.

На рис. 4 видно, что существуют диапазоны как амплитуды, так и времени корреляции цветного шума, в которых коэффициент усиления максимален. Это связано с тем, что время релаксации T_0 (15) зависит как от Δ, так и от γ. Максимум чувствительности системы к периодическому сигналу наблюдается при

$$T_0(\gamma, \Delta) \sim T/2. \tag{29}$$

Условие (29) подобно условию обычного стохастического резонанса в классической задаче с двуямным потенциалом [8], описывая при этом явление совершенно другого характера.



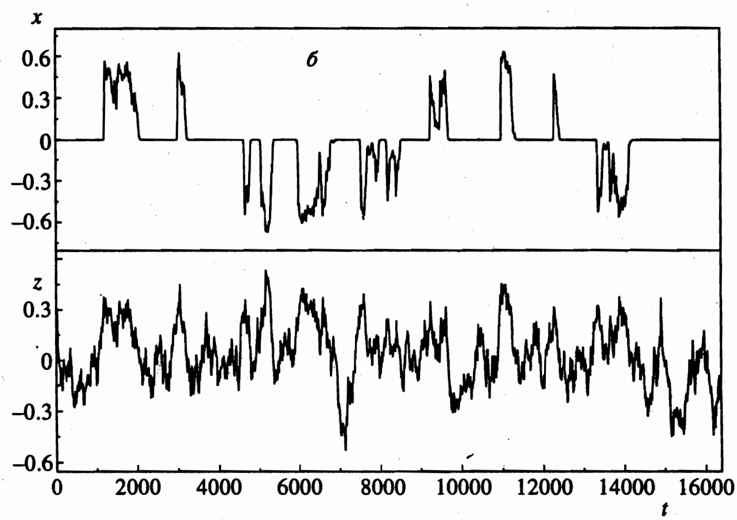
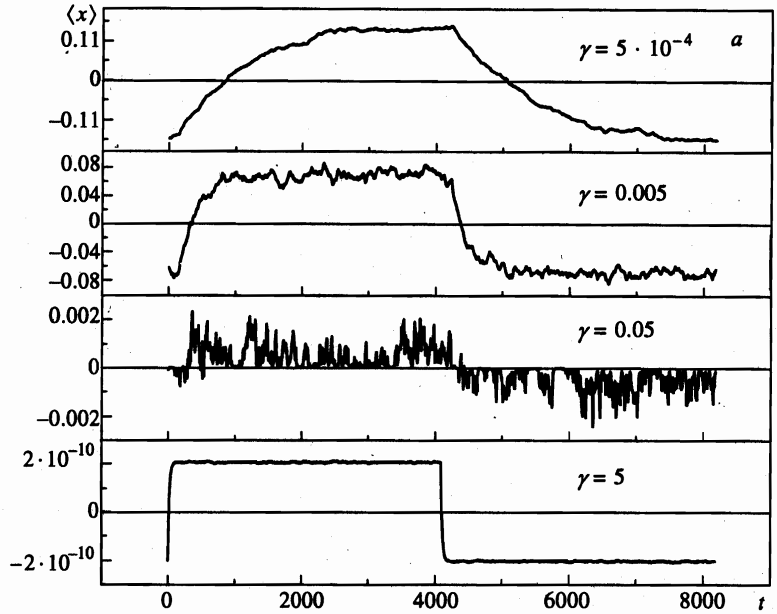


Рис. 2. Поведение во времени мультипликативного телеграфного (*а*) и гауссова (*б*) шумов и соответствующего выходного сигнала системы при значениях параметров $\gamma = 0.0005$, $\Delta = 0.2$, $\lambda = -0.05$, $A = 10^{-11}$, $T = 8192$, $U = 1$

Отношение сигнал—шум, определяемое как

$$SNR^2 = \frac{S_i - S_{noise}}{S_{noise}}, \tag{30}$$

также демонстрирует резонансную зависимость от шума, усиливая сходство изучаемого нами явления с классическим стохастическим резонансом. Отметим, что в области, где имеет место резкое возрастание усиления, это отношение проходит через минимум, что означает наличие сильных флуктуаций в системе (это видно и на кривых с $\gamma = 0.05$, рис. 3*а*, и с $\gamma = 0.1$, рис. 3*б*). Причины подобного поведения системы нам неясны.



