

# ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В МАРТЕ 1873 ГОДА  
ВЫХОДИТ 12 РАЗ В ГОД  
МОСКВА

ТОМ 116, ВЫПУСК 5(11)  
НОЯБРЬ, 1999  
«НАУКА»

## ИССЛЕДОВАНИЕ УГЛОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АНТИНЕЙТРИНО В ЭКСПЕРИМЕНТАХ ПО $\beta$ -РАСПАДУ ПОЛЯРИЗОВАННОГО НЕЙТРОНА

© 1999

Г. Г. Бунатян\*

Объединенный институт ядерных исследований  
141980, Дубна, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 25 марта 1999 г.

Поскольку  $\gamma$ -излучение неизбежно сопровождает процесс  $\beta$ -распада, конечное состояние в  $\beta$ -распаде нейтрона включает фотон наряду с протоном, электроном и антинейтрино, т. е. не три, а четыре частицы. Поэтому, когда в эксперименте регистрируются только импульсы электрона и протона, а импульс  $\gamma$ -излучения не регистрируется, импульс антинейтрино не может быть восстановлен однозначно, но можно рассматривать лишь его среднее значение по импульсному распределению  $\gamma$ -излучения, определенному из соответствующих расчетов. Эффект  $\gamma$ -излучения оказывается существенным для установления фактора асимметрии  $B$  углового распределения антинейтрино из экспериментов по  $\beta$ -распаду поляризованных нейтронов, когда регистрируется импульс электрона  $p$ , направленный по оси  $x$ , и проекция импульса протона  $P_x$  на это направление  $x$ , а вектор поляризации нейтрона  $\xi$  направлен вдоль или против  $x$ . Поскольку  $\gamma$ -излучение не регистрируется в таких экспериментах, кинематика антинейтрино не предопределяется однозначно наблюдаемыми величинами  $p$ ,  $P_x$ , но может быть восстановлена лишь в среднем, так что рассматривается импульсное распределение антинейтрино, усредненное по импульсному распределению  $\gamma$ -излучения. Соответственно, из этих экспериментов величина  $B$  не может быть получена точно, но истинное значение  $B$  можно оценить в среднем, вводя в рассмотрение среднее, наиболее вероятное значение  $\langle B \rangle$  и дисперсию (среднее квадратичное отклонение)  $\Delta B$ . Неизбежные при этом неопределенности в оценке  $B$  составляют несколько процентов, что существенно для современных экспериментов, имеющих целью получить значение  $B$  с очень высокой точностью,  $\sim (0.1-1)\%$ . С учетом электромагнитных взаимодействий измерение импульсного распределения электронов и протонов может быть использовано также для получения с высокой точностью величины  $g_A$  — аксиальной амплитуды  $\beta$ -распада.

PACS: 13.40.Ks; 12.15.Lk; 12.15.Nh; 13.10.+q; 12.15.-Y; 14.20.Dh; 14.20.Jn; 13.30.Ce

\*E-mail: bunat@cv.jinr.dubna.su

© Российская академия наук, Отделение общей физики и астрономии, Институт физических проблем им. П. Л. Капицы, 1999 г.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время все более интересным представляется знание с высокой точностью характеристик  $\beta$ -распада нейтрона, прежде всего времени жизни  $\tau$  [1], а для поляризованного нейтрона — факторов асимметрии углового распределения электронов,  $A$  [2], и антинейтрино,  $B$  [3], относительно вектора поляризации  $\xi$  нейтрона. Величина  $A$  получается просто из экспериментально наблюдаемого углового распределения электронов, тогда как получение величины  $B$  есть дело гораздо более искусное, поскольку нет способа измерить непосредственно угловое распределение антинейтрино. Происхождение идеи эксперимента [3] для получения величины  $B$  восходит к давнему прошлому. Это было еще в шестидесятые годы, когда был предложен метод [4] извлечения величины  $B$  путем обработки экспериментальных данных по угловому распределению электронов и протонов, причем предполагалось однозначное восстановление кинематики антинейтрино, если даны импульсы электрона и протона. Однако это утверждение было бы строго справедливо, если бы не было  $\gamma$ -излучения, которое, как известно (см., например, [5–8]), неизбежно сопровождает  $\beta$ -распад. Разумеется, необходимость учета  $\gamma$ -излучения есть лишь вопрос точности, которая требуется при получении величины  $B$  из обработки экспериментальных данных. Но коль скоро речь идет о знании характеристик  $\beta$ -распада с точностью  $\sim (0.1-1)\%$  [1–3], не видно никаких оснований считать пренебрежение  $\gamma$ -излучением само собою разумеющимся при получении величины  $B$  [3].

Наша скромная цель состоит как раз в том, чтобы отчетливо представить влияние электромагнитных взаимодействий на распределения электронов, протонов и антинейтрино, изучаемые в [3], и установить, какая точность достижима в описании углового распределения антинейтрино в экспериментах [3]. Надежное описание полулептонных процессов требует однозначного, с высокой точностью, установления характеристик  $\beta$ -распада нейтрона, в частности величины  $B$ , с надлежащим учетом электромагнитных взаимодействий.

## 2. ОПИСАНИЕ $\beta$ -РАСПАДА ПОЛЯРИЗОВАННОГО НЕЙТРОНА С УЧЕТОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

В настоящее время совершенно ясно, что точное знание характеристик полулептонных распадов имеет важнейшее значение для теории элементарных частиц, которая устанавливает ряд строгих ограничений на величины, входящие в полулептонные взаимодействия. Разумеется, справедливость таких соотношений, следующих из теории, должна быть тщательно проверена, чтобы судить с полной уверенностью, до каких пределов, с какой точностью справедливы основополагающие принципы современной теории. В этом смысле, на самом деле, в нашем распоряжении нет иного выбора, кроме сопоставления экспериментальных данных, полученных с высокой точностью, с результатами последовательных теоретических расчетов, в основу которых положено описание слабых взаимодействий, следующее из общей теории поля.

Эффективный лагранжиан, описывающий  $\beta$ -распад барионов с учетом электромагнитных взаимодействий, представляется (см., например, [9–11]) в виде

$$L_{int} = L_{BfBiw} + L_{e\gamma} + L_{B\gamma}, \quad (1)$$

где

$$L_{BfBiw}(x) = \frac{G_{if}}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_e(x) \gamma^\alpha (1 + \gamma^5) \psi_\nu(x)) \times \\ \times \bar{\Psi}_{Bf}(x) [\gamma_\alpha g_V^B(q) + g_{WM}^B \sigma_{\alpha\nu} q_\nu + \gamma^5 (\gamma_\alpha g_A^B(q) + g_{FP}^B q_\alpha)] \Psi_{Bi}(x) \quad (2)$$

представляет барион-лептонное ( $V-A$ ) слабое взаимодействие, причем  $q$  есть импульс, передаваемый в процессе  $\beta$ -распада. Выражение

$$L_{e\gamma}(x) = -e \bar{\psi}_e(x) \gamma^\mu \psi_e(x) A_\mu(x) \quad (3)$$

описывает взаимодействие электромагнитного поля с лептонами, а  $L_{B\gamma}$ , аналогично, — с барионами. В (2), (3) обозначения соответствуют принятым в [9], причем индекс  $B$  определяет здесь тип бариона, и выбрана система единиц  $\hbar = c = 1$ ;  $\Psi_{Bi}(x)$ ,  $\Psi_{Bf}^+(x)$  представляют барионные поля в начальном и конечном состояниях, а  $\psi_e$ ,  $\psi_\nu$ ,  $A_\mu$  обозначают соответственно электронное (позитронное), (анти)нейтринное и электромагнитное поля.

Что касается величины  $g_V^B(0)$ , мы принимаем, аналогично [10],  $g_V^n(0) = 1$  для распада нейтрона (и  $g_V^p(0) = 0$  для сохраняющего странность распада  $\Sigma^\pm \rightarrow \Lambda^0 + e^\pm + \nu(\bar{\nu}) + \gamma$ ). Тогда для различных полуслабых распадов, связанных с определенными  $i \rightarrow f$ -переходами кварков ( $u \rightarrow d$ ,  $s \rightarrow d$ ,  $b \rightarrow d$ ) амплитуды  $G_{if}$  в (2), как известно (см., например, [9–11]), представляются в виде

$$G_{if} = G_F |V_{if}|. \quad (4)$$

Здесь  $G_F = 1.16639(2) \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$  фиксируется по времени жизни мюона [12], а матричные элементы  $V_{if}$  матрицы Кабиббо—Кобаяши—Маскава [13], смешивающие различные кварковые состояния, удовлетворяют соотношению унитарности

$$|V_{ud}|^2 + |V_{sd}|^2 + |V_{bd}|^2 = 1, \quad (5)$$

которое должно выполняться точно в рамках стандартной модели [10, 11]. Таким образом, любое отклонение от тождества (5), следующее из эксперимента, как бы мало оно ни было, имело бы фундаментальное значение, ясно указывая на определенное противоречие в основополагающих принципах современной теории элементарных частиц. Основной, определяющий вклад в левую часть выражения (5) проистекает как раз от сохраняющего странность  $u \rightarrow d$ -перехода;  $|V_{ud}| \approx 0.9744 \pm 0.0010$ , как утверждается, например, в [1, 12]. Так, по сути дела, точность, с которой установлено значение  $|V_{ud}|$ , гарантирует точность, с которой справедливо само тождество (5). Можно полагать, что тщательное исследование  $\beta$ -распада нейтрона дает возможность надежно, с высокой точностью определить  $CKM$ -матричный элемент  $|V_{ud}|$ , как и иные величины, входящие в полуслабое взаимодействие (2); далее мы рассматриваем только  $\beta$ -распад нейтрона.

