ЖЭТФ, 2000, том 117, вып. 1, стр. 5–21

КАНОНИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ ДВУМЕРНОЙ ГРАВИТАЦИИ

С. Н. Вергелес*

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 23 марта 1999 г.

Проводится каноническое квантование двумерной гравитации, связанной минимальным образом с вещественным скалярным и спинорным майорановским полями. Полностью описывается пространство физических состояний теории, а также вычисляются средние значения метрического тензора относительно состояний, близких к основному.

PACS: 04.60

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовая теория гравитации в четырехмерном пространстве-времени наталкивается на фундаментальные трудности, которые в настоящее время не преодолены. Эти трудности можно условно разделить на концептуальные и вычислительные. Главная концептуальная проблема заключается в том, что гамильтониан является линейной комбинацией связей первого рода. Этот факт делает неясной роль времени в гравитации. Главная вычислительная проблема состоит в неперенормируемости теории гравитации. Указанные трудности тесно переплетены. Например, в зависимости от вычислительной процедуры в алгебре связей может быть аномальный вклад или не быть его (центрального заряда). Наличие или отсутствие аномалии в алгебре связей первого рода определяющим образом влияет на процедуру квантования и возникающую в результате физическую картину.

Перечисленные фундаментальные проблемы успешно решаются на относительно простых моделях общековариантных теорий в двумерном пространстве-времени. К таким моделям, прежде всего, относятся двумерные модели гравитации, как чистой, так и взаимодействующей с веществом, а также и двумерные модели струны (см., например, [1–6] и ссылки там).

В этой работе мы проводим каноническое квантование двумерной гравитации, минимально связанной с вещественным скалярным и спинорным майорановским полями. Все построения и вычисления проводятся до получения конечного результата. Полностью описаны физические состояния теории. Полное пространство состояний оказывается подобным по своим свойствам многомерному фоковскому пространству, в котором действуют бозонные и фермионные операторы. Начато вычисление средних значений метрического тензора относительно состояний, близких к основному.

Однако настоящую работу следует воспринимать лишь как один из первых шагов на пути безаномального квантования (если это вообще возможно) некоторых из теорий, которые при более традиционном квантовании являются аномальными. Лишь дальнейшие исследования, включающие систематическое изучение расхождений в предсказаниях (которые имеют место при разных подходах к квантованию) для наблюдаемых в высших порядках, станут критерием правильности выбранного пути квантования.

Прогресс, достигнутый при построении двумерной квантовой теории гравитации, связан с двумя идеями. Эти идеи будут сформулированы ниже после введения необходимых обозначений.

Будем предполагать, что пространство-время топологически эквивалентно двумерному цилиндру. Временная координата t изменяется от минус бесконечности до плюс бесконечности, а пространственная координата σ — от 0 до 2π. Все рассматриваемые функции периодичны относительно координаты σ. Набор координат (t, σ) обозначается также $\{x^\mu\}$. Метрический тензор в пространстве-времени обозначается $g_{\mu\nu}$, так что квадрат интервала записывается в виде

$$ds^2 = g_{00}\, dt^2 + g_{11}\, d\sigma^2 + 2g_{01}\, dt\, d\sigma. \tag{1.1}$$

*E-mail: vergeles@itp.ac.ru

Большинство формул и обозначений во Введении позаимствовано из работы [2]. Далее метрический тензор параметризуется следующим образом:

$$g_{\mu\nu} = e^{2\rho} \begin{pmatrix} u^2 - v^2 & v \\ v & -1 \end{pmatrix}, \qquad g \equiv \det g_{\mu\nu} = -u^2 e^{4\rho}. \tag{1.2}$$

Пусть $i, j = 0, 1$ и $\eta_{ij} = \mathrm{diag}\,(1, -1)$. Введем ортонормированный базис $\{e_i^\mu\}$, такой что

$$g_{\mu\nu}\, e_i^\mu e_j^\nu = \eta_{ij}. \tag{1.3}$$

Для определенности возьмем

$$e_0^\mu = \frac{1}{u} e^{-\rho} \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix}, \quad e_1^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\rho} \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Диада $\{e_\mu^i\}$ однозначно определяется уравнениями $e_\mu^i e_i^\nu = \delta_\mu^\nu \leftrightarrow e_\mu^i e_j^\mu = \delta_j^i$. С учетом (1.4) имеем

$$e_\mu^0 = \begin{pmatrix} u e^\rho \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_\mu^1 = e^\rho \begin{pmatrix} -v \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Рассмотрим действие

$$S = \int dt \int_0^{2\pi} d\sigma \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{4\pi G} (\eta R - 2\lambda) + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu f \partial_\nu f + \frac{i}{2} e_j^\mu \bar\psi \gamma^j \mathcal{D}_\mu \psi \right\}. \tag{1.6}$$

Здесь G — гравитационная постоянная, λ — космологическая постоянная, R — скалярная кривизна пространства-времени, η и f — вещественные скалярные поля, ψ — двухкомпонентное спинорное майорановское поле и $\{\gamma^i\}$ — двумерные матрицы Дирака. Далее мы считаем, что

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^5 \equiv \gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Майорановость спинорного поля означает, что $\psi = \gamma^0 \bar\psi^t$ (верхний индекс t означает транспонирование). В нашем случае имеем

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \phi = \phi^\dagger, \quad \chi = \chi^\dagger. \tag{1.8}$$

Операция ковариантного дифференцирования спинорного поля определена согласно формуле

$$\mathcal{D}_\mu \psi = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2} \omega_{ij\mu} \sigma^{ij} \right) \psi, \qquad \sigma^{ij} = \frac{1}{4} [\gamma^i, \gamma^j]. \tag{1.9}$$

Форма связности $\omega_{ij\mu}$ однозначно находится из уравнения

$$d\omega^i + \omega_j^i \wedge \omega^j = 0,$$

где $\omega^i \equiv e_\mu^i\, dx^\mu$. Таким образом, находим

$$\omega_{01} = \left[u' + u\rho' - \frac{v}{u} (\dot\rho + \rho' v + v') \right] dt + \frac{1}{u} (\dot\rho + \rho' v + v')\, d\sigma. \tag{1.10}$$

Здесь и далее точка сверху и штрих обозначают соответственно частные производные $\partial/\partial t$ и $\partial/\partial\sigma$. При помощи структурного уравнения Картана легко устанавливается соотношение

$$\sqrt{-g}\, R\, dt \wedge d\sigma = 2\, d\omega^{01}. \tag{1.11}$$

Так как поля ϕ и χ в (1.8) вещественны и принадлежат грассмановой алгебре, имеем

$$\phi(x)\,\phi(x) = 0, \qquad \chi(x)\,\chi(x) = 0. \tag{1.12}$$

С учетом (1.12) мы можем в (1.6) сделать замену $\mathcal{D}_\mu \psi \to (\partial/\partial x^\mu)\,\psi$. Поэтому фермионная часть действия пропорциональна выражению

$$e^\rho \{ \phi\dot\phi + (u+v)\,\phi\phi' + \chi\dot\chi - (u-v)\,\chi\chi' \}.$$

В последнем выражении множитель e^ρ может быть устранен при помощи замены

$$\phi \to e^{-\rho/2} \phi, \quad \chi \to e^{-\rho/2} \chi.$$

В силу (1.12) при такой замене в действии не появляются дополнительные производные поля ρ. Таким образом, лагранжиан рассматриваемой системы имеет вид

$$\mathcal{L} = \int d\sigma \left\{ \frac{1}{2\pi G} \left[u^{-1} \dot\eta (\dot\rho + v\rho' + v') + \eta' \left(\frac{v}{u} (\dot\rho + v\rho' + v') - u' - u\rho' \right) - \lambda u e^{2\rho} \right] + \frac{1}{2u} \left[\dot f^2 + 2v \dot f f' - (u^2 - v^2) f'^2 \right] + \frac{i}{2} [\phi\dot\phi + (u+v)\phi\phi' + \chi\dot\chi - (u-v)\chi\chi'] \right\}. \tag{1.13}$$

Обозначим через π_η, π_ρ и π — поля, канонически-сопряженные, соответственно, полям η, ρ и f. Поля u и v в (1.13) являются лагранжевыми множителями. Стандартным путем получаем гамильтониан системы (1.13):

$$\mathcal{H} = \int d\sigma\, (u\,\mathcal{E} + v\,\mathcal{P}),$$

$$\mathcal{E} = 2\pi G\, \pi_\eta \pi_\rho + \frac{1}{2\pi G} [-(\eta'' - \eta'\rho') + \lambda e^{2\rho}] + \frac{1}{2} (\pi^2 + f'^2) + \frac{i}{2} (-\phi\phi' + \chi\chi'), \tag{1.14}$$

$$\mathcal{P} = -\left(\pi_\eta \eta' + \pi_\rho \rho' + \pi f' + \frac{i}{2} \phi\phi' + \frac{i}{2} \chi\chi' \right).$$