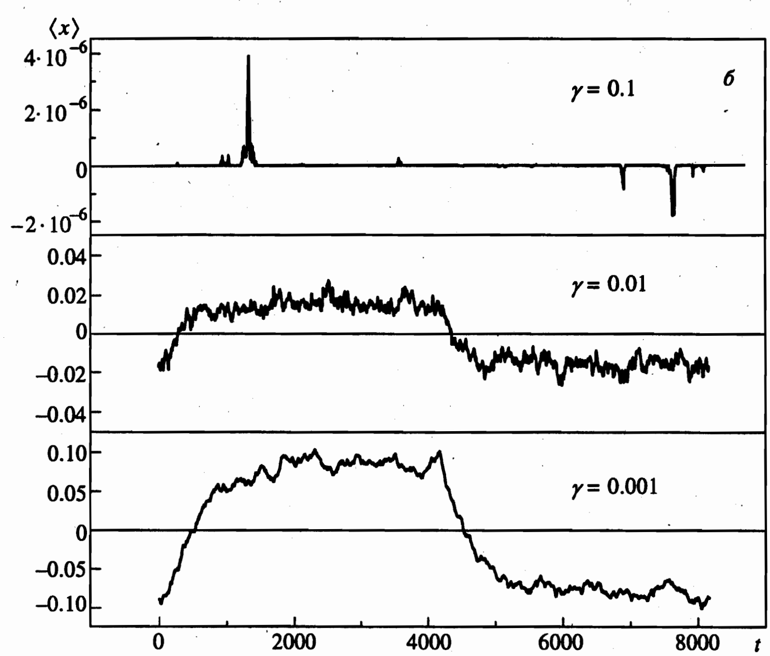


Рис. 3. Средние $\langle x(t)\rangle$ по 500 периодам сигнала, для разных значений γ: *а* — телеграфный входной шум; *б* — гауссов. Значения остальных параметров те же, что и на рис. 2

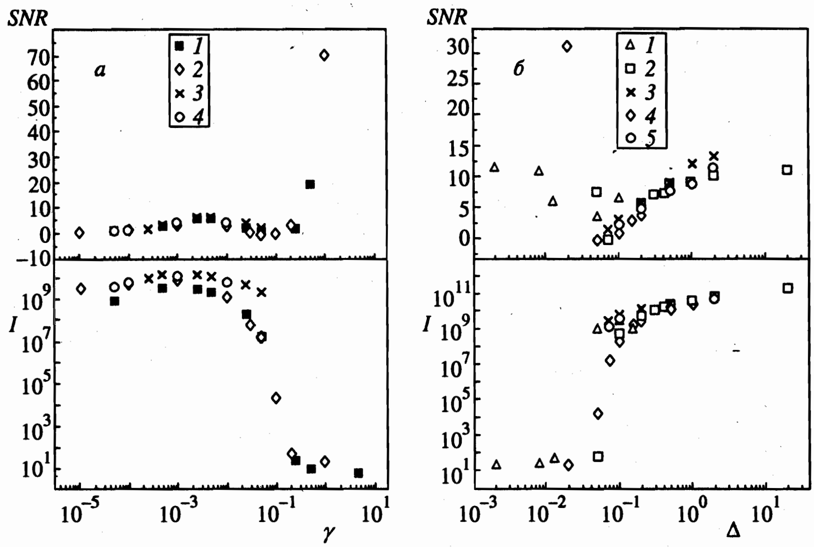


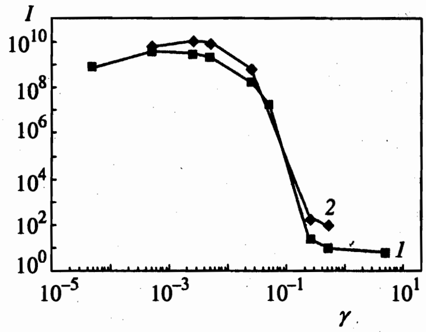
Рис. 4. Зависимость коэффициента усиления сигнала и отношения сигнал—шум (SNR) от обратного времени корреляции цветного шума (*а*). Обозначения: *1* — телеграфный шум, $\lambda = -0.05$; *2* — гауссов шум, $\lambda = -0.05$; *3* — телеграфный шум, $\lambda = 0.02$; *4* — гауссов шум, $\lambda = 0.02$. Значения Δ, A, T те же, что и на предыдущих рисунках. Зависимость I и SNR от амплитуды шума Δ (*б*) для белого гауссова шума (6) (*1*, $\lambda = -0.05$) и для цветного телеграфного (*2*, $\lambda = -0.05$; *3*, $\lambda = 0.02$) и цветного гауссова (*4*, $\lambda = -0.05$; *5*, $\lambda = 0.02$). Для цветного шума $\gamma = 0.0005$. Для белого шума параметр Δ рассчитан из его интенсивности β согласно формуле (6) с $\gamma = 0.0005$

Рисунок 4 хорошо иллюстрирует универсальность явления сверхчувствительности для различных видов шума. Этого и следует ожидать, поскольку при выполнении условия сверхчувствительности $|\alpha| \ll 1$ коэффициент усиления, как видно из формул предыдущего раздела, зависит только от α.

На рис. 5 приведены резонансные кривые для I при двух значениях периода сигнала, а на рис. 6 — при двух значениях отсечки x_0. В нашей модели $x_0 \propto U^{-1/2}$. Хорошо видно, что действительно $I \propto x_0/A$, т. е. в максимуме резонансной кривой выходной сигнал $x(t)$ меняется от $x \sim A = 10^{-11}$ до $x \sim x_0 = 10^5$, т. е. на 16 порядков величины.

На рис. 7 представлена зависимость времени релаксации T_0 от γ. Как и следует из формулы (15), зависимость эта экспоненциальная. Хотя формула (15) выведена для белого шума, при ее выводе существен лишь скейлинговый вид плотности распределения при $|x| < x_0$, т. е. следует ожидать универсального характера (15), что и подтверждается расчетными данными.