Таким образом, если имеются экспериментальные данные, полученные с высокой точностью,  $\sim 0.1\%$ , о времени жизни нейтрона [1] и об импульсном распределении частиц в конечном состоянии [2, 3], задача состоит в том, чтобы, последовательно вычислив эти характеристики согласно (1)–(3), сопоставить результаты расчетов с экспериментальными данными и посредством этого получить надежные, с высокой точностью, значения величины  $|V_{ud}|$  и амплитуд  $g(q)$  в (2). Когда масса нуклона принимается

бесконечной,  $M \rightarrow \infty$ , величины  $g_V(0), g_A(0)$ , как известно, определяют в основном вероятность  $\beta$ -распада, тогда как учет иных амплитуд  $g$ , конечности  $M$ ,  $q$ -зависимостей  $g_V(q), g_A(q)$  и электромагнитных взаимодействий (3) вызывает малые поправки к ней. Конечно, именно точность, с которой должна получаться исследуемая физическая величина, определяет важность учета различных поправок. В данной работе мы рассматриваем исключительно влияние электромагнитных взаимодействий на импульсные распределения частиц, в особенности антинейтрино, в конечном состоянии при распаде поляризованного нейтрона, оставляя в стороне все иные поправки, быть может, и важные сами по себе. Напомним, что поправки из-за конечности массы нуклона были тщательно исследованы в работе [14].

При надлежащем учете электромагнитных взаимодействий [8] вероятность  $\beta$ -распада поляризованного нейтрона, когда испускаются электрон с энергией-импульсом  $(\varepsilon, \mathbf{p})$ , антинейтрино в направлении  $\mathbf{n}_\nu$  и  $\gamma$ -излучение с энергией  $\omega \equiv k$ , меньшей некоторого данного значения  $k_m$  ( $k \leq k_m \leq \Delta - \varepsilon$ ), представляется в виде

$$dW(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{n}_\nu, k_m, \xi) = d\omega \frac{dn_\nu}{4\pi} \exp[\mathcal{B}(\varepsilon, k_m)] \times \\ \times \left\{ W_0(\varepsilon, \mathbf{p}, k_m, g_V, g_A) + (\mathbf{v}\xi)W_{v\xi}(\varepsilon, \mathbf{p}, k_m, g_V, g_A) + \right. \\ \left. + (\mathbf{n}_\nu\xi)W_{\nu\xi}(\varepsilon, \mathbf{p}, k_m, g_V, g_A) + (\mathbf{n}_\nu\mathbf{v})W_{\nu\nu}(\varepsilon, \mathbf{p}, k_m, g_V, g_A) \right\}. \quad (6)$$

Здесь  $\xi$  — вектор поляризации нейтрона и введены следующие обозначения:

$$\mathcal{B} = \frac{2\alpha}{\pi} \mathcal{L} \ln \frac{2k_m}{m}, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{v} \ln \frac{p + \varepsilon}{m} - 1, \\ W_a = w_a^0 \left[ 1 + \tilde{C}_a(\varepsilon, \mathbf{p}, k_m) \right] + C_a(g_V, g_A, \varepsilon, \mathbf{p}), \quad a \equiv 0, v\xi, \nu\xi, \nu\nu, \quad (7) \\ w_0^0 = g_V^2 + 3g_A^2, \quad w_{v\xi}^0 = 2g_A(g_V - g_A), \quad w_{\nu\xi}^0 = 2g_A(g_V + g_A), \quad w_{\nu\nu}^0 = g_V^2 - g_A^2, \\ d\omega = \frac{G_{ud}^2}{2\pi^3} \varepsilon p \omega_{\nu 0}^2 d\varepsilon \frac{dn_e}{4\pi}, \quad \omega_{\nu 0} = \Delta - \varepsilon, \quad \Delta = M_n - M_p, \quad \mathbf{n}_e = \frac{\mathbf{p}}{p}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{\varepsilon}, \quad \mathbf{n}_\nu = \frac{\mathbf{p}_\nu}{\omega_{\nu 0}}.$$

Экспонента  $\exp[\mathcal{B}(\varepsilon, k_m)]$ , появляющаяся в (6), управляет правильным инфракрасным поведением вероятности распада:  $dW(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{n}_\nu, k_m, \xi) \rightarrow 0$ , когда граничная энергия  $\gamma$ -излучения  $k_m \rightarrow 0$ , что означает в соответствии с общей теорией [9, 15] невозможность  $\beta$ -распада без инфракрасного (мягкого)  $\gamma$ -излучения. Для целей настоящей работы нет необходимости представлять в явном виде выражения функций  $\tilde{C}, C$  [8], кратных постоянной тонкой структуры  $\alpha$ .

После подстановки максимального значения  $k_m = \Delta - \varepsilon$  выражение (6) дает соответствующую вероятность распада, учитывающую все  $\gamma$ -излучение, возможное при некотором данном  $\varepsilon$ . Очевидно, величины

$$A = \frac{W_{v\xi}(\varepsilon, \mathbf{p}, k_m, g_V, g_A)}{W_0(\varepsilon, \mathbf{p}, k_m, g_V, g_A)}, \quad B = \frac{W_{\nu\xi}(\varepsilon, \mathbf{p}, k_m, g_V, g_A)}{W_0(\varepsilon, \mathbf{p}, k_m, g_V, g_A)}, \quad a = \frac{W_{\nu\nu}(\varepsilon, \mathbf{p}, k_m, g_V, g_A)}{W_0(\varepsilon, \mathbf{p}, k_m, g_V, g_A)} \quad (8)$$

представляют асимметрию угловых распределений электронов ( $A$ ) и антинейтрино ( $B$ ), а также угловые корреляции электрон-антинейтрино ( $a$ ). Следует указать, что если бы

масса протона не полагалась стремящейся к бесконечности, все вызываемые этим эффекты — отдача протона,  $q$ -зависимость величин  $g_V, g_A$  и вклад членов с  $g_{WM}$  и  $g_{IP}$  в (2) — не изменили бы общий вид выражения (6); соответствующие поправки к величинам (8) вычислены в [14]. Конечно, когда опущены все вышеупомянутые поправки, величины (8) принимают обычный, хорошо известный вид:

$$A_0 = \frac{2g_A(g_V - g_A)}{g_V^2 + 3g_A^2}, \quad B_0 = \frac{2g_A(g_V + g_A)}{g_V^2 + 3g_A^2}, \quad a_0 = \frac{g_V^2 - g_A^2}{g_V^2 + 3g_A^2}, \quad (9)$$

а само выражение (6) переходит в

$$dW(\varepsilon, \mathbf{p}, \mathbf{n}_\nu, \xi) = d\omega \frac{dn_\nu}{4\pi} (g_V^2 + 3g_A^2) \left\{ 1 + (v\xi)A_0 + B_0(\mathbf{n}_\nu, \xi) + a_0(\mathbf{n}_\nu, v) \right\}. \quad (10)$$

После подстановки  $k_m = \Delta - \varepsilon$  и интегрирования (6) по  $d\mathbf{p}dn_\nu$  получается полная вероятность  $\beta$ -распада нейтрона,  $W = 1/\tau$ . Тогда первое соотношение для определения величин, входящих в (2), в частности  $|V_{ud}|$ , следует из требования равенства этого вычисленного времени жизни  $\tau$  и измеренного в эксперименте [1]. Экспериментальная величина  $A$  [2] получается при изучении импульсного распределения электронов, что соответствует выражениям (6), (10), проинтегрированным по направлениям вылета антинейтрино  $dn_\nu$ . При этом, конечно, члены с коэффициентами  $B$  и  $a$  в (6) и (10) исчезают. Соотношение, определяющее величину  $g_A$ , получается тогда приравнованием вычисленного и экспериментально наблюдаемого значений  $A$  (8) [2].

Как ни точны экспериментальные измерения величин  $\tau$  и  $A$  [1, 2] и их теоретическое вычисление даже с включением всех обсуждавшихся выше поправок, тем не менее в высшей степени желательно вовлечь в рассмотрение наряду с  $\tau$  и  $A$  иные характеристики  $\beta$ -распада, в особенности угловое распределение антинейтрино относительно вектора поляризации  $\xi$  нейтрона, а также угловые корреляции между направлениями вылета электрона и антинейтрино, которые фигурируют в (6), (10) как коэффициенты  $B$  и  $a$  соответственно при  $(\mathbf{n}_\nu, \xi) = \cos \theta_{\nu\xi}$  и  $(\mathbf{n}_\nu, v) = v \cos \theta_{\nu v}$ . Такое вовлечение целесообразно как для того, чтобы еще раз проверить точность, с которой определены величины  $G_{ud}, g_A, g_{IP}, g_{WM}$  в (2) (см. [16]), так и для того, чтобы удостовериться, насколько строгим является само общее выражение (2). Как утверждается в [17], соответственно идеям работ [18], экспериментальное значение величины  $B$ , если оно известно с точностью  $\sim 0.1\%$ , целесообразно для проверки того, что слабые взаимодействия могут быть лево-правосимметричными на уровне лагранжиана, причем нарушение четности возникает исключительно из спонтанного разрушения этой симметрии. Как утверждается в работах [17, 18], если бы значение  $B$  было фиксировано с такой высокой точностью, то могла бы быть обнаружена величина примеси к лагранжиану (2), которая имела бы те же трансформационные свойства, что и (2), но отличалась бы от (2) заменой  $\gamma^5 \rightarrow -\gamma^5$ . Соответственно, задача состоит в том, чтобы проверить возможность вклада правых токов в полуслабые взаимодействия и оценить ограничение на величину массы правого калибровочного бозона, связанного с ними [19]. Конечно, вся эта концепция имеет смысл, когда величина  $B$  извлекается из эксперимента с точностью  $\sim 0.1\%$ , для чего учет электромагнитных взаимодействий совершенно необходим [8].