Проведем следующую каноническую замену переменных:

$$\lambda\, r^0 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{4\pi\, G}}\, e^{-\rho}\, (2\eta'\,\mathrm{ch}\,\Sigma - 4\pi\, G\,\pi_\rho\,\mathrm{sh}\,\Sigma)\,,$$
$$\lambda\, r^1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{4\pi\, G}}\, e^{-\rho}\, (4\pi\, G\,\pi_\rho\,\mathrm{ch}\,\Sigma - 2\eta'\,\mathrm{sh}\,\Sigma)\,, \tag{1.15}$$
$$\pi_0 - {r^1}' = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi\, G}}\, e^{\rho}\,\mathrm{sh}\,\Sigma,$$
$$\pi_1 + {r^0}' = -\sqrt{\frac{\lambda}{\pi\, G}}\, e^{\rho}\,\mathrm{ch}\,\Sigma.$$

Здесь

$$\Sigma(\sigma) = 2\pi\, G\int\limits_0^\sigma d\tilde\sigma\,\pi_\eta(\tilde\sigma).$$

Переменные, описывающие материю, остаются без изменений. В новых переменных гамильтониан (1.14) принимает вид

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\,[-(\pi_0^2 + ({r^0}')^2) + (\pi_1^2 + ({r^1}')^2)] + \\ + \frac{1}{2}\,[\pi^2 + f'^2 + i\,(-\phi\,\phi' + \chi\,\chi')], \tag{1.16}$$
$$\mathcal{P} = -(\pi_0\, {r^0}' + \pi_1 {r^1}') - (\pi\, f' + \frac{i}{2}\phi\,\phi' + \frac{i}{2}\chi\,\chi').$$

До этого момента рассмотрение было классическим. Начинать квантование системы следует с определения одновременных перестановочных соотношений канонически-сопряженных переменных. В нашем случае имеем

$$[r^0(\sigma),\, \pi_0(\sigma')] = [r^1(\sigma),\, \pi_1(\sigma')] = \\ = [f(\sigma),\, \pi(\sigma')] = i\,\delta(\sigma - \sigma'). \tag{1.17}$$

Для фермионных степеней свободы имеют место антикоммутационные соотношения

$$\{\phi(\sigma),\, \phi(\sigma')\} = \{\chi(\sigma),\, \chi(\sigma')\} = \delta(\sigma - \sigma'). \tag{1.18}$$

Все остальные коммутаторы или антикоммутаторы фундаментальных полей r^a, π_a, f, π, ψ равны нулю. Легко проверить, что уравнения Гейзенберга $i\,\dot{\mathcal{O}} = [\mathcal{O},\, \mathcal{H}]$, полученные при помощи коммутационных соотношений (1.17), (1.18), совпадают с уравнениями Лагранжа. Здесь $\mathcal{O}$ — любой оператор.

Так как поля u и v в (1.14) — лагранжевы множители, величины (1.16) являются связями. В рамках классического рассмотрения эти связи являются связями первого рода. Однако хорошо известно, что при квантовании в рассматриваемой системе может возникнуть аномалия или центральный заряд: алгебра одновременных коммутаторов величин $\mathcal{E}$ и $\mathcal{P}$ содержит центральный заряд. Наличие центрального заряда в алгебре связей радикально усложняет проблему квантования. В частности, система (1.16)–(1.18) может оказаться несовместной.

В последнее время в ряде работ [1–4, 6] был предложен безаномальный подход к квантованию системы (1.16)–(1.18). В рамках этого подхода в квантовой алгебре величин (1.16) центральный заряд отсутствует. Это означает, что все операторы (1.16) могут трактоваться как связи первого рода в смысле Дирака. Этот новый подход применяется в предлагаемой работе.

Идея нового подхода к квантованию возникла при изучении модели, описывающей чистую гравитацию. Эта модель получается из модели (1.16) путем вычеркивания вторых слагаемых в правых частях системы (1.16). В [1–4, 6] показано, что в теории чистой гравитации центральный заряд равен нулю, если в полном пространстве состояний скалярное произведение положительно определено. Причина этого явления в том, что при новом подходе процедура упорядочения операторов в величинах $\mathcal{E}$ и $\mathcal{P}$ радикально отличается от упорядочения при традиционном квантовании.

Теперь сформулируем положения, на основе которых развивается новый метод квантования.

1) Полное пространство состояний H_C, в котором действуют фундаментальные операторные поля r^a, π_a, f, π, ψ, снабжено положительно определенным скалярным произведением. В пространстве H_C индефинитная метрика отсутствует.

Чтобы сформулировать следующее положение, обозначим через L совокупность операторов (1.16) и через ψ — совокупность всех материальных полей f, ψ. Устраним из операторов L степени свободы, описывающие материальные поля, и обозначим совокупность полученных таким образом операторов через $L^{(0)}$. Таким образом, операторы $L^{(0)}$ определяют динамику лишь гравитационных степеней свободы и

$$[L^{(0)},\, \psi] = 0. \tag{1.19}$$

2) В теории (1.16) существует унитарное преобразование U, такое что

$$U\, L^{(0)}\, U^\dagger = L. \tag{1.20}$$

Вследствие (1.19) и (1.20) поля

$$\Psi = U\,\psi\, U^\dagger \tag{1.21}$$

коммутируют со всеми операторами L.

Поясним важную роль последнего положения в квантовании рассматриваемой системы. Предположим, что в теории (1.16) найдено состояние $|\,0\,\rangle$, которое аннулирует все операторы $L^{(0)}$ и все операторы уничтожения полей ψ. Согласно сказанному выше это возможно. Тогда состояние $U\,|\,0\,\rangle$ аннулируется всеми операторами L и всеми операторами уничтожения полей Ψ. Физическое пространство состояний, аннулирующих все операторы L, строится из основного состояния $U\,|\,0\,\rangle$ при помощи операторов рождения полей Ψ. Таким образом, полностью решается проблема квантования системы (1.16)–(1.18).

Во втором положении свойства интересующего нас унитарного преобразования U описаны лишь в самых общих чертах. Ниже это унитарное преобразование строится явно для изучаемой в статье модели двумерной гравитации. Эквивалент формулы (1.20) имеет при этом более сложный вид. Тем не менее, при помощи построенного унитарного преобразования удается достаточно далеко продвинуться в вычислениях.

2. КВАНТОВАНИЕ ЧИСТОЙ ГРАВИТАЦИИ

Задача квантования двумерной чистой гравитации изучалась в работах [1–4]. В работах [4, 6] было проведено безаномальное квантование двумерной струны, система связей которой совпадает с системой связей двумерной чистой гравитации в представлении (1.16). Это дает нам возможность применить здесь методы, разработанные в [4, 6].

Пусть $a = 0, 1$ и $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1, 1)$. В калибровке $u = 1$, $v = 0$ уравнения Гейзенберга для полей $r^a, \pi^a = \eta^{ab}\pi_b$ имеют вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\right) r^a = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\right) \pi^a = 0. \tag{2.1}$$

Следовательно, поля r^a и π^a содержат как положительно-, так и отрицательночастотные моды:

$$\begin{aligned} r^a(\sigma) &= \frac{x^a}{\sqrt{4\pi}} + \frac{i}{\sqrt{4\pi}} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n}(\alpha_n^a e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^a e^{-in\sigma}), \\ \pi^a(\sigma) &= \frac{p^a}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{n\neq 0}(\alpha_n^a\, e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^a e^{-in\sigma}). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Положим $\alpha_0^a \equiv \bar{\alpha}_0^a \equiv p^a$. Из условий вещественности полей (2.2) вытекает, что

$$x^{a\dagger} = x^a, \quad \alpha_n^{a\dagger} = \alpha_{-n}^a, \quad \bar{\alpha}_n^{a\dagger} = \bar{\alpha}_{-n}^a. \tag{2.3}$$

Для того чтобы выполнялись коммутационные соотношения (1.17), необходимо, чтобы ненулевые коммутаторы новых переменных имели вид

$$\begin{aligned} &[\alpha_m^a,\, \alpha_n^b] = [\bar{\alpha}_m^a,\, \bar{\alpha}_n^b] = m\,\eta^{ab}\,\delta_{m+n}, \\ &[x^a,\, p^b] = i\,\eta^{ab}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Набор операторов (1.16) эквивалентен двум сериям операторов

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\, e^{-in\sigma}\,(\mathcal{E} + \mathcal{P}), \\ \bar{L}_n &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\, e^{in\sigma}\,(\mathcal{E} - \mathcal{P}), \quad n = 0, \pm 1, \ldots \end{aligned} \tag{2.5}$$

При помощи (2.2) находим

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2}\,:\sum_m \alpha_{n-m}^a\,\alpha_{am}:, \\ \bar{L}_n &= \frac{1}{2}\,:\sum_m \bar{\alpha}_{n-m}^a\,\bar{\alpha}_{am}:. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Упорядочение операторов в (2.6) определяется в соответствии с общими условиями квантования и играет решающую роль. Целью квантования является отыскание такого пространства физических состояний, на котором все операторы (2.6) обращаются в нуль и в котором имеется математически корректное и положительно определенное скалярное произведение.

В этой статье мы реализуем два подхода к квантованию изучаемой системы.