В заключение приведем результаты, показывающие наличие в системе *on-off*-перемежаемости. Распределение длин ламинарных участков вычислялось в отдельном машинном эксперименте с постоянным значением сигнала ($R(t) = 1$) и телеграфным шумом. Ламинарные участки распознавались в реализации выходного сигнала по критерию $x < x_{thr} = 0.1x_0$. Плотность вероятности рассчитанных таким образом длительностей приведена на рис. 8. Закон (26) действительно выполняется для $l > \tau$, т. е. *on-off*-перемежаемость существует и в системе с цветным шумом.



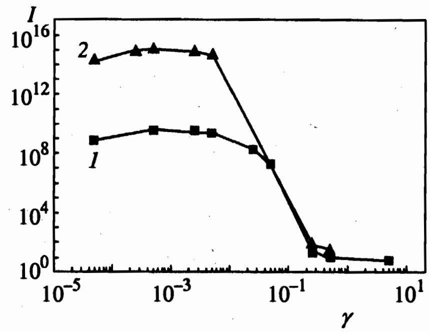
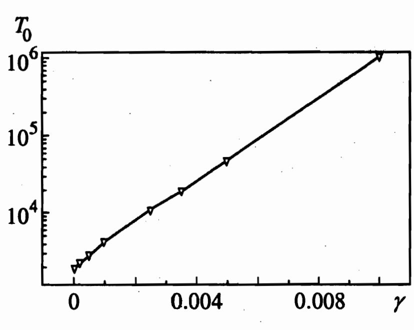


Рис. 5 **Рис. 6**

Рис. 5. Резонансные кривые $I(\gamma)$ для значений периода входного сигнала $T = 8192$ (*1*) и $T = 819$ (*2*); $\Delta = 0.2$, $\lambda = -0.05$, $A = 10^{-11}$

Рис. 6. Резонансные кривые $I(\gamma)$ для значений параметра $U = 1$ (*1*) и $U = 10^{-10}$ (*2*); $T = 8192$, остальные параметры те же, что для рис. 5



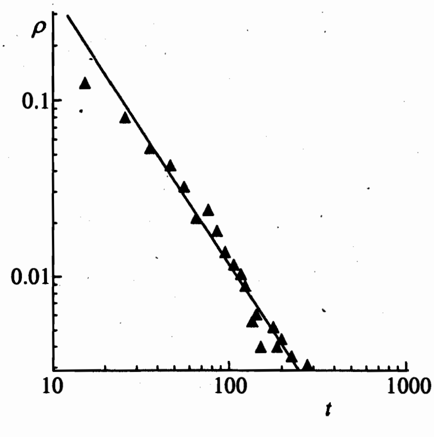


Рис. 7 **Рис. 8**

Рис. 7. Зависимость времени достижения системой порога $x = 10^{50}$ при $U = 10^{-100}$ от обратного времени корреляции телеграфного шума. Амплитуда постоянного входного сигнала $AR(t) = 10^{-11}$, $\Delta = 0.2$, $\lambda = -0.05$

Рис. 8. Плотность вероятности длин ламинарных участков для системы с телеграфным шумом, $\gamma = 0.025$, $\Delta = 0.2$ и с постоянным входным сигналом $AR(t) = 10^{-11}$; $\lambda = -0.05$, $U = 1$. Порог ламинарности $x_{thr} = 0.1x_0$

5. ВЫВОДЫ

Индуцированная шумом сверхчувствительность к слабым сигналам, характерная для систем с *on-off*-перемежаемостью, представляет собой достаточно универсальное явление. Оказалось, что она способна возникать под действием не только белого, но и коррелированного (цветного) шума, как телеграфного, так и гауссова. Мы обнаружили, что коэффициент усиления сверхслабого периодического сигнала в системе с цветным мультипликативным шумом зависит резонансным образом не только от амплитуды, но и от времени корреляции шума.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 99-02-17545), Государственной программой «Физика квантовых и волновых процессов» (подпрограмма «Статистическая физика», проект VIII-3), а также Государственной программой «Нейтронные исследования вещества».

Литература

1. K. Wiesenfeld and F. Jaramillo, Chaos **8**, 539 (1998).
2. R. D. Astumian and F. Moss, Chaos **8**, 533 (1998).
3. В. Хорстхемке, Р. Лефевр, *Индуцированные шумом переходы*, Мир, Москва (1987). (W. Horsthemke, R. Lefever, *Noise-induced transitions*, Springer (1984)).
4. S. L. Ginzburg and M. A. Pustovoit, Phys. Rev. Lett. **80**, 4840 (1998).
5. К. В. Гардинер, *Стохастические методы в естественных науках*, Мир, Москва (1986). (C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry, and the Natural Sciences*, Springer (1985)).
6. J. F. Heagy, N. Platt, and S. M. Hammel, Phys. Rev. E **49**, 1140 (1994).
7. P. Jung, Phys. Rep. **234**, 175 (1993).
8. L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, and F. Marchesoni, Rev. Mod. Phys. **70**, 223 (1998).