Очевидно, для того чтобы установить значение величины  $B$  в (6), (10), необходимо получить угловое распределение антинейтрино, что соответствует выражению (6), проинтегрированному по импульсам электрона  $d\mathbf{p}$ , при этом члены с коэффициентами

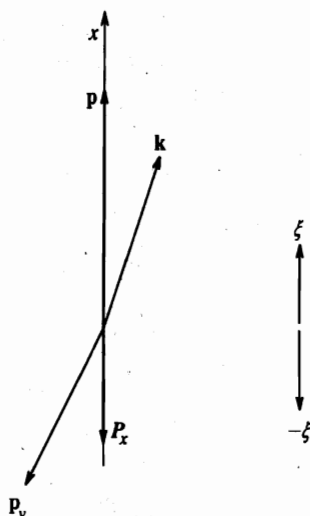
$A$ ,  $a$  в (6) исчезают. Но наблюдать угловое распределение антинейтрино в эксперименте непосредственно совершенно невозможно, поскольку нет способа регистрации антинейтрино.

Весьма искусный красивый путь, позволяющий успешно обойти это препятствие, казался был найден уже очень давно в работах [4].

### 3. ИМПУЛЬСНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ И ПРОТОНОВ И УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ АНТИНЕЙТРИНО

Обычно всякий раз, представляя себе процесс  $\beta$ -распада, мы имеем в виду его описание именно выражениями (6)–(10), но они сами по себе оказываются не применимыми для получения  $B$  из эксперимента. При описании распределения электронов и антинейтрино в конечном состоянии  $\beta$ -распада поляризованного нейтрона соотношения (6)–(10), очевидно, получаются из общей вероятности распада интегрированием по импульсам испускаемого протона и  $\gamma$ -излучения. Такое распределение соответствовало бы эксперименту, в котором испускаемый протон и  $\gamma$ -излучение не регистрируются вовсе, т. е. мы имели бы дело с вероятностью распада, включающей протоны и  $\gamma$ -излучение со всеми импульсами, допустимыми при данных  $dp dn_\nu$ . В экспериментах, где получается величина  $A$  [2], наблюдается только импульсное распределение электронов без регистрации антинейтрино, т. е. включая все допустимые импульсы антинейтрино. Это наблюдаемое распределение описывается выражением (6), проинтегрированным по  $dn_\nu$ , которое должно тогда содержать только член, пропорциональный  $(v\xi)A$ . Чтобы получить величину  $B$ , т. е. коэффициент при  $(p_\nu, \xi)$  в (6), (10), следовало бы поставить эксперимент, в котором, как раз наоборот, измерялось бы именно угловое распределение антинейтрино безотносительно импульсов протона, электрона и  $\gamma$ -излучения. Соответственно, после интегрирования выражения (6) по  $dp$  члены с  $A$  и  $a$  исчезают и остается лишь член, пропорциональный  $(p_\nu, \xi)B$ . Но известно, что этот желательный эксперимент невыполним, поскольку невозможно регистрировать антинейтрино, и вследствие этого выражения (6), (10) представляются бесполезными для непосредственного получения величины  $B$  из эксперимента.

Чтобы иметь в своем распоряжении угловое распределение антинейтрино без регистрации самого антинейтрино, нам нужны угловые распределения электронов, протонов и  $\gamma$ -излучения; исходный нейтрон предполагается при этом покоящимся. Импульс электрона может быть определен в современных экспериментах непосредственно с достаточно высокой точностью [2], тогда как простой способ измерить импульсы испускаемого протона и  $\gamma$ -излучения сейчас представляется практически невозможным. Таким образом, положение может показаться безвыходным, когда мы стараемся извлечь величину  $B$  из эксперимента. Однако, сколь запутанной ни представлялась эта проблема, исследования [4] проложили путь для ее решения. В этих работах и впоследствии в [3] был предложен метод и тщательно разработан соответствующий эксперимент для восстановления кинематики антинейтрино и получения, как следствие, величины  $B$  (8) в (6) из измерений импульсного распределения электронов и распределения значений  $P_x$  проекции импульса протона на ось  $x$ , вдоль или против направления которой поляризован нейтрон (см. рисунок). Постановка реального эксперимента тщательно разъяснена в [3], и мы только напомним здесь, что в его идеализированной схеме (представленной на рисунке), как раз достаточной для наших целей, регистрируемый



импульс  $p$  электрона направлен строго по оси  $x$ , вектор поляризации  $\xi$  покоящегося нейтрона также строго направлен вдоль или против направления оси  $x$  и проекция импульса  $P_x$  протона на ось  $x$  регистрируется в совпадениях с импульсом электрона  $p$ , тогда как перпендикулярные  $x$  компоненты импульса протона  $P$  не наблюдаются вовсе, как и все  $\gamma$ -излучение. Когда фиксирована энергия  $\varepsilon$ , величина  $P_x$  изменяется в пределах

$$|p| - (\Delta - \varepsilon) \leq P_x \leq |p| + (\Delta - \varepsilon). \quad (11)$$

Для наглядности величина  $P_x$  в (11) и далее представляет  $x$ -компоненту импульса протона с обратным знаком, как и в [3], т. е. величина  $P_x > 0$  фигурирует на рисунке. Если оставить на время в стороне  $\gamma$ -излучение и пренебречь кинетической энергией протона ввиду его большой массы, то энергия  $\omega_{\nu 0}$  антинейтрино и косинус угла между осью  $x$  и направлением вылета антинейтрино равны (см. рисунок), очевидно,

$$\omega_{\nu 0} = \Delta - \varepsilon, \quad y_0 \equiv \cos \theta_{\nu x} = \frac{P_x - |p|}{\omega_{\nu 0}}. \quad (12)$$

В действительном эксперименте [3] измерения состояли в подсчете числа событий с данными значениями  $p$ ,  $P_x$  и вектором поляризации нейтрона  $\xi$ , направленным вдоль или против направления оси  $x$ . То, что измеряется в этом эксперименте, есть вероятность  $\beta$ -распада поляризованного нейтрона, когда импульс электрона равен  $p$ , а проекция импульса протона на ось  $x$  равна  $P_x$ , безотносительно импульсов антинейтрино и  $\gamma$ -излучения, а также и проекций импульса протона, перпендикулярных оси  $x$ . Таким образом, получается импульсное распределение электронов совместно с распределением величин  $P_x$ :

$$dW_{exp}^z(P_x, p) = w_{exp}^z(P_x, p) dp dP_x, \quad (13)$$

причем вклады антинейтрино,  $\gamma$ -излучения и протонов со всеми допустимыми импульсами включаются сюда. В (13) и далее для поляризации нейтрона вдоль оси  $x$   $z = +$ , а для противоположной  $-z = -$ .

Общее выражение для вероятности  $\beta$ -распада поляризованного нейтрона, когда электрон имеет импульс  $\mathbf{p}$  и  $x$ -компонента импульса протона равна  $P_x$ , сопровождаемого  $\gamma$ -излучением со всеми энергиями  $\omega = k = |\mathbf{k}|$ , меньшими некоторого данного значения  $k_m$ ,  $k \leq k_m \leq \Delta - \varepsilon$ , выводится согласно лагранжиану (1)–(3) таким же образом, как (6), было получено в [8]:

$$dW^z(P_x, \mathbf{p}, k_m) = dP_x \frac{d\mathbf{w}}{2\omega_{\nu 0}} w^z(P_x, \mathbf{p}, k_m),$$

$$w^z(P_x, \mathbf{p}, k_m) = \exp[\mathcal{B}(\varepsilon, k_m)] \left\{ w_0^0 [1 + \tilde{C}_0(\mathbf{p}, k_m)] + C_0(P_x, \mathbf{p}, g_V, g_A) + \right. \\ \left. + (v\xi) \{ w_{v\xi}^0 [1 + \tilde{C}_{v\xi}(\mathbf{p}, k_m)] + C_{v\xi}(P_x, \mathbf{p}, g_V, g_A) \} + \right. \\ \left. + w_{\xi\nu}^0 z y_0 [1 + \tilde{C}_{\xi\nu}(P_x, \mathbf{p}, k_m)] + v w_{\nu\nu}^0 z y_0 [1 + \tilde{C}_{\nu\nu}(P_x, \mathbf{p}, k_m)] + z C(P_x, \mathbf{p}, g_V, g_A) \right\}. \quad (14)$$

Для целей настоящей работы нет необходимости подробно выписывать явные выражения для функций  $\tilde{C}$ ,  $C$ , кратных постоянной тонкой структуры  $\alpha$ . При  $k_m = \Delta - \varepsilon$  выражение (14) представляет приведенное выше экспериментальное распределение (13). Как известно, вместо непосредственно (13) удобнее при обработке экспериментальных данных [2, 3] иметь дело с величиной

$$X = \frac{w_{exp}^+(P_x, \mathbf{p}) - w_{exp}^-(P_x, \mathbf{p})}{w_{exp}^+(P_x, \mathbf{p}) + w_{exp}^-(P_x, \mathbf{p})}. \quad (15)$$

С учетом (14) величина (15) представляется в виде

$$X = \frac{v[w_{v\xi}^0(1 + \tilde{C}_{v\xi}) + C_{v\xi}] + w_{\xi\nu}^0 y_0(1 + \tilde{C}_{\xi\nu}) + v w_{\nu\nu}^0 y_0(1 + \tilde{C}_{\nu\nu}) + C}{w_0^0 [1 + \tilde{C}_0] + C_0}. \quad (16)$$

Итак, сопоставляя (14) с соответствующими экспериментальными данными (13), (16) [3], мы получаем уравнение (в дополнение к используемым в [1, 2]) для определения величин  $G_{ud}$ ,  $g_A$ , ... в (2). Так что значение  $g_A$ , полученное в экспериментах [2], может быть проверено еще раз [16].