Первый подход общеизвестен. Он был сформулирован Дираком и описывается следующей схемой. Пусть $\{\chi_n\}$ — полный набор связей первого рода. Тогда физические состояния удовлетворяют условиям

$$\chi_n\,|\,\rangle_{PD} = 0. \tag{2.7}$$

Из (2.7) вытекают условия непротиворечивости теории:

$$[\chi_m,\, \chi_n] = c_{mn}^l\,\chi_l. \tag{2.8}$$

В (2.8) коэффициенты c_{mn}^l могут быть операторными величинами и должны быть расположены левее связей χ_l.

При квантовании (2.2)–(2.8) возникает следующая трудность (подробнее см. [6]). Из условий (2.7) вытекает, что все физические состояния не зависят от некоторых исходных динамических переменных. По этой причине возникают следующие проблемы:

а) определение скалярного произведения на пространстве физических состояний;

б) вычисление матричных элементов относительно физических состояний.

Дело в том, что не все исходные динамические переменные являются операторами в физическом пространстве состояний. Поэтому матричные элементы от этих переменных в физическом пространстве не определены. Хотя наблюдаемые величины не зависят от указанных динамических переменных, тем не менее, при вычислении матричных элементов от наблюдаемых величин в физическом пространстве также могут возникнуть серьезные трудности.

Далее квантование (2.7)–(2.8) мы будем называть первым методом квантования.

В работе [6] к системе (2.4), (2.6) был применен другой метод квантования. Идея этого метода заключается в некотором ослаблении условий Дирака (2.7) путем замены их условиями

$$\langle P \,|\, \chi_m \,|\, P \rangle = 0. \tag{2.9}$$

Здесь P нумерует физические состояния. Условия квантования (2.9) аналогичны условиям квантования Гупта—Блейлера в электродинамике, когда равенство $\partial_\mu A^\mu = 0$ имеет место лишь в среднем, а также условиям квантования в обычной теории струны, когда генераторы алгебры Вирассоро удовлетворяют условиям $L_n = 0$ также лишь в среднем. При этом усреднение проводится относительно физических состояний.

Фундаментальное отличие предлагаемого здесь пути квантования от квантования Гупта—Блейлера и общепринятого квантования струны заключается в том, что при нашем подходе полное пространство состояний снабжено положительно определенным скалярным произведением. Ниже показывается, что этот факт позволяет провести безаномальное квантование двумерной струны.

В качестве условий непротиворечивости теории, заменяющих условия Дирака (2.8), теперь мы имеем

$$\langle P \,|\, [\chi_m,\, \chi_n] \,|\, P \rangle = 0. \tag{2.10}$$

Физический смысл условий (2.10) заключается в следующем. Пусть гамильтониан системы имеет такой вид, как в общековариантных теориях:

$$\mathcal{H}_T = \sum v_m \chi_m.$$

Предположим, что в момент времени t условия (2.9) имеют место. В бесконечно близкий момент времени $t + \delta t$ связь χ_n равна

$$\chi_n(t + \delta t) = \chi_n(t) + i\,\delta t \sum_m v_m\, [\chi_m,\, \chi_n](t).$$

Поэтому из условий непротиворечивости (2.10) следует равенство (2.9) в любой момент времени. Метод квантования (2.9), (2.10) далее называется вторым методом квантования. Сначала применим к модели (2.6) первый метод квантования. Введем обозначения

$$\begin{aligned} &x_\pm = x^0 \pm x^1, \quad \alpha_m^{(\pm)} = \alpha_m^0 \pm \alpha_m^1, \\ &\bar\alpha_m^{(\pm)} = \bar\alpha_m^0 \pm \bar\alpha_m^1. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ненулевые коммутационные соотношения новых переменных получаются при помощи (2.4):

$$[\alpha_m^{(+)},\, \alpha_n^{(-)}] = -2m\,\delta_{m+n}, \quad [\bar\alpha_m^{(+)},\, \bar\alpha_n^{(-)}] = -2m\,\delta_{m+n},$$
$$[x_+,\, \alpha_n^{(-)}] = [x_-,\, \alpha_n^{(+)}] = -2i\,\delta_n. \tag{2.12}$$

Запишем операторы (2.6) в новых переменных:

$$L_n = -\frac{1}{2}\sum_m \alpha_{n-m}^{(+)}\,\alpha_m^{(-)} = -\frac{1}{2}\sum_m \alpha_{n-m}^{(-)}\alpha_m^{(+)}. \tag{2.13}$$

Далее мы по возможности не выписываем для операторов, снабженных чертой, те соотношения, которые в точности копируют соотношения для операторов без черты. По определению в (2.13) операция упорядочения означает, что либо элементы $\alpha^{(+)}$ расположены левее всех операторов $\alpha^{(-)}$, либо наоборот. Оба эти порядка эквивалентны (см. [4, 6]).

Совершим каноническое преобразование вида

$$\alpha \to U_M\,\alpha\,U_M^\dagger, \quad \bar\alpha \to U_M\,\bar\alpha\,U_M^\dagger, \quad x \to U_M\,x\,U_M^\dagger,$$
$$U_M = \exp\left(\frac{i\,M^2\,x_+}{2p_+}\right).$$

При этом каноническом преобразовании изменяются лишь переменные $\alpha_0^{(-)}$ и x_- согласно формулам

$$\begin{aligned} &\tilde\alpha_0^{(-)} = U_M\,\alpha_0^{(-)}\,U_M^\dagger = \alpha_0^{(-)} - \frac{M^2}{p_+}, \\ &\tilde x_- = U_M\,x_-\,U_M^\dagger = x_- + M^2\,\frac{x_+}{p_+}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Для единообразия введем в этом разделе обозначения $\tilde\alpha_m^{(-)} = \alpha_m^{(-)}$ при $m \neq 0$.

Ниже вместо операторов (2.13) мы используем операторы

$$L_n = -\frac{1}{2}\sum_m \alpha_{n-m}^{(+)}\,\tilde\alpha_m^{(-)}. \tag{2.15}$$

Причина этой замены станет ясной в следующих разделах.

Определим векторное пространство состояний, в котором действуют динамические переменные системы, как линейные операторы. Представим полное пространство состояний H_{CD} как тензорное произведение калибровочного пространства состояний H_G и физического пространства состояний H_{PD}:

$$H_{CD} = H_G \otimes H_{PD}. \tag{2.16}$$

Пространство H_G порождается своим вакуумным вектором $|\,0;\,G\,\rangle$, который определяется следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &\alpha_{-m}^0\,|\,0;\,G\,\rangle = 0, \quad \alpha_m^1\,|\,0;\,G\,\rangle = 0, \quad m > 0, \\ &\langle\,0;\,G\,|\,0;\,G\,\rangle = 1. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Базис пространства H_G состоит из векторов вида

$$\alpha_m^0 \ldots \bar{\alpha}_n^0 \ldots \alpha_{-l}^1 \ldots \bar{\alpha}_{-r}^1 |0; G\rangle, \quad m, n, l, r > 0. \quad (2.18)$$

Таким образом, H_G является фоковским пространством с положительно определенным скалярным произведением.

Базис в физическом пространстве состояний Дирака H_{PD} состоит из двух серий состояний $|\,k\,\rangle_D$, $k = (k^0, k^1)|$, обладающих следующими свойствами:

$$\tilde{\alpha}_m^{(-)}\,|\,k\,\rangle_D = \tilde{\bar{\alpha}}_m^{(-)}\,|\,k\,\rangle_D = 0, \quad m = 0, \pm 1, \ldots \quad (2.19)$$

Соотношения (2.12) с $m = 0$ переписываются в виде

$$(p_a^2 + M^2)\,|\,k\,\rangle_D = 0. \quad (2.20)$$

Отсюда видно, что множество базисных векторов $|\,k\,\rangle_D$ разбивается на две серии векторов $|\,k\pm\,\rangle_D$ каждая из которых параметризуется одним непрерывным вещественным параметром. Например,

$$\begin{aligned} &p^1\,|\,k\pm\,\rangle_D = \pm k\,|\,k\pm\,\rangle_D, \\ &p^0\,|\,k\pm\,\rangle_D = \pm\sqrt{k^2 + M^2}\,|\,k\pm\,\rangle_D, \\ &-\infty < k < +\infty. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Так как операторы p^a являются эрмитовыми, скалярные произведения вида

$$\langle\, k \pm \,|\, k' \pm\,\rangle_D = \delta(k - k'), \quad \langle\, k - \,|\, k' +\,\rangle_D = 0 \quad (2.22)$$

самосогласованы.

Условия квантования, аналогичные (2.19), использовались в работах [1, 2, 4, 6] и гораздо раньше Дираком в электродинамике (см. [8]).

Замечание. Подчеркнем, что переменные α_n^a, $\bar{\alpha}_n^a$, $n \neq 0$, являющиеся линейными операторами в пространстве H_G, не являются, вообще говоря, операторами в пространстве H_{PD}. Действительно, в результате действия операторов $\alpha_n^{(+)}$ и $\bar{\alpha}_n^{(+)}$ на векторы $|\,k-\,\rangle_D$ получаются векторы, не принадлежащие физическому пространству H_{PD}.