Однако на этом пути величина  $B$  — коэффициент при  $(\mathbf{n}, \xi)$  в (6), (10), — которую мы хотим найти, вообще не может войти в рассмотрение, поскольку при получении (14) проведено интегрирование по всем допустимым импульсам антинейтрино, и, соответственно, наблюдаемое в эксперименте [3] распределение (13) включает вклад от антинейтрино со всеми допустимыми импульсами. Итак, надо следовать иным путем, не используя (14), но учитывая надлежащим образом влияние  $\gamma$ -излучения в процессе извлечения величины  $B$  из экспериментального распределения (13), наблюдаемого в [3].

#### 4. ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТА $B$ ИЗ ИМПУЛЬСНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ЭЛЕКТРОНОВ И ПРОТОНОВ

Очевидно, в мыслимом упрощенном случае, где были бы справедливы соотношения (12), кинематика антинейтрино была бы однозначно предопределена величинами



$p$ ,  $P_x$ , регистрируемыми в эксперименте [3]. Соответственно, без учета  $\gamma$ -излучения и в предположении, что масса протона бесконечна,  $M \rightarrow \infty$ , распределение (14) преобразуется к виду

$$dW^z(P_x, p) = dP_x \frac{dw}{2\omega_{\nu 0}} w^z(P_x, p), \quad (17)$$

$$w^z(P_x, p) = w_0^0 [1 + Azv + B_0 y_0 z + ay_0 v],$$

тогда как угловое распределение антинейтрино приобретает вид (10). Таким образом, в этом упрощенном случае существовало бы взаимно однозначное соответствие между распределением (13), с которым мы имеем дело в эксперименте [3], и угловым распределением антинейтрино (10), причем величина  $(\xi_{p_\nu})$  в (10) получает значение  $zy_0$  в (17), а величина  $dP_x/2\omega_{\nu 0}$  в (17) заменяет  $dn_\nu/4\pi$  в (10). Тогда из сопоставления (17) и экспериментального распределения (13) [3] следовало бы уравнение

$$w_{exp}^z(P_x, p) = f_0(\omega_{\nu 0})(1 + zAv) + f_0(\omega_{\nu 0})y_0(zB_0 + av). \quad (18)$$

Соответственно, коэффициент, стоящий перед  $(\xi_{p_\nu})$  в (10), выражался бы непосредственно через  $w_{exp}^z$  (13):

$$B_0 = \frac{1}{zy_0 f_0} [w_{exp}^z - f_0(1 + zAv) - f_0 av y_0], \quad f_0 = \frac{G_{ud}^2 \omega_{\nu 0}}{16\pi^4} w_0^0, \quad (19)$$

или, как делалось в [3], через величину  $X$  (15):

$$B_0 = [X(1 + avy_0) - Av]/y_0. \quad (20)$$

Для величины  $B_0$  в работе [3] приводится значение  $B_0 = 0.9821 \pm 0.0040$ . Разумеется, мы оставили в стороне все неопределенности, которые неизбежно возникают в реальном эксперименте из-за бедной статистики, недостатков в геометрии установки и т. п. Это, конечно, не означает, что о соответствующих поправках надо говорить, как о пренебрежимо малых, но мы здесь имеем целью тщательно исследовать исключительно влияние  $\gamma$ -излучения на получение  $B$  из обработки экспериментальных данных [3]. В (17)–(20) мы приписали индекс 0 величине  $B$ , чтобы подчеркнуть, что это значение получилось бы при выключении  $\gamma$ -излучения, как и в (9), (10). Как видим, величина  $B_0$  оказывается выраженной через величины  $f_0$ ,  $y_0 f_0$ ,  $\omega_{\nu 0}$  (12), (19), которые были бы точно известны в этом случае для каждого события с данными значениями  $P_x$  и  $p$ , которые регистрируются в эксперименте [3].

Однако, поскольку  $\beta$ -распад нейтрона, как давно и хорошо известно, сопровождается  $\gamma$ -излучением, в реальном эксперименте [3] измеряется вероятность  $\beta$ -распада с данными значениями  $P_x$ ,  $p$ , включая  $\gamma$ -излучение со всеми допустимыми импульсами  $k$ . В описании каждого отдельного события выражения для  $y_0$  и  $\omega_{\nu 0}$  в (12) уступают место следующим:

$$y_0 \rightarrow y(\omega) = \cos \theta_{\nu x} = \frac{P_x - |p| - x\omega}{\omega_\nu}, \quad x = \cos \theta_{\gamma x}, \quad (21)$$

$$f_0 \rightarrow f(\omega) = \frac{G_{ud}^2 \omega_\nu}{16\pi^4} w_0^0, \quad \omega_{\nu 0} \rightarrow \omega_\nu(\omega) = \Delta - \varepsilon - \omega,$$

где  $\omega = |\mathbf{k}|$  есть энергия  $\gamma$ -излучения, а  $\theta_{\gamma x}$  — угол направления  $\gamma$ -излучения относительно оси  $x$  (см. рисунок). Таким образом, чтобы однозначно восстановить кинематику антинейтрино, мы должны были бы знать величины  $\omega$ ,  $x$ , связанные с  $\gamma$ -излучением, сопровождающим каждое отдельное событие  $\beta$ -распада с данными величинами  $\mathbf{p}$ ,  $P_x$ , которые регистрируются в эксперименте [3].

Конечно, для реального  $\beta$ -распада, сопровождаемого  $\gamma$ -излучением, нужная нам величина  $B$  не может быть выражена согласно (19), (20) через величины  $f_0$ ,  $f_0 y_0$ ,  $\omega_{y0}$ , которые сами, собственно говоря, более не имеют строгого физического смысла. Тогда естественно оценивать величину  $B$  в (6), вводя в рассмотрение ожидаемые значения  $\langle yf \rangle$ ,  $\langle f \rangle$  величин (21)  $f(\omega)$ ,  $f(\omega)y(\omega, x)$ , заменяющих  $f_0$ ,  $f_0 y_0$  в состоянии с определенными значениями  $P_x$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $z$ . Величины  $\langle f \rangle$ ,  $\langle yf \rangle$  надлежит вычислять путем усреднения  $f(\omega)$ ,  $f(\omega)y(\omega, x)$  по импульсному распределению  $W_\gamma^z(P_x, \mathbf{p}, \mathbf{k})$   $\gamma$ -излучения, сопровождающего распад с данными  $P_x$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $z$ . Чтобы оценить нужную нам величину  $B$  (8) в (6), следует ввести ожидаемое значение  $\langle B \rangle$ , выраженное через  $\langle yf \rangle$ ,  $\langle f \rangle$ .

В существующих на сегодняшний день экспериментах [3] регистрируется лишь полное число событий  $\beta$ -распада с определенными значениями  $\mathbf{p}$ ,  $P_x$ , сопровождаемых  $\gamma$ -излучением, включающим все кинематически допустимые  $\omega$ ,  $x$ , т. е. интеграл

$$w_{exp}^z(\mathbf{p}, P_x) = \int d\mathbf{k} w_{exp}^z(\mathbf{p}, P_x, \mathbf{k}) \quad (22)$$

по всем допустимым  $\mathbf{k}$ . Задача состоит в том, чтобы суметь извлечь из экспериментально наблюдаемого распределения  $w_{exp}^z(\mathbf{p}, P_x) d\mathbf{p} dP_x$  (13) [3] надежные знания о величине  $B$  (8) в (6). Каждое отдельное событие распада с данным значением  $\mathbf{k}$  входит в экспериментальную величину  $w_{exp}^z(\mathbf{p}, P_x)$  со своим собственным весом, с вероятностью  $W_\gamma^z(P_x, \mathbf{p}, \mathbf{k}) d\mathbf{k}$   $\gamma$ -излучения с данным импульсом  $\mathbf{k}$ , сопровождающего  $\beta$ -распад с данными значениями  $\mathbf{p}$ ,  $P_x$ . Соответственно, соотношение (18) уступает место новому, в котором экспериментально наблюдаемая величина  $w_{exp}^z(\mathbf{p}, P_x)$  приравнивается вероятности  $\beta$ -распада, усредненной с весом  $W_\gamma^z(P_x, \mathbf{p}, \mathbf{k})$ :

$$\begin{aligned} w_{exp}^z(\mathbf{p}, P_x) &= \frac{\int d\mathbf{k} W_\gamma^z(P_x, \mathbf{p}, \mathbf{k}) f(\omega) [1 + zAv + z\langle B \rangle^z y(\omega, x) + avy(\omega, x)]}{\int d\mathbf{k} W_\gamma^z(\mathbf{p}, P_x, \mathbf{k})} = \\ &= \langle f \rangle^z (1 + zAv) + \langle yf \rangle^z (z\langle B \rangle^z + av), \end{aligned} \quad (23)$$