В силу (2.13) и (2.19) справедливы равенства

$$L_n\,|\,p\,\rangle_D = \bar{L}_n\,|\,p\,\rangle_D = 0, \quad |\,p\,\rangle_D \in H_{PD}. \quad (2.23)$$

Таким образом, модель (2.6) проквантована в рамках первого метода.

Теперь проведем квантование этой же модели, используя второй метод. Предположим, что полное пространство состояний H_C, в котором действуют исходные переменные, представляется в виде тензорного произведения

$$H_C = H_G \otimes H_P. \quad (2.24)$$

Здесь пространство H_G определено согласно (2.17), (2.18). Пространство H_P имеет базис со свойствами (2.20)–(2.22). Если вектор $|\,p\,\rangle \in H_P$, то он удовлетворяет условиям (2.19) с $m = 0$.

Обратим внимание на тот факт, что операторы $\alpha_n^{(+)}$ и $\bar{\alpha}_n^{(+)}$ с $n \neq 0$ (или их комбинации) действуют в пространстве H_G, но их действие не определено ни на одном векторе из пространства H_P. Этим пространство H_P отличается от пространства H_{PD} (см. (2.19)). Таким образом, полное пространство состояний (2.24) является тензорным произведением пространств, в которых действуют соответствующие операторы. Очевидно, что пространство (2.24) снабжено положительно определенным скалярным произведением.

Для дальнейших вычислений нам необходимо определить упорядочение операторов. Упорядочение (2.15) эквивалентно упорядочению

$$L_0 = \frac{1}{2}\,(p_a^2 + M^2) - \sum_{m>0} (\alpha_m^0\,\alpha_{-m}^0 - \alpha_{-m}^1\,\alpha_m^1), \quad (2.25)$$

которое мы используем далее.

Нам представляется, что в рассматриваемой модели наиболее удобными физическими состояниями, удовлетворяющими условиям (2.9), являются состояния, когерентные по калибровочным степеням свободы. Рассмотрим в пространстве H_G когерентное состояние

$$\begin{aligned} |\,z,\,\bar{z};\,G\,\rangle = \prod_{m>0} \times \\ \times \exp\Big\{ -\frac{1}{2m}(|z_{-m}^0|^2 + |z_m^1|^2 + |\bar{z}_{-m}^0|^2 + |\bar{z}_m^1|^2) + \\ + \frac{1}{m}(z_{-m}^0\alpha_m^0 + z_m^1\alpha_{-m}^1 + \bar{z}_{-m}^0\bar{\alpha}_m^0 + \bar{z}_m^1\bar{\alpha}_{-m}^1)\Big\} \times \\ \times\,|\,0;\,G\,\rangle. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Здесь z_m^a и $\bar{z}_m^a$ — комплексные числа. Далее положим $z_0^a = \bar{z}_0^a$ и $z_m^{a*} = z_{-m}^a$. Звездочка сверху означает комплексное сопряжение. По определению

$$z_m^{(\pm)} = z_m^0 \pm z_m^1, \quad \bar{z}_m^{(\pm)} = \bar{z}_m^0 \pm \bar{z}_m^1.$$

Будем обозначать также

$$\begin{aligned} &\tilde{z}_m^{(-)} = z_m^{(-)}, \quad \tilde{\bar{z}}_m^{(-)} = \bar{z}_m^{(-)}, \quad m \neq 0, \\ &\tilde{z}_0^{(-)} = z_0^{(-)} - \frac{M^2}{z_0^{(+)}}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Везде в этой статье считается, что $z_0^0 > 0$.

Обозначим базисные векторы в пространстве H_P как $|\,z_0\pm\,\rangle_P$, $z_0^a \equiv k^a$. Имеем

$$p^a\,|\,z_0\pm\,\rangle_P = \pm z_0^a\,|\,z_0\pm\,\rangle_P, \quad \tilde{z}_0^{(-)} = 0. \quad (2.28)$$

Последнее равенство в (2.28) есть следствие соотношения (2.19) с $m = 0$.

Пусть наборы комплексных чисел $\{z, \bar{z}\}$ удовлетворяют уравнениям (2.28) с верхним знаком и

$$L_n(z) \equiv -\frac{1}{2}\sum_m z^{(+)}_{n-m}\,\tilde{z}^{(-)}_m = 0, \qquad L_n(\bar{z}) = 0, \quad n = 0, \pm 1, \ldots \tag{2.29}$$

При помощи обозначений

$$z^{(+)}(\sigma) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_n e^{in\sigma}\,z^{(+)}_n, \qquad \bar{z}^{(+)}(\sigma) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_n e^{-in\sigma}\,\bar{z}^{(+)}_n$$

эти уравнения переписываются в более удобном виде:

$$z^{(+)}(\sigma)\,\tilde{z}^{(-)}(\sigma) = 0, \quad \bar{z}^{(+)}(\sigma)\,\tilde{\bar{z}}^{(-)}(\sigma) = 0. \tag{2.29$'$}$$

Функции $z^{(+)}(\sigma), \tilde{z}^{(-)}(\sigma)$, $\bar{z}^{(+)}(\sigma)$ и $\tilde{\bar{z}}^{(-)}(\sigma)$ являются вещественными и периодическими, а их нулевые гармоники удовлетворяют (2.27) и (2.28).

Состояния

$$|\, z, \bar{z}\pm\rangle_P \equiv |\pm z, \pm\bar{z}; G\rangle \otimes |\, z_0\pm\rangle_P \tag{2.30}$$

называются базисными физическими состояниями, если выполнены условия (2.28) и (2.29$'$).

Согласно данным определениям базисные физические состояния имеют следующие свойства:

$$\alpha^0_{-m}\,|\, z, \bar{z}\pm\rangle_P = \pm z^0_{-m}\,|\, z, \bar{z}\pm\rangle_P, \qquad \alpha^1_m\,|\, z, \bar{z}\pm\rangle_P = \pm z^1_m\,|\, z, \bar{z}\pm\rangle_P, \quad m \geq 0. \tag{2.31}$$

Из формул (2.25), (2.29) и (2.31) немедленно следует, что в нашем случае условия (2.9) выполнены:

$$\langle z, \bar{z}\pm|L_n|z, \bar{z}\pm\rangle_P = 0, \qquad \langle z, \bar{z}\pm|\bar{L}_n|z, \bar{z}\pm\rangle_P = 0. \tag{2.32}$$

Проверим выполнение условий самосогласованности (2.10). Для этого достаточно убедиться, что

$$\langle z, \bar{z}\pm|\,(L_nL_{-n} - L_{-n}L_n)\,|\, z, \bar{z}\pm\rangle_P = 0. \tag{2.33}$$

Простое вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} L_nL_{-n} = {} & \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} m(n-m) + n\,(\tilde{\alpha}^1_0)^2 + \\ & +2n\sum_{m=1}^{n}\tilde{\alpha}^1_{-m}\,\tilde{\alpha}^1_m + \\ & +\sum_{m=n+1}^{\infty}(n+m)\,\tilde{\alpha}^1_{-m}\tilde{\alpha}^1_m + \\ & +\sum_{m=n+1}^{\infty}(m-n)\tilde{\alpha}^0_m\tilde{\alpha}^0_{-m} + :L_nL_{-n}:. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} L_{-n}L_n = {} & \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} m(n-m) + n\,(\tilde{\alpha}^0_0)^2 + \\ & +2n\sum_{m=1}^{n}\tilde{\alpha}^0_m\,\tilde{\alpha}^0_{-m} + \\ & +\sum_{m=n+1}^{\infty}(n+m)\,\tilde{\alpha}^0_m\tilde{\alpha}^0_{-m} + \\ & +\sum_{m=n+1}^{\infty}(m-n)\,\tilde{\alpha}^1_{-m}\tilde{\alpha}^1_m + :L_{-n}L_n:. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Здесь операторы $\tilde{\alpha}^a$ выражаются через операторы $\alpha^{(+)}, \tilde{\alpha}^{(-)}$ так же, как операторы α^a — через операторы $\alpha^{(+)}, \alpha^{(-)}$.

Так как $:L_nL_{-n}: \equiv :L_{-n}L_n:$, из последних двух равенств имеем

$$L_nL_{-n} - L_{-n}L_n = 2n\,L_0. \tag{2.36}$$

Упорядочение в правой части равенства (2.36) задается согласно (2.25). Из (2.36) видно, что уравнения (2.33) удовлетворяются, т. е. выполняются условия самосогласованности (2.10).

Заметим, что, вообще говоря,

$$\langle z, \bar{z}\pm|\,L_n\,|\, z, \bar{z}\pm\rangle_P \neq 0. \tag{2.37}$$

Мы видим, что второй метод также приводит к самосогласованной квантовой теории модели (2.6).

Коротко обсудим принцип суперпозиции при втором методе квантования.

Предположим, что состояния $|\, z, \bar{z}\pm\rangle_P$ и $|\, z', \bar{z}'\pm\rangle_P$ — физические. Является ли состояние

$$|\, z, \bar{z}\pm\rangle_P + |\, z', \bar{z}'\pm\rangle_P \tag{2.38}$$

физическим?