где введено обычное обозначение усреднения:

$$\begin{aligned} \langle F \rangle^z(P_x, \mathbf{p}) &= \frac{\int d\mathbf{k} W_\gamma^z(P_x, \mathbf{p}, \mathbf{k}) F(\mathbf{k})}{\int d\mathbf{k} W_\gamma^z(P_x, \mathbf{p}, \mathbf{k})} = \\ &= \frac{\int_0^{\Delta-\varepsilon} \omega^2 d\omega \int_{x_1}^{x_2} dx F(P_x, \mathbf{p}, \omega, x) \int_0^{2\pi} d\phi W_\gamma^z(P_x, \mathbf{p}, \omega, x, \phi)}{\int_0^{\Delta-\varepsilon} \omega^2 d\omega \int_{x_1}^{x_2} dx \int_0^{2\pi} d\phi W_\gamma^z(P_x, \mathbf{p}, \omega, x, \phi)} \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь пределы

$$x_1 = 1 - (\Delta + |\mathbf{p}| - \varepsilon - P_x)/\omega \geq -1,$$

$$x_2 = -1 + (\Delta - |\mathbf{p}| - \varepsilon + P_x)/\omega \leq 1$$

следуют просто из кинематики рассматриваемого процесса, причем усредняемые величины  $f(\omega)$ ,  $f(\omega)y(\omega, x)$  не зависят от азимута  $\phi$   $\gamma$ -излучения. Сама величина  $P_x$  изменяется в пределах (11) при данной энергии электрона  $\varepsilon$ . Обсудим вид распределения  $W_\gamma^z(P_x, \mathbf{p}, \mathbf{k})$  и его основные свойства несколько позже. Поскольку  $W_\gamma^z(P_x, \mathbf{p}, \mathbf{k})$  зависит от поляризации нейтрона,  $z = \pm$ , все средние значения (24), (23) в свою очередь также зависят от  $z$ , будучи различными для различных поляризаций,  $z = +$ ,  $z = -$ .

Итак, мы имеем соотношение (23), заменяющее прежнее (18). Коэффициент  $B_0$  в (18), поскольку он стоит перед величиной  $zy_0f_0$ , должен как раз быть равен коэффициенту асимметрии углового распределения антинейтрино  $B_0$  (9) в (10), как разъяснялось выше. Имея дело с описанием реального эксперимента, выражение (23) определяет величину  $\langle B \rangle^z$ , стоящую перед средним, ожидаемым значением  $\langle yf \rangle^z$ , заменяющим величину  $f_0y_0$  в (18). Сопоставляя распределение (23), включающее  $\langle B \rangle^z$ , и угловое распределение антинейтрино (6), содержащее  $B$  (8), мы видим, что величина  $\langle B \rangle^z$  может служить для оценки в среднем величины  $B$  (8) в (6), в чем и состоит наша цель. Согласно (23), величина  $\langle B \rangle^z(\mathbf{p}, P_x)$  выражается через экспериментальные данные  $w_{exp}^z(\mathbf{p}, P_x)$  (22) [3]. Разумеется, было бы желательно непосредственное вычисление  $\langle B \rangle^z(\mathbf{p}, P_x)$  с величинами  $w_{exp}^z(\mathbf{p}, P_x)$ , из которых в [3] без учета  $\gamma$ -излучения получалась величина  $B_0$  (19), (20). Но мы не в состоянии вычислить  $\langle B \rangle^z(\mathbf{p}, P_x)$  через  $w_{exp}^z(\mathbf{p}, P_x)$ , поскольку сами эти результаты измерений не приводятся в [3] явно. Поэтому мы получаем ожидаемое значение  $\langle B \rangle^z(\mathbf{p}, P_x)$  (и далее его дисперсию  $\Delta B^z(\mathbf{p}, P_x)$ ) не из самих  $w_{exp}^z(\mathbf{p}, P_x)$ , но через величину  $B_0$  (19), (20). Выражение для  $\langle B \rangle^z$  через  $B_0$  получается непосредственно из (17)–(19), (23):

$$\langle B \rangle^z = z [(1 + zAv)(f_0 - \langle f \rangle^z) + y_0f_0(av + zB_0)] / \langle yf \rangle^z - zav. \quad (25)$$

Как видим, получились два различных значения  $\langle B \rangle^z$  для описания углового распределения антинейтрино для двух различных поляризаций нейтрона,  $z = \pm$ . Очевидно, (25) сводится к  $\langle B \rangle^z = B_0$  при  $\langle f \rangle^z = f_0$ ,  $\langle yf \rangle^z = f_0y_0$ . Величина  $\langle B \rangle^z$  оказалась представленной в виде функции от средних ожидаемых значений величин  $f(\omega)$ ,  $f(\omega)y(\omega, x)$ . Таким образом, чтобы с полной уверенностью судить о точности и даже о самой возможности такой оценки величины  $B$  посредством среднего значения  $\langle B \rangle^z$ , нам надлежит выяснить, какой вид имеет распределение величин  $f(\omega)$ ,  $f(\omega)y(\omega, x)$  вокруг их наиболее вероятных ожидаемых значений  $\langle f \rangle$ ,  $\langle yf \rangle$ , т.е. надо исследовать дисперсию величин  $f(\omega)$ ,  $f(\omega)y(\omega, x)$ . В связи с этим наряду с самими ожидаемыми значениями  $\langle f \rangle$ ,  $\langle yf \rangle$  надо вычислить также средние квадратичные отклонения величин  $f(\omega)$ ,  $f(\omega)y(\omega, x)$  от их ожидаемых значений  $\langle f \rangle$ ,  $\langle yf \rangle$ :

$$\begin{aligned} (\Delta f)^z &= \sqrt{\langle (\Delta f)^2 \rangle^z} = \sqrt{\langle f^2 \rangle^z - \langle f \rangle^z{}^2}, \\ (\Delta yf)^z &= \sqrt{\langle (\Delta(yf))^2 \rangle^z} = \sqrt{\langle (yf)^2 \rangle^z - \langle yf \rangle^z{}^2}, \\ \langle \Delta(f \cdot yf) \rangle^z &= \langle f \cdot yf \rangle^z - \langle f \rangle^z \langle yf \rangle^z. \end{aligned} \quad (26)$$

Соответственно, дисперсия

$$\Delta B^z \equiv \sqrt{\langle (\Delta B^z)^2 \rangle} = \sqrt{\langle B^2 \rangle^z - \langle B \rangle^z{}^2}, \quad (27)$$

определяющая достижимую точность оценки (25) величины  $B$ , выражается обычным образом (см., например, [20]) через величины (26) и производные

$$\frac{\partial \langle B \rangle^z}{\partial \langle f \rangle^z}, \quad \frac{\partial \langle B \rangle^z}{\partial \langle fy \rangle^z}. \quad (28)$$

Разумеется, в (26) ожидаемые значения  $\langle f^2 \rangle^z$ ,  $\langle (fy)^2 \rangle^z$ ,  $\langle f^2 y \rangle^z$  получаются усреднением величин  $f^2(\omega)$ ,  $[f(\omega)y(\omega, x)]^2$ ,  $f^2(\omega)y(\omega, x)$  в соответствии с (24) с весом  $W_\gamma^z(P_x, \mathbf{p}, \mathbf{k})$ .

Таким образом, неопределенности в оценке истинной величины  $B$  через  $\langle B \rangle^\pm$  истекают из различия между самими величинами  $\langle B \rangle^+$ ,  $\langle B \rangle^-$  и из-за появления дисперсии  $\Delta B^\pm$ .

Ожидаемое значение  $\langle B \rangle^z$  пригодно для оценки истинной величины  $B$  (8) в (6), когда распределения значений величин  $f(\omega)$ ,  $f(\omega)y(\omega, x)$  оказываются достаточно «острыми», т.е. когда при данных  $P_x$ ,  $\mathbf{p}$  отношения  $\Delta f / \langle f \rangle$ ,  $\Delta(fy) / \langle fy \rangle$  и, как следствие,  $\Delta B / \langle B \rangle$  оказываются существенно меньше (по существу, пренебрежимы) по сравнению с погрешностями, допустимыми при определении  $B$  с желательной точностью [3]. По существу величина отношения  $\Delta B / \langle B \rangle$  кладет предел точности получения величины  $B$  (8) в (6) из обработки экспериментальных данных (13) в [3]. Если при некоторых  $P_x$ ,  $\mathbf{p}$ , распределения  $f(\omega)$ ,  $f(\omega)y(\omega, x)$  вокруг  $\langle f \rangle$ ,  $\langle fy \rangle$  окажутся столь размытыми, что  $\Delta f / \langle f \rangle \sim 1$ ,  $\Delta(fy) / \langle fy \rangle \sim 1$  и, соответственно,  $\Delta B / \langle B \rangle \sim 1$ , то не будет вообще никаких оснований для того, чтобы оценивать величину  $B$  (8) в (6) через  $\langle B \rangle^z$ . В таком случае кинематику антинейтрино, угловое распределение антинейтрино (6) нельзя восстановить по экспериментально наблюдаемому [3] распределению (13) даже в среднем. При таких обстоятельствах и таких  $P_x$ ,  $\mathbf{p}$  нет никакого разумного пути, чтобы надежно оценить величину  $B$  (8) в (6), используя экспериментальные данные [3].