Нам представляется, что принцип суперпозиции не обязательно распространять на нефизические, калибровочные степени свободы. Поэтому, если в более сложных теориях при втором методе квантования принцип суперпозиции в пространстве H_G окажется ограниченным, это, по нашему мнению, не обесценит метод. В пространстве физических состояний принцип суперпозиции сохраняется в полном объеме.

3. ВКЛЮЧЕНИЕ МАТЕРИИ

Из коммутационных соотношений (1.17) и антикоммутационных соотношений (1.18) видно, что бозонные и фермионные поля имеют следующие разложения по модам (ср. с (2.2)–(2.4)):

$$\begin{aligned} f(\sigma) &= \frac{x}{\sqrt{4\pi}} + \frac{i}{\sqrt{4\pi}} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n}(\alpha_n e^{in\sigma} + \bar\alpha_n e^{-in\sigma}), \\ \pi(\sigma) &= \frac{p}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{n\neq 0} (\alpha_n e^{in\sigma} + \bar\alpha_n e^{-in\sigma}), \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} \phi(\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n \beta_n\, e^{in\sigma}, \\ \chi(\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n \bar\beta_n\, e^{-in\sigma}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Далее полагаем $\alpha_0 \equiv \bar\alpha_0 \equiv p$. Вследствие вещественности полей (3.1) и (3.2) имеем

$$\begin{aligned} &x^\dagger = x, \quad \alpha_n^\dagger = \alpha_{-n}, \quad \bar\alpha_n^\dagger = \bar\alpha_{-n}, \\ &\beta_n^\dagger = \beta_{-n}, \quad \bar\beta_n^\dagger = \bar\beta_{-n}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Коммутационные соотношения (1.17), (1.18) равносильны соотношениям

$$[\alpha_m, \alpha_n] = [\bar\alpha_m, \bar\alpha_n] = m\,\delta_{m+n}, \quad [x, p] = i, \tag{3.4}$$

$$\{\beta_m, \beta_n\} = \{\bar\beta_m, \bar\beta_n\} = \delta_{m+n}. \tag{3.5}$$

Мы выписываем лишь ненулевые коммутационные соотношения. Операторы (2.6) будем далее обозначать соответственно через $L_n^{(0)}$ и $\bar L_n^{(0)}$. С учетом вклада материальных степеней свободы компоненты Фурье (2.5) имеют вид

$$\begin{aligned} L_n &= L_n^{(0)} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_m \left[\alpha_{n-m}\alpha_m + \left(m - \frac{n}{2}\right) \beta_{n-m}\beta_m\right]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Построение указанного в конце Введения унитарного преобразования, решающего проблему квантования, удобно начинать с определения операторов рождения и уничтожения поля (1.21). Иными словами, первая наша задача заключается в построении бозонных и фермионных операторов рождения и уничтожения материи, которые коммутируют со всеми операторами (3.6). Мы увидим, что решение имеет задача с несколько ослабленными условиями. Этого достаточно для наших целей.

Рассмотрим «гравитационно обработанные» операторы материальных полей:

$$A_m = \sum_n \mathcal{M}_{m,n}\,\alpha_n, \qquad \bar A_m = \sum_n \bar{\mathcal{M}}_{m,n}\,\bar\alpha_n, \tag{3.7}$$

$$B_m = \sum_n {}^F\mathcal{M}_{m,n}\,\beta_n, \quad \bar B_m = \sum_n {}^F\bar{\mathcal{M}}_{m,n}\,\bar\beta_n. \tag{3.8}$$

Бесконечномерные матрицы $\mathcal{M}_{m,n}, \bar{\mathcal{M}}_{m,n}$, ${}^F\mathcal{M}_{m,n}$ и ${}^F\bar{\mathcal{M}}_{m,n}$ в (3.7) и (3.8) определены в Приложении. Элементы этих матриц зависят от операторов $(x_+/p_+, \alpha_m^{(+)}/p_+, \bar\alpha_m^{(+)}/p_+)$, взаимные коммутаторы которых равны нулю. Поэтому все элементы матриц в (3.7), (3.8) взаимно коммутируют.

Легко проверить путем прямых вычислений, что ненулевые коммутаторы операторов (3.7) и (3.8) имеют следующий вид:

$$[A_m, A_n] = [\bar A_m, \bar A_n] = m\,\delta_{m+n}, \tag{3.9а}$$

$$\{B_m, B_n\} = \{\bar B_m, \bar B_n\} = \delta_{m+n}. \tag{3.9б}$$

Действительно, при помощи (3.4), (3.7) и (П.14) находим

$$\begin{aligned} [A_m, A_n] &= \sum_l l\,\mathcal{M}_{m,l}\,\mathcal{M}_{n,-l} = \\ &= -n \sum_l \mathcal{M}_{m,l}\,\mathcal{M}^{-1}_{l,-n} = m\,\delta_{m+n}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Тем самым равенства (3.9а) установлены. Вследствие (3.5), (3.8) и (П.14′) имеем

$$\begin{aligned} \{B_m, B_n\} &= \sum_l {}^F\mathcal{M}_{m,l}\,{}^F\mathcal{M}_{n,-l} = \\ &= \sum_l {}^F\mathcal{M}_{m,l}\,{}^F\mathcal{M}^{-1}_{l,-n}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Отсюда следует справедливость коммутационных соотношений (3.9б).

Введенные здесь операторы (3.7) и (3.8) лишь незначительно отличаются от DDF-операторов, используемых в теории струны (см. [9, 10]).

Из данных определений легко видеть что:

$$\begin{aligned} [\alpha_m^{(+)}, A_n] &= [\alpha_m^{(+)}, \bar A_n] = \\ &= [\alpha_m^{(+)}, B_n] = [\alpha_m^{(+)}, \bar B_n] = 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Соотношения (3.12) остаются справедливыми, если в них вместо $\alpha_m^{(+)}$ подставлены $\bar\alpha_m^{(+)}$ или x_+.

Теперь мы должны вместо $\alpha_m^{(-)}$ ввести в теорию переменные $\tilde\alpha_m^{(-)}$, которые сохраняют прежний вид коммутационных соотношений с переменными $\alpha_m^{(+)}$ и имеют нулевые коммутаторы с новыми переменными (3.7), (3.8).

Из определения (3.7) находим

$$[\alpha_m^{(-)}, A_n] = \sum_l [\alpha_m^{(-)}, \mathcal{M}_{n,l}]\,\alpha_l.$$

Воспользуемся (П.16), а также обратим равенства (3.7). В результате получим

$$[\alpha_m^{(-)}, A_n] = -\frac{2n}{p_+} \sum_p \left(\sum_l \mathcal{M}_{n,l-m}\mathcal{M}^{-1}_{l,p}\right) A_p, \quad m \neq 0.$$

Здесь сумма в круглых скобках вычисляется при помощи формул (П.3), (П.10) и (П.12). Таким образом, находим

$$[\alpha_m^{(-)},\, A_n] = -\frac{2n}{p_+}\sum_p \mathcal{M}^{-1}_{m,p-n}\, A_p, \quad m \neq 0,$$
$$[\alpha_0^{(-)},\, A_n] = -\frac{n}{p_+}\, A_n. \tag{3.13}$$

Здесь было учтено равенство (3.11). Справедливы также соотношения

$$[\alpha_0^{(-)}, \bar{A}_n] = -\frac{n}{p_+}\bar{A}_n,$$
$$[\alpha_m^{(-)}, \bar{A}_n] = 0, \quad m \neq 0. \tag{3.14}$$

Аналогичным образом, используя формулы (3.8), (П.4), (П.11), (П.12) и (П.14), получаем

$$[\alpha_m^{(-)},\, B_n] = -\frac{1}{p_+}\sum_p (n+p)\,\mathcal{M}^{-1}_{m,p-n}\, B_p,$$
$$[\alpha_m^{(-)},\, \bar{B}_n] = 0, \quad m \neq 0,$$
$$[\alpha_0^{(-)}, B_n] = -\frac{n}{p_+}B_n,$$
$$[\alpha_0^{(-)}, \bar{B}_n] = -\frac{n}{p_+}\bar{B}_n. \tag{3.15}$$

Из формул (3.13)–(3.15), а также (3.9) и (3.12) непосредственно следует, что переменные

$$\tilde{\alpha}_m^{(-)} = \alpha_m^{(-)} - \frac{1}{p_+}\sum_{p,q}\mathcal{M}^{-1}_{m,p+q}\left(A_pA_q - \frac{p-q}{2}B_pB_q\right),$$
$$m \neq 0,$$
$$\tilde{\alpha}_0^{(-)} \equiv \tilde{\bar{\alpha}}_0^{(-)} = \alpha_0^{(-)} - \frac{1}{2p_+}\times$$
$$\times \sum_p \{A_pA_{-p} + \bar{A}_p\bar{A}_{-p} + p(B_{-p}B_p + \bar{B}_{-p}\bar{B}_p) + 2M^2\} \tag{3.16}$$

коммутируют со всеми операторами $A_n, \bar{A}_n, B_n, \bar{B}_n$:

$$[\tilde{\alpha}_m^{(-)}, A_n] = [\tilde{\alpha}_m^{(-)}, \bar{A}_n] = [\tilde{\alpha}_m^{(-)}, B_n] =$$
$$= [\tilde{\alpha}_m^{(-)}, \bar{B}_n] = 0. \tag{3.17}$$

Число M^2 в фигурной скобке в (3.16) можно воспринимать также как результат нормального упорядочения (ср. с (2.14)).