Итак, нам надо ясно представлять себе, до каких пределов и с какой точностью мы в состоянии восстановить кинематику антинейтрино, имея в своем распоряжении только экспериментально наблюдаемые [3] величины  $w_{exp}^z(\mathbf{p}, P_x)$  (13) при данных значениях  $\mathbf{p}$ ,  $P_x$ , без регистрации  $\gamma$ -излучения. Соответственно, стоящая перед нами задача состоит в том, чтобы вычислить неопределенности в оценке  $B$  через  $\langle B \rangle^z$  и выяснить, по сути дела, сам физический смысл введения величины  $\langle B \rangle^\pm$  при данных  $\mathbf{p}$ ,  $P_x$ . Конечно, если бы разности  $B^\pm - B_0$  между вычисленными значениями  $B^\pm$  (25) и  $B_0$  (19), (20), установленным в [3], так же как и значения  $\Delta B^\pm$  (27), были бы фактически пренебрежимы при любых  $\mathbf{p}$ ,  $P_x$  по сравнению с объявленной в [3] погрешностью  $\Delta B \approx 0.4\%$  измерения  $B$ , то учет  $\gamma$ -излучения был бы излишним, но оказывается, что в действительности это не так.

## 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕЛИЧИН $\langle B \rangle^z$ , $\Delta B^z$ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В первом порядке по  $\alpha$  распределение  $W_\gamma^z(P_x, \mathbf{p}, \mathbf{k})$  в (23), (24) получается согласно [8] для  $\beta$ -распада поляризованного нейтрона непосредственно из (1)–(3) тем же путем, каким была вычислена еще в [5] вероятность  $W_\gamma(\omega)$   $\gamma$ -излучения с энергией  $\omega$  при всех допустимых значениях величин  $P_x$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{k}/k$  при  $\beta$ -распаде неполяризованного нейтрона. Тогда после интегрирования распределения  $\gamma$ -излучения  $W_\gamma^z(P_x, \mathbf{p}, \omega, x, \phi)$  по  $d\phi$ , которое содержится в (24), вычисление ожидаемых значений  $\langle f \rangle^z$ ,  $\langle fy \rangle^z$  в (23)–(28) сведется к усреднению соответствующих величин  $f(\omega)$ ,  $f(\omega)y(\omega, x)$  с функцией

$$w^2 d\omega dx d\mathbf{p} dP_x \int_0^{2\pi} d\phi W_\gamma^z(P_x, \mathbf{p}, \omega, x, \phi) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{eG_{ud}}{2\sqrt{2}} \right)^2 \frac{8}{(2\pi)^7} \frac{1}{4\varepsilon^2} \frac{\omega_\nu}{[1-xv]^2} \frac{1}{\omega} dx d\omega dP_x d\mathbf{p} \times \\
&\times \{ (1-x^2)\varepsilon v [v(\varepsilon+\omega)(g_V^2+3g_A^2) + y(\omega+v^2\varepsilon)(g_V^2-g_A^2)] + \\
&+ \omega^2 [(g_V^2+3g_A^2) + yx(g_V^2-g_A^2)](1-vx) + \\
&+ 2zg_A [(1-x^2)\varepsilon v (g_V-g_A)(v^2\varepsilon+\omega) + (g_V+g_A)v y(\varepsilon+\omega)] + \\
&+ \omega^2(1-vx)[(g_V-g_A)x + (g_V+g_A)y] \}. \quad (29)
\end{aligned}$$

Однако это выражение само по себе еще не применимо непосредственно для вычисления (23)–(28) из-за явной неинтегрируемой особенности при  $\omega \rightarrow 0$ , которая приведет к логарифмической расходимости при интегрировании (24) по  $d\omega$ . Так как усредняемые величины  $f(\omega)$ ,  $f(\omega)y(\omega, x)$  в (23)–(28) оказываются не зависящими от  $x$  при  $\omega \rightarrow 0$ , нам следует, по существу, заботиться лишь о правильном поведении при  $\omega \rightarrow 0$  распределения  $W_\gamma^z(\mathbf{p}, P_x, \omega, x, \phi)$ , проинтегрированного по  $dx d\phi$ . Как известно [15], для того чтобы описать последовательно  $\gamma$ -излучение при малых  $\omega$ , когда  $\alpha \ln(\Delta/\omega) \geq 1$ , т. е. инфракрасное излучение, необходимо учесть процессы, включающие произвольное число «мягких» фотонов. В соответствии с методом, изложенным в работах [9, 15], правильное поведение при  $\omega \rightarrow 0$  распределения  $\gamma$ -излучения получается, согласно [8], заменой в (29) при  $\omega \rightarrow 0$

$$\frac{1}{\omega} \rightarrow \frac{1}{m} \left( \frac{m}{\omega} \right)^{1-\alpha}, \quad \alpha = \frac{2\alpha}{\pi} \left[ \frac{1}{v} \ln \left( \frac{\varepsilon + |\mathbf{p}|}{m} \right) - 1 \right]. \quad (30)$$

Пожалуй, уместно напомнить, что при таких малых  $\omega \rightarrow 0$ , когда  $\alpha \ln(\Delta/\omega) \geq 1$ , мы имеем дело с изотропным излучением нефиксированного, бесконечного числа «мягких» фотонов [9, 15], т. е. классическое  $\gamma$ -излучение имеет место при таких условиях. Последовательный учет инфракрасного  $\gamma$ -излучения (излучения «мягких фотонов») приводит, согласно [8], к множителю  $\exp[\mathcal{S}(\varepsilon, k_m)]$  в формулах (6), (14), причем (29), (30) выводятся также непосредственно дифференцированием (14) по  $k_m$  и подстановкой затем  $k_m = \Delta - \varepsilon$  [8].

С распределением  $W_\gamma^z(P_x, \mathbf{p}, \mathbf{k})$  (29), (30) интегралы (24) расходимостей не содержат, и величины  $\langle B \rangle^z(P_x, \mathbf{p})$ ,  $\Delta B^z(P_x, \mathbf{p})$  вычисляются непосредственно. Целесообразно отметить, что когда постоянная тонкой структуры  $\alpha \rightarrow 0$ , все средние значения (24), вычисляемые с функцией  $W_\gamma^z(P_x, \omega, \mathbf{p}, x, \phi)$  (29), (30), становятся равными значениям  $F(0)$  усредняемых величин  $F(\omega)$  при  $\omega = 0$ . Действительно, при  $\alpha = 0$  величина  $\alpha$  в (30) также обращается в нуль, и нормировочный интеграл по  $d\omega$  в знаменателе в (24) расходится логарифмически на нижнем пределе  $\omega \rightarrow 0$ . Соответственно, если бы числитель в (24) имел конечное значение, все выражение (24) обращалось бы в нуль. Представив усредняемую функцию в виде разложения по  $\omega$ ,  $F(\omega) \approx F(0) + \omega F'(0) + \dots$ , мы убеждаемся, что все члены, содержащие  $\omega$ , вносят конечные вклады в интеграл в числителе (24), тогда как член с  $F(0)$  оказывается как раз кратным нормировочному интегралу в знаменателе. Этот нормировочный интеграл сократится, и каждое ожидаемое значение (24) сведется просто к величине  $F(0)$ . Таким образом, при  $\alpha \rightarrow 0$  мы имели бы

$$\begin{aligned}
\langle f(\omega) \rangle^z &\rightarrow f(0) \equiv f_0, & \langle y(\omega) \rangle^z &\rightarrow y(0) \equiv y_0, \\
\langle f(\omega)y(\omega) \rangle^z &\rightarrow f(0)y(0) \equiv f_0 y_0, \\
\langle B \rangle^z &= B_0
\end{aligned} \quad (31)$$

и все неопределенности исчезли бы:

$$\Delta f = \Delta(yf) = \Delta B = 0.$$

Так что, соответственно физическому смыслу, формула (25) преобразовалась бы к (19), если бы  $\alpha$  была равна нулю, и мы получили бы результат, относящийся к идеализированному случаю, когда  $\gamma$ -излучение не входило бы в расчет, как принималось в [3].