Если в формулах (3.13)–(3.17) все величины без черты заменить на такие же величины с чертой и одновременно все величины с чертой заменить на такие же величины без черты, то эти формулы останутся справедливыми.

Теперь определим нормальное упорядочение операторов рождения и уничтожения (3.7), (3.8). Эти операторы по определению считаются нормально упорядоченными, если все операторы рождения $A_{-|n|}$, $\bar{A}_{-|n|}$, $B_{-|n|}$, $\bar{B}_{-|n|}$ расположены левее всех операторов уничтожения $A_{|n|}, \bar{A}_{|n|}, B_{|n|}, \bar{B}_{|n|}$.

Правые части равенств (3.16) содержат квадратичные формы относительно операторов (3.7) и (3.8). Эти квадратичные формы представлены в виде сумм, которые не являются нормально упорядоченными. Однако правые части равенств (3.16) в действительности можно считать нормально упорядоченными, поскольку имеют место равенства

$$\sum_{p,q}\mathcal{M}^{-1}_{m,p+q}\left(A_p\,A_q - \frac{p-q}{2}\,B_p\,B_q\right) =$$
$$=: \sum_{p,q}\mathcal{M}^{-1}_{m,p+q}\left(A_p\,A_q - \frac{p-q}{2}\,B_p\,B_q\right):. \tag{3.18}$$

Для доказательства равенств (3.18) достаточно установить, что

$$\sum_p (A_pA_{-p} + pB_{-p}B_p) = \sum_p :(A_p\,A_{-p} + pB_{-p}B_p):=$$
$$=: \sum_p (A_p\,A_{-p} + p\,B_{-p}\,B_p):. \tag{3.19}$$

Первое равенство в (3.19) непосредственно следует из определения упорядочения и коммутационных соотношений (3.9). Для доказательства второго равенства в (3.19) следует учесть, что формально

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = \zeta(-1),$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}. \tag{3.20}$$

Дзета-функция имеет единственное аналитическое продолжение в точку $s = -1$, причем $\zeta(-1) = -1/12$. Указанная регуляризация расходящейся суммы $\sum_{n=1}^{\infty} n$ в настоящее время общепринята. Поэтому можно положить, что

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} n\right) = \zeta(-1) - \zeta(-1) = 0.$$

Здесь первая расходящаяся сумма возникает в результате упорядочения бозонных операторов, а вторая — фермионных. Отсюда следует второе равенство в (3.19).

Таким образом, правые части равенств (3.16) можно считать в равной степени как нормально упорядоченными относительно операторов (3.7)и (3.8), так и неупорядоченными и записанными в форме сумм, имеющихся в (3.16). Для некоторых вычислений неупорядоченный вариант правых частей (3.16) является более удобным.

Теперь докажем следующие коммутационные соотношения:

$$[\tilde{\alpha}_m^{(-)}, \tilde{\alpha}_n^{(-)}] = [\tilde{\bar{\alpha}}_m^{(-)}, \tilde{\bar{\alpha}}_n^{(-)}] = [\tilde{\alpha}_m^{(-)}, \tilde{\bar{\alpha}}_n^{(-)}] = 0. \quad (3.21)$$

Пусть $m \neq 0$ и $n \neq 0$. Возьмем переменные $\tilde{\alpha}_m^{(-)}$ в представлении (3.16). Тогда

$$[\tilde{\alpha}_m^{(-)}, \tilde{\alpha}_n^{(-)}] = [\tilde{\alpha}_m^{(-)}, \alpha_n^{(-)}] - \frac{1}{p_+} \times \\ \times \sum_{p,q} [\tilde{\alpha}_m^{(-)}, \mathcal{M}_{n,p+q}^{-1}] \left(A_p A_q - \frac{p-q}{2} B_p B_q \right). \quad (3.22)$$

Здесь мы воспользовались определением (3.16) для $\tilde{\alpha}_n^{(-)}$ и коммутационными соотношениями (3.17). В правой части (3.22) вместо $\tilde{\alpha}_m^{(-)}$ подставим его значение согласно (3.16)

$$[\tilde{\alpha}_m^{(-)}, \tilde{\alpha}_n^{(-)}] = \frac{1}{p_+} \times \\ \times \sum_{p,q} \{ [\tilde{\alpha}_n^{(-)}, \mathcal{M}_{m,p+q}^{-1}] - [\tilde{\alpha}_m^{(-)}, \mathcal{M}_{n,p+q}^{-1}] \} \times \\ \times \left(A_p A_q - \frac{p-q}{2} B_p B_q \right) + \frac{1}{p_+} \times \\ \times \sum_{p,q} \mathcal{M}_{m,p+q}^{-1} \left\{ [\alpha_n^{(-)}, A_p A_q] - \frac{p-q}{2} [\alpha_n^{(-)}, B_p B_q] \right\}.$$

При помощи формул (П.17), (3.13), (3.15) после переобозначения индексов в некоторых суммах преобразуем последнее выражение к виду

$$\frac{1}{p_+^2} \left\{ \sum_{p,q} \left[2m\, \mathcal{M}_{-(p+q),-(m+n)} \times \right.\right. \\ \times \left(A_p A_q - \frac{p-q}{2} B_p B_q \right) - \\ - 2 \sum_r r \mathcal{M}_{m,q+r}^{-1} \mathcal{M}_{n,p-r}^{-1} A_p A_q + \\ \left.\left. + \frac{1}{2} \sum_r (r+p)(r-q) \mathcal{M}_{m,q+r}^{-1} \mathcal{M}_{n,p-r}^{-1} B_p B_q \right] \right\} - \\ - \frac{1}{p_+^2} \{ m \leftrightarrow n \}. \quad (3.23)$$

Здесь части сумм по r, антисимметричные по индексам m и n, находятся при помощи соотношений (П.18). В результате все слагаемые в (3.23) взаимно сокращаются. Таким образом, мы доказали, что коммутатор (3.22) равен нулю. Соотношения

$$[\tilde{\bar{\alpha}}_m^{(-)}, \tilde{\bar{\alpha}}_n^{(-)}] = 0, \quad m \neq 0, \quad n \neq 0,$$

доказываются точным повторением уже проведенных выкладок.

Аналогично устанавливается, что

$$[\tilde{\alpha}_0^{(-)}, \tilde{\alpha}_m^{(-)}] = [\tilde{\alpha}_0^{(-)}, \tilde{\bar{\alpha}}_m^{(-)}] = 0.$$

Равенства

$$[\tilde{\alpha}_m^{(-)}, \tilde{\bar{\alpha}}_n^{(-)}] = 0, \quad m \neq 0, \quad n \neq 0$$

тривиально вытекают из фундаментальных перестановочных соотношений (3.4), (3.5) и определений (3.16). Тем самым справедливость коммутационных соотношений (3.21) доказана полностью. Кроме того, из определений (3.16) и коммутационных соотношений (3.12) имеем

$$[\alpha_m^{(+)}, \tilde{\alpha}_n^{(-)}] = [\bar{\alpha}_m^{(+)}, \tilde{\bar{\alpha}}_n^{(-)}] = -2m\, \delta_{m+n}, \\ [x_+, \tilde{\alpha}_n^{(-)}] = [\tilde{x}_-, \tilde{\alpha}_n^{(+)}] = -2i\, \delta_n. \quad (3.24)$$

Явный вид новой переменной $\tilde{x}_-$ здесь не выписывается, поскольку эта переменная ниже не используется.

Исходные переменные $\{x_\pm, \alpha_m^{(\pm)}, \bar{\alpha}_m^{(\pm)}, \alpha_m, \bar{\alpha}_m, \beta_m, \bar{\beta}_m\}$ (точнее, их линейные комбинации) являются каноническими. Из коммутационных соотношений (3.9), (3.12), (3.17) и (3.21) следует вывод, что набор переменных

$$\{x_+, \tilde{x}_-, \alpha_m^{(+)}, \tilde{\alpha}_m^{(-)}, \bar{\alpha}_m^{(+)}, \tilde{\bar{\alpha}}_m^{(-)}, A_m, \bar{A}_m, B_m, \bar{B}_m\} \quad (3.25)$$

также является каноническим.