Результаты вычисления величин  $\langle B \rangle^z$ ,  $\Delta B^z$  представлены в табл. 1 и 2. Из табл. 3 можно видеть, какое значение  $P_x$  соответствует определенным  $y_0, \varepsilon$ . Первая строка в каждой таблице содержит значения величины  $y_0$  (12), а энергии электрона (в мегаэлектронвольтах) даны в первой колонке. Таким образом, каждое значение величин, представленных в таблицах, соответствует определенной паре  $y_0, \varepsilon$ . В представляемых результатах величина  $y_0$  меняется от  $-0.8$  до  $+0.8$ , как и в работе [3]. В табл. 1 представлены величины

$$\frac{\langle B \rangle^\pm - B_0}{B_0} \cdot 100, \quad (32)$$

т.е. отклонения величин  $\langle B \rangle^z$  (25) от  $B_0$  (19) в процентах. Например, из табл. 1 и 2 заключаем, что при  $y_0 = 0.2$ ,  $\varepsilon = 1$  МэВ величина  $B^+$  превосходит  $B_0$  на 0.69%, тогда как значение  $B^-$  при тех же  $\varepsilon$ ,  $P_x$  меньше  $B_0$  на 0.44%. Разности, представленные в табл. 1, существенно возрастают когда величина  $|y_0|$  уменьшается. Из этих таблиц становится ясно, что разности  $\langle B \rangle^\pm - B_0$ ,  $\langle B \rangle^+ - \langle B \rangle^-$  нельзя считать пренебрежимо малыми, коль скоро речь идет о точности 1% или выше в определении  $B$ . Таким образом, уже результаты, приведенные в табл. 1, убеждают нас в том, что нет оснований полагать доказанным, что точность  $\sim 0.4\%$  в получении  $B$  достигнута при обработке экспериментальных данных [3], когда не учитывается  $\gamma$ -излучение. Далее, величины

$$\frac{\Delta B^\pm}{\langle B \rangle^\pm} \cdot 100, \quad (33)$$

представляющие ширину  $\Delta B^z$  (дисперсию) возможного распределения значений  $B$  вокруг ожидаемого (среднего) значения  $\langle B \rangle^z$ , даны в табл. 2. Конечно, имея в своем распоряжении только наблюдаемую величину  $w_{exp}^z(p, P_x)$  (13) [3], мы не в состоянии судить об истинной величине  $B$  с точностью, лучшей чем  $\Delta B^z(y_0, \varepsilon)$ , как разъяснялось выше. Но, как видно из табл. 3, даже самые малые неопределенности  $\Delta B$  при  $|y_0| = 0.8$  достигают  $\sim 1\%$ , и значения  $\Delta B$  растут очень быстро, когда  $|y_0|$  убывает, как и величины в табл. 1. Из данных, представленных в таблицах, мы заключаем, что неопределенности в оценке  $B$  вследствие большой дисперсии  $\Delta B^\pm$  оказываются гораздо более существенными, чем из-за различия между  $\langle B \rangle^+$  и  $\langle B \rangle^-$ . Таким образом, неразумно устанавливать величину  $B$  (8) в (6) из обработки экспериментальных данных [3] при значениях  $p, P_x$ , соответствующих малым  $|y_0|$ .

Разумеется, нет ничего удивительного в том, что значения величин в табл. 1 и в особенности 2, очень быстро растут, когда  $y_0 \rightarrow 0$ ; физическая причина такого поведения  $\langle B \rangle$  и  $\Delta B$  вполне ясна. Действительно, когда  $y_0 \approx 0$ , т.е.  $|p| \approx P_x$ , наличие члена  $x\omega$  в  $y(\omega)$  (21) приводит к значительной величине отношений  $(y - y_0)/y_0$  и  $(\Delta y f)/\langle y f \rangle$  при любых  $\omega$ , даже совсем малых. В этом случае наличие  $\gamma$ -излучения полностью меняет кинематику антинейтрино по сравнению с той, которая имела бы место в отсутствие электромагнитных взаимодействий. В свою очередь, величины  $(\langle B \rangle^\pm - B_0)/B_0$  и

$\Delta B^\pm / \langle B \rangle^\pm$  существенно растут и могут стать даже произвольно большими при  $|y_0| \rightarrow 0$ . Конечно, в этих условиях вообще нельзя сколько-нибудь определенно говорить о самих ожидаемых (средних) значениях этих величин.

Полученный результат приводит нас к ясному пониманию того, что нет ни малейших физических оснований использовать экспериментальные данные при малых значениях  $|y_0| \sim 0.1$  для заслуживающего доверие получения фактора асимметрии  $B$  углового распределения антинейтрино. Имея в своем распоряжении лишь вероятность  $\beta$ -распада поляризованного нейтрона при данных  $p, P_x$ , без регистрации сопутствующего  $\gamma$ -излучения, мы в состоянии восстановить угловое распределение антинейтрино лишь приближенно, в среднем, и, соответственно, так же в среднем оценить величину  $B$  согласно результатам, представленным в таблицах. Как можно заключить, получение коэффициента  $B$  становится несостоятельным и утрачивает, по существу, всякое доверие, когда события, относящиеся к значениям  $|y_0| \leq 0.1$ , включаются в анализ непосредственно, без того чтобы им был приписан надлежащий вес. Обработывая экспериментальные данные вне этих малых значений  $|y_0|$ , мы можем претендовать на получение полуколичественной оценки  $B$  с точностью примерно в несколько процентов. В лучшем случае можно полагать, что при учете лишь событий с  $|y_0| \approx 0.8-1.0$  достижима точность лучше чем 1% в восстановлении коэффициента  $B$  из импульсного распределения электронов и протонов [3].

## 6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Итак, увы, нет никаких оснований пренебрегать эффектом  $\gamma$ -излучения в установлении величины  $B$  и поддерживать объявленное в [3] достижение очень высокой точности,  $\approx 0.4\%$ , в измерении  $B$ .

Должно быть ясно, и это следует особо подчеркнуть, что неопределенности, вносимые нерегистрируемым  $\gamma$ -излучением в процессе получения  $B$ , т.е. разности  $|B^+ - B^-|$ ,  $|B^\pm - B_0|$  и дисперсия  $\Delta B^2$ , не могут быть ни устранены, ни даже уменьшены путем улучшения статистики в эксперименте [3] или искусным улучшением каких-либо приспособлений в существующей экспериментальной установке [3]. Величины, приведенные в таблицах, получились в процессе нашего рассмотрения из-за того, что кинематика антинейтрино может быть восстановлена из измерений  $p, P_x$  [3] только в среднем, поскольку не регистрируется  $\gamma$ -излучение. В каждом событии распада кинематика антинейтрино могла бы быть восстановлена однозначно, если бы импульс  $\gamma$ -излучения регистрировался наряду с величинами  $p, P_x$ . Соответственно, следует поставить эксперимент так, чтобы регистрировались тройные совпадения в распаде поляризованного нейтрона, т.е. события, где величины  $\omega, x$  (21) сопутствующего  $\gamma$ -излучения регистрировались бы одновременно с определенными значениями  $p, P_x$ . Тогда существовало бы взаимнооднозначное соответствие между таким наблюдаемым тройным распределением и угловым распределением антинейтрино, куда входит интересующая нас величина  $B$ . Как ни трудно провести такой эксперимент, нет оснований сомневаться, что он осуществим, если это в самом деле необходимо.

Вывод, который можно сделать из наших расчетов (см. таблицы), состоит в том, что неопределенности, обусловленные влиянием  $\gamma$ -излучения при получении  $B$ , могли бы быть сведены до  $\leq 1\%$ , если бы величина  $B$  извлекалась бы в [3] из обработки экспериментальных данных лишь для  $|y_0| \geq 0.8$ . Так что, возможно, было бы разум-

Таблица 1

Величины  $(\langle B \rangle^\pm - B_0)/B_0$  (в процентах) в зависимости от  $\epsilon$  и  $y_0$  (см. текст)

$\epsilon$ , МэВ	$y_0$									
	-0.80	-0.40	-0.20	-0.10	-0.05	0.05	0.10	0.20	0.40	0.80
	$(\langle B \rangle^+ - B_0)/B_0$									
0.55	0.00	-0.04	-0.12	-0.28	-0.59	0.66	0.34	0.19	0.10	0.03
0.70	-0.01	-0.09	-0.25	-0.57	-1.20	1.34	0.70	0.38	0.21	0.08
0.80	-0.02	-0.12	-0.33	-0.74	-1.57	1.74	0.91	0.49	0.27	0.11
0.90	-0.02	-0.15	-0.40	-0.90	-1.90	2.11	1.10	0.59	0.33	0.14
1.00	-0.03	-0.17	-0.47	-1.05	-2.20	2.45	1.28	0.69	0.39	0.17
1.25	-0.04	-0.23	-0.62	-1.37	-2.86	3.20	1.66	0.89	0.50	0.24
	$(\langle B \rangle^- - B_0)/B_0$									
0.55	0.02	0.08	0.17	0.34	0.67	-0.65	-0.32	-0.15	-0.06	-0.01
0.70	0.03	0.13	0.29	0.58	1.17	-1.18	-0.58	-0.28	-0.12	-0.02
0.80	0.03	0.15	0.34	0.70	1.40	-1.43	-0.71	-0.34	-0.15	-0.03
0.90	0.04	0.17	0.38	0.79	1.59	-1.64	-0.81	-0.40	-0.18	-0.04
1.00	0.04	0.18	0.42	0.86	1.74	-1.81	-0.90	-0.44	-0.20	-0.05
1.25	0.05	0.21	0.49	1.01	2.03	-2.14	-1.07	-0.52	-0.24	-0.07

Таблица 2

То же, что в табл. 1, но для величин  $\Delta B^\pm / \langle B \rangle^\pm$

$\epsilon$ , МэВ	$y_0$									
	-0.80	-0.40	-0.20	-0.10	-0.05	0.05	0.10	0.20	0.40	0.80
	$\Delta B^+ / \langle B \rangle^+$									
0.55	0.39	1.53	4.48	10.34	22.01	24.53	12.85	6.96	3.86	1.68
0.70	0.37	2.14	5.92	13.45	28.44	31.82	16.62	9.00	5.05	2.28
0.80	0.41	2.45	6.67	15.05	31.70	35.58	18.54	10.02	5.64	2.64
0.90	0.45	2.70	7.29	16.37	34.39	38.76	20.15	10.87	6.14	2.96
1.00	0.48	2.92	7.82	17.50	36.67	41.51	21.54	11.60	6.56	3.24
1.25	0.57	3.37	8.97	19.74	41.18	47.09	24.34	12.98	7.38	3.82
	$\Delta B^- / \langle B \rangle^-$									
0.55	1.19	3.29	6.47	12.47	24.31	22.99	11.05	5.04	1.96	0.56
0.70	1.01	3.37	7.07	14.04	27.75	27.43	13.38	6.32	2.66	0.65
0.80	0.96	3.40	7.27	14.56	28.85	29.02	14.20	6.77	2.92	0.71
0.90	0.94	3.43	7.40	14.89	29.55	30.13	14.77	7.08	3.10	0.77
1.00	0.93	3.45	7.50	15.13	30.02	30.96	15.18	7.31	3.24	0.83
1.25	0.94	3.51	7.72	15.48	30.68	32.38	15.87	7.61	3.46	0.95



Таблица 3

То же, что в табл. 1, но для величины  $P_x$  (в МэВ)

$\epsilon$ , МэВ	$y_0$									
	-0.80	-0.40	-0.20	-0.10	-0.05	0.05	0.10	0.20	0.40	0.80
0.55	-0.39	-0.09	0.05	0.13	0.17	0.24	0.28	0.35	0.50	0.80
0.70	0.00	0.24	0.36	0.42	0.45	0.51	0.54	0.60	0.72	0.95
0.80	0.22	0.42	0.52	0.57	0.59	0.64	0.66	0.71	0.81	1.01
0.90	0.43	0.58	0.66	0.70	0.72	0.76	0.78	0.82	0.90	1.06
1.00	0.62	0.74	0.80	0.83	0.84	0.87	0.89	0.92	0.98	1.10
1.25	1.11	1.12	1.13	1.14	1.14	1.14	1.15	1.15	1.16	1.18

но переобработать с учетом этого данные из [3], непосредственно вычисляя ожидаемое значение  $\langle B \rangle^z(p, P_x)$  и его дисперсию  $\Delta B^z(p, P_x)$  согласно (23) через соответствующие измеряемые величины  $w_{exp}^z(p, P_x)$  (22) [3].

Напомним также, что, как было отмечено в разд. 3 (см. (14)–(16)), экспериментальные данные, полученные в [3], могли бы послужить непосредственно для нахождения величины  $g_A$ , входящей в (2). Конечно, следует получить явные, полные выражения величин  $\tilde{C}(P_x, p, g_V, g_A)$ ,  $C(P_x, p, g_V, g_A)$  в (14), что делается, по существу, таким же точно способом, каким были получены ранее [8] все коэффициенты в (6). И также, наоборот, имея в своем распоряжении величину  $g_A$ , полученную в [2], мы можем подставить ее в (14), интересуясь, будут ли при этом воспроизведены экспериментальные данные [3]; такое резюме относительно значений величины  $g_A$ , извлекаемых из различных экспериментов, обсуждается в [16].

В свете сказанного (см. разд. 2) о том, насколько важно установить с требуемой высокой точностью как значение самой величины  $B$ , так и  $g_A$ , становится совершенно ясно, что исследования, проведенные в [3, 4], надлежит развивать столь возможно интенсивно.

Автор благодарен В. А. Втюрину, В. Г. Николенко, Ю. Н. Покотилевскому и Ю. В. Хольнову за очень полезные обсуждения и поддержку.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 96-02-18826).

## Литература

1. A. Pichlmeier, P. Geltenbort, V. Nesvizhevsky et al., Proc. of ISINN-6, E3-98-202, JINR, Dubna, Russia, 15–18 May, 1998, p. 220. S. Arzumanov, L. Bondarenko, S. Chernyavski et al., Proc. of ISINN-5, E3-97-213, JINR, Dubna, Russia, 14–17 May, 1997, p. 53. K. Schreckenbach and W. Mampe, J. Phys. G 12, 1 (1992). W. Mampe, P. Aregon, J. C. Bates et al., NIM A 284, 111, (1989). В. Мампе, Л. Н. Бондаренко, В. И. Морозов, Письма в ЖЭТФ 57, 77 (1993). J. Byrne, P. G. Dawber, C. G. Habeck et al., Europhys. Lett. 33, 187 (1996).

2. J. Reich, H. Abeje, M. A. Hoffman et al., Proc. of ISINN-6, E3-98-209, JINR, Dubna, Russia, 15-18 May, 1998, p. 226. H. Abele, S. Bäßler, D. Dubbers et al., Phys. Lett. B **407**, 212 (1997). P. Liaud, K. Schreckenbach, R. Kossakowski et al., Nucl. Phys. A **612**, 53 (1997). K. Schreckenbach, P. Liaud, R. Kossakowski et al., Phys. Lett. B **349**, 427 (1995).
3. I. A. Kuznetsov, A. P. Serebrov, I. V. Stepanenko et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 794 (1995). I. A. Kuznetsov, A. P. Serebrov, I. V. Stepanenko et al., Письма в ЖЭТФ **60**, 311 (1994). А. П. Серебров, И. А. Кузнецов, И. В. Степаненко и др., ЖЭТФ **113**, 1963 (1998).
4. Б. Г. Ерозолимский, УФН **116**, 145 (1975). Б. Г. Ерозолимский, Л. Н. Бондаренко, Ю. А. Мостовой и др., ЯФ **8**, 176 (1968); **12**, 323 (1970).
5. R. R. Levis and G. W. Ford, Phys. Rev. **107**, 756 (1957). S. Barshay and R. Behrends, Phys. Rev. **114**, 931 (1959). J. K. Knipp and G. E. Uhlenbeck, Physica **3**, 425 (1936). F. Bloch, Phys. Rev. **50**, 272 (1936). И. С. Баткин, Ю. Г. Смирнов, ЭЧАЯ **11**, 1421 (1980).
6. A. Sirlin, Nucl. Phys. B **71**, 29 (1974); **100**, 291 (1975); **196**, 83 (1982); Rev. Mod. Phys. **50**, 573 (1978); Phys. Rev. D **22**, 971 (1980).
7. F. Glück and K. Toth, Phys. Rev. D **46**, 2090 (1992). A. Garcia and W. Juarez, Phys. Rev. D **22**, 1132 (1980). A. Garcia, Phys. Rev. D **25**, 1348 (1982); **35**, 232 (1987). K. Toth, K. Szegö, and A. Margaritis, Phys. Rev. D **33**, 3306 (1986). F. Glück and K. Toth, Phys. Rev. D **41**, 2160 (1990). F. Glück, Phys. Rev. D **47**, 2840 (1993).
8. G. G. Bunatian, Proc. of ISINN-5, E3-97-213, JINR, Dubna, Russia, 15-18 May, 1997, p. 102. Г. Г. Бунатиян, ЯФ **62**, 697 (1999).
9. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Релятивистская квантовая теория поля*, ч. I и II, Наука, Москва (1971).
10. E. D. Commins and P. H. Bucksbaum, *Weak Interactions of Leptons and Quarks*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1983). E. D. Commins, *Weak Interactions*, McGraw-Hill, New York (1973). P. H. Frampton and W. K. Tung, Phys. Rev. D **3**, 1114 (1971).
11. С. Итzykson and J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York (1981).
12. Review of Particle Properties, Phys. Rev. D **50** (Part I) 1177 (1994).
13. N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. **10**, 531 (1963). M. Kobajashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **49**, 625 (1973).
14. С. М. Биленький, Р. М. Рындин, Я. А. Смородинский, Хо Тсо-Хсин, ЖЭТФ **37**, 1758 (1959).
15. А. А. Абрикосов, ЖЭТФ **30**, 96 (1956). Б. Б. Судаков, ЖЭТФ **30**, 87 (1956). D. R. Yennie, S. C. Frautschi, and H. Suura, Ann. Phys. **13**, 379 (1961). N. Meister and D. R. Yennie, Phys. Rev. **130**, 1210 (1963). F. Bloch and A. Nordsieck, Phys. Rev. **52**, 54 (1937).
16. Yu. A. Mostovoy, Phys. Atomic Nucl. **59**, 968 (1996). Yu. A. Mostovoy, Preprint of the Russian Research Center «Kurchatov Institute», IAE-6040/2, Moscow (1997).
17. А. П. Серебров and N. V. Romanenko, Письма в ЖЭТФ **55**, 490 (1992).
18. В. R. Hostein and S. B. Treiman, Phys. Rev. D **16**, 2369 (1977). M. A. Beg, R. V. Budny, R. Mohapatra et al., Phys. Rev. Lett. **38**, 1252 (1977).
19. R. N. Mohapatra and D. P. Sidhu, Phys. Rev. Lett. **38**, 667 (1977). R. N. Mohapatra and J. C. Pati, Phys. Rev. D **11**, 566 (1975).
20. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Гостехиздат, Москва (1951).