Теперь мы можем определить унитарное преобразование, входящее в (1.21). Определим унитарный оператор U при помощи следующих равенств:

$$U\, x_+ = x_+ U, \quad U\, x_- = \tilde{x}_- U, \\ U\, \alpha_m^{(+)} = \alpha_m^{(+)} U, \quad U\, \alpha_m^{(-)} = \tilde{\alpha}_m^{(-)} U, \\ U\, \alpha_m = A_m U, \quad U\, \beta_m = B_m U, \\ U\, \bar{\alpha}_m^{(+)} = \bar{\alpha}_m^{(+)} U, \ldots \quad (3.26)$$

и так далее для остальных операторов с чертой. Известно, что равенства вида (3.26) однозначно определяют линейный оператор U и этот оператор унитарен [11].

Мы должны выразить операторы (3.6) через новые переменные. Для этого представим операторы $L_n^{(0)}$ из (3.6) в виде (2.13) и выразим операторы $\alpha_m^{(-)}, \alpha_m, \beta_m$ через операторы $x_+, \alpha_m^{(+)}, \tilde{\alpha}_m^{(-)}, A_m, B_m$ при помощи формул (3.7), (3.8) и (3.16). В результате несложных вычислений с использованием правил сумм (П.20) и (П.21) мы приходим к следующим формулам:

$$L_n = -\frac{1}{2}\sum_m \alpha^{(+)}_{n-m}\,\tilde{\alpha}^{(-)}_m + \frac{1}{4p_+}\,\alpha^{(+)}_n\,\mathcal{N},$$
$$\bar{L}_n = -\frac{1}{2}\sum_m \bar{\alpha}^{(+)}_{n-m}\,\tilde{\bar{\alpha}}^{(-)}_m - \frac{1}{4p_+}\,\bar{\alpha}^{(+)}_n\,\mathcal{N}, \tag{3.27}$$
$$\mathcal{N} = \sum_l \left\{A_{-l}\,A_l - \bar{A}_{-l}\,\bar{A}_l + l\,(B_{-l}\,B_l - \bar{B}_{-l}\,\bar{B}_l)\right\}.$$

Повторяя рассуждения, проведенные для доказательства (3.19), приходим к равенству

$$\mathcal{N} =: \mathcal{N} : . \tag{3.28}$$

В справедливости равенств (3.27) можно убедиться и более простым путем. Для этого следует вычислить коммутаторы операторов (3.7), (3.8), (3.16) с операторами L_n в представлениях (3.6) и (3.27). Результаты этих вычислений совпадают.

При помощи (3.26) и (3.27) находим, что

$$L_n = U\left\{L^{(0)}_n + \frac{1}{2p_+}\,\alpha^{(+)}_n\,\mathcal{N}_0\right\}U^\dagger,$$
$$\bar{L}_n = U\left\{\bar{L}^{(0)}_n - \frac{1}{2p_+}\,\bar{\alpha}^{(+)}_n\,\mathcal{N}_0\right\}U^\dagger, \tag{3.29}$$
$$\mathcal{N}_0 = \sum_{l>0}[\alpha_{-l}\alpha_l - \bar{\alpha}_{-l}\bar{\alpha}_l + l\,(\beta_{-l}\,\beta_l - \bar{\beta}_{-l}\,\bar{\beta}_l)].$$

Соотношения (3.29) являются точным вариантом соотношений (1.20). Хотя формулы (3.29) имеют несколько более сложный вид, чем формулы (1.20), имеется возможность дальнейшего развития нового метода квантования, основанного на положениях, сформулированных в конце Введения.

Обратим внимание на то, что используемые здесь операторы (3.7), (3.8) существенно отличаются от «гравитационно обработанных» операторов в работе [2]. Для операторов (3.7), (3.8) имеем

$$[A_m,\, L_n] = \frac{m}{2p_+}\,\alpha^{(+)}_n\,A_m \tag{3.30}$$

и так далее. Подчеркнем, что невозможно построить набор операторов, линейно выражающихся через операторы материальных полей и при этом коммутирующих со всеми операторами L_n и $\bar{L}_n$. (Аналогичная ситуация имеет место в теории замкнутой струны, когда поперечные степени свободы описываются DDF-операторами.) В работе [2] был применен другой подход к изучаемой модели: были введены новые операторы L'_n и $\bar{L}'_n$, отличающиеся от операторов L_n и $\bar{L}_n$ на величины, пропорциональные постоянной Планка. Операторы L'_n и $\bar{L}'_n$ имеют ту же алгебру, что и операторы L_n и $\bar{L}_n$. В то же время существует полный набор «гравитационно обработанных» операторов $\{C_n,\, \bar{C}_n\}$, описывающих степени свободы материальных полей и линейно связанных с ними, а также коммутирующих со всеми операторами L'_n и $\bar{L}'_n$. Этот факт упрощает формальную процедуру квантования. Однако при этом возникают существенные трудности при попытке выразить исходные динамические переменные через те операторы, в терминах которых происходит квантование.

В настоящей работе, в отличие от работы [2], представлены явные формулы, при помощи которых исходные переменные выражаются через новые переменные (см. (3.16)). Это дает возможность вычислить матричные элементы метрического тензора (1.2) (см. разд. 5).

4. ПРОСТРАНСТВО ФИЗИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ

Формулы, полученные в разд. 2 и 3, позволяют провести квантование изучаемой модели.

Благодаря существованию унитарного преобразования со свойствами (3.26) и (3.29), можно утверждать, что пространство состояний системы (3.6) изоморфно пространству состояний двух невзаимодействующих систем: чистой гравитации и свободных полей (3.1), (3.2). Имея в виду это унитарное преобразование, построим пространство физических состояний сразу в теории со взаимодействием.

Сначала применим первый метод квантования. Для этого определим два семейства состояний при помощи формул (ср. с (2.19))

$$\tilde{\alpha}^{(-)}_m\,|\,k\pm\,\rangle_D = \tilde{\bar{\alpha}}^{(-)}_m\,|\,k\pm\,\rangle_D = 0,\quad m = 0,\,\pm 1,\dots, \tag{4.1}$$

$$A_n\,|\,k\pm\,\rangle_D = \bar{A}_n\,|\,k\pm\,\rangle_D = B_n\,|\,k\pm\,\rangle_D = \bar{B}_n\,|\,k\pm\,\rangle_D = 0,\qquad n>0. \tag{4.2}$$

Наложим также условие

$$A_0\,|\,k\pm\,\rangle_D = \bar{A}_0\,|\,k\pm\,\rangle_D = 0,$$

которое не является обязательным и используется лишь для упрощения формул. Кроме того, мы полагаем, что выполнены соотношения (2.21) и (2.22).

Теперь становится ясной причина, по которой в формулы (2.14) и (3.16) была введена величина $M^2>0$: вследствие этого условия и условия (4.1) с $m=0$ оператор p_+ не имеет нулевых собственных значений в физическом пространстве H_{PD}. Поэтому унитарное преобразование (3.26) определено корректно, и на состояния $|\,k\pm\,\rangle_D$ действительно можно действовать операторами A_n.

Все физические состояния являются линейными комбинациями базисных состояний вида

$$\begin{aligned}
&|k\pm;n_i,\bar{n}_i,m_i,\bar{m}_i\,\rangle_D = \\
&= (A_{-n_1}\dots\bar{A}_{-\bar{n}_1}\dots B_{-m_1}\dots\bar{B}_{-\bar{m}_1}\dots)\times \\
&\times|\,k\pm\,\rangle_D\in H^{(\pm)}_{PD},\quad n_i,\,\bar{n}_i,\,m_i,\,\bar{m}_i>0,
\end{aligned}\tag{4.3}$$

$$\left(\sum_i n_i+\sum_i m_i-\sum_i\bar{n}_i-\sum_i\bar{m}_i\right)=0. \tag{4.4}$$

Полное пространство физических состояний представляется в виде прямой суммы

$$H_{PD}=H^{(+)}_{PD}\oplus H^{(-)}_{PD}. \tag{4.5}$$

Вследствие соотношений (4.1), (4.4) и (3.9) имеем

$$\mathcal{N}\,|\,\rangle_P=0,\qquad |\,\rangle_P\in H_{PD}. \tag{4.6}$$

Теперь при помощи (3.27), (4.1), (4.2) и (4.6) получаем

$$L_n\,|\,\rangle_P=\bar{L}_n\,|\,\rangle_P=0. \tag{4.7}$$

Из коммутационных соотношений (3.9) и равенств (4.2), (2.22) вытекает, что скалярное произведение в пространствах $H^{(+)}_{PD}$ и $H^{(-)}_{PD}$ положительно определено и эти пространства взаимно ортогональны.

Сказанное означает, что проведено безаномальное квантование системы (3.6) при помощи первого метода.

Теперь применим второй метод квантования. По определению пространство состояний порождается двумя сериями состояний $|\,z,\,\bar{z}\pm\,\rangle_P$ со следующими свойствами. Состояния $|\,z,\,\bar{z}\pm\,\rangle_P$ удовлетворяют уравнениям (2.28), (4.2), а также (ср. с (2.31)) равенствам

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,(\alpha^{(+)}_{-m}+\tilde{\alpha}^{(-)}_{-m})\,|\,z,\,\bar{z}\pm\,\rangle_P=\pm z^0_{-m}\,|\,z,\,\bar{z}\pm\,\rangle_P, \\
&\frac{1}{2}(\alpha^{(+)}_{m}-\tilde{\alpha}^{(-)}_{m})|z,\bar{z}\pm\rangle_P=\pm z^1_m|z,\bar{z}\pm\rangle_P,\quad m>0,
\end{aligned}\tag{4.8}$$

и аналогично для величин с чертой.

Из (2.28) следует, что

$$\tilde{\alpha}^{(-)}_0\,|\,z,\,\bar{z}\pm\,\rangle_P=0. \tag{4.9}$$

Базисные состояния в физическом пространстве обозначаются $|\,z,\,\bar{z}\pm;\;n_i,\,\bar{n}_i,\,m_i,\,\bar{m}_i\,\rangle_P$. Они строятся при помощи операторов $A_{-m},\dots,m>0$ согласно (4.3) и (4.4). Пространство физических состояний H_P разлагается в прямую сумму ортогональных подпространств $H^{(+)}_P$ и $H^{(-)}_P$. Скалярное произведение в пространстве H_P положительно определено.

Вследствие коммутационных соотношений (3.12) и (3.17) уравнения (4.8) и (4.9) остаются справедливыми также для физических состояний, если физические состояния являются «чистыми» по отношению к калибровочным степеням свободы. Здесь мы понимаем под «чистотой» то, что все физические состояния имеют один и тот же набор параметров $\{z^a_m,\,\bar{z}^a_m\}$.

Мы не станем подробно доказывать, что в рассматриваемом случае удовлетворяются условия квантования (2.9) и (2.10). Это непосредственно следует из всего изложенного выше. Здесь мы лишь подчеркнем следующий важный факт: усреднение в (2.9) и в (2.10) достаточно проводить лишь в пространстве калибровочных степеней свободы H_G (см. (2.17), (2.18)); по переменным, описываемым операторами $A_m,\bar{A}_m,\,B_m,\bar{B}_m$, усреднения в (2.9) и (2.10) проводить не требуется.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ

В изучаемой модели наиболее интересной величиной является среднее значение метрического тензора (1.2) относительно физических состояний. Для этого, согласно (1.2), следует вычислить среднее выражения $\exp(2\rho)$, поскольку параметры u и v являются числовыми множителями Лагранжа.

Чтобы начать вычисления, предположим, что формулы (1.15), справедливые в классической теории, имеют место также и в квантовой теории. Это предположение позволяет представить искомую величину через квантовые поля π^a,r^a (2.2) следующим образом:

$$\frac{\lambda}{\pi\,G}\,e^{2\rho}=\pi_a\pi^a-r'_ar^{a\prime}+2\,(\pi^0\,r^{1\prime}-\pi^1\,r^{0\prime}).$$

С учетом (2.2) это равенство переписывается в удобном для нас виде:

$$\begin{aligned}
e^{2\rho(\sigma)}=-\frac{G}{\lambda}\left(\sum_m\alpha^{(+)}_m e^{im\sigma}\right)\times \\
\times\left(\sum_n\bar{\alpha}^{(-)}_n e^{-im\sigma}\right).
\end{aligned}\tag{5.1}$$

В (5.1) переменные $\bar{\alpha}^{(-)}_n$ должны быть выражены через новые переменные $\bar{\alpha}^{(+)}_n$, $\tilde{\bar{\alpha}}^{(-)}_n$ и $\bar{A}_m,\bar{B}_m,A_m,\,B_m$ в соответствии с (3.16). После этого можно проводить вычисления средних значений выражения (5.1), используя результаты предыдущего раздела.

В правой части (5.1) все переменные в первой круглой скобке коммутируют со всеми переменными во второй круглой скобке. Учитывая этот факт и результаты разд. 4, можно утверждать, что при вычислении средних относительно базисных векторов справедлива формула

$$\langle\, e^{2\,\rho}\,\rangle = -\frac{G}{\lambda}\left\langle\sum_m \alpha_m^{(+)}\, e^{im\sigma}\right\rangle \times \\ \times\left\langle\sum_n \bar{\alpha}_n^{(-)}\, e^{-im\sigma}\right\rangle. \qquad (5.2)$$

Для вычисления средних в выражении (5.2) применим второй метод квантования. Сначала вычислим средние относительно основного состояния $|\,z,\,\bar{z}+\rangle_P$. Представим переменные $\alpha_m^{(+)}$ в виде

$$\alpha_m^{(+)} = a_m^0 + a_m^1, \quad a_m^0 = \frac{1}{2}\,(\alpha_m^{(+)} + \tilde{\alpha}_m^{(-)}), \\ a_m^1 = \frac{1}{2}\,(\alpha_m^{(+)} - \tilde{\alpha}_m^{(-)}) \qquad (5.3)$$

и воспользуемся формулами (4.8) и (2.28). Таким образом, получаем

$$\langle\, z,\,\bar{z}+\,|\,\sum_m \alpha_m^{(+)}\, e^{im\sigma}\,|\,z,\,\bar{z}+\rangle_P = \sum_m z_m^{(+)}\, e^{im\sigma}. \qquad (5.4)$$

Аналогично находим

$$\langle\, z,\,\bar{z}+\,|\,\sum_n \tilde{\bar{\alpha}}_n^{(-)}\, e^{-in\sigma}\,|\,z,\,\bar{z}+\rangle_P = \sum_n \tilde{\bar{z}}_n^{(-)}\, e^{-in\sigma}. \qquad (5.5)$$

Из (3.16), (3.18) и (4.2) следует, что

$$\langle\, z,\,\bar{z}+\,|\,(\bar{\alpha}_n^{(-)} - \tilde{\bar{\alpha}}_n^{(-)})\,|\,z,\,\bar{z}+\rangle_P = 0. \qquad (5.6)$$

Комбинируя формулы (5.2), (5.4), (5.5), (5.6) и (2.29′), получаем

$$\langle z,\bar{z}+|e^{2\rho(\sigma)}|z,\bar{z}+\rangle_P = -\frac{2\pi G}{\lambda} z^{(+)}(\sigma)\tilde{\bar{z}}^{(-)}(\sigma). \qquad (5.7)$$

Для нахождения более сложных матричных элементов необходимо провести дополнительные вычисления.

В силу (П.2) имеем

$$u^l = z^l\,\exp\left(il\,\frac{x_+}{2p_+}\right)\,\exp(\xi_+ + \xi_-), \\ \xi_+ = \frac{l}{p_+}\sum_{m>0}\frac{1}{m}\,(-z^{-m}\,a_m^0 + z^m\,a_{-m}^1), \\ \xi_- = \frac{l}{p_+}\sum_{m>0}\frac{1}{m}\,(z^m\,a_{-m}^0 - z^{-m}\,a_m^1). \qquad (5.8)$$

Здесь a_m^0 и a_m^1 задаются в соответствии (5.3). Вследствие соотношений (4.8) при вычислении матричных элементов необходимо так упорядочить операторы в (5.8), чтобы функции от величины ξ_+ оказались левее функций от величины ξ_-. Этого легко достичь, поскольку коммутатор

$$\frac{1}{2}\,[\xi_+,\,\xi_-] = \left(\frac{l}{p_+}\right)^2\sum_{m>0}\frac{1}{m} \qquad (5.9)$$

является c-числом, коммутирующим с ξ_+ и ξ_-. Тогда, используя известную формулу Бейкера—Хаусдорфа, получаем

$$u^l = \exp\left[-\left(\frac{l}{p_+}\right)^2\sum_{m>0}\frac{1}{m}\right]z^l \times \\ \times\exp\left(il\,\frac{x_+}{2p_+}\right)e^{\xi_+}\,e^{\xi_-}. \qquad (5.10)$$

Теперь средние значения выражения (5.10) вычисляются при помощи соотношений (4.8):

$$\langle\, z,\,\bar{z}+\,|\,u^l\,|\,z,\,\bar{z}+\rangle_P \sim \exp\left[-\left(\frac{l}{p_+}\right)^2\sum_{m>0}\frac{1}{m}\right] \times \\ \times\exp\left(-\frac{l}{p_+}\sum_{n\neq 0}\frac{z_n^{(+)}}{n}\,z^{-n}\right). \qquad (5.11)$$

Так как в правой части (5.11) показатель первой экспоненты есть бесконечно большое отрицательное число, то среднее значение (5.11) равно нулю. Это означает, что при вычислении матричных элементов под знаком среднего элементы матрицы $\mathcal{M}_{n,l}^{-1}$ фактически оказываются отличными от нуля лишь при $l = 0$. Указанный факт, относящийся в равной степени к элементам матрицы $\bar{\mathcal{M}}_{n,l}^{-1}$, существенно упрощает вычисления. При помощи (П.9) и (П.10) получаем

$$\mathcal{M}_{n,0}^{-1} = \frac{\bar{\alpha}_n^{(+)}}{p_+}. \qquad (5.12)$$

Учитывая сказанное выше, а также формулу (П.12), заметим, что при вычислении матричных элементов следует пользоваться соотношениями

$$\bar{\alpha}_m^{(-)} = \tilde{\bar{\alpha}}_m^{(-)} + \frac{\bar{\alpha}_m^{(+)}}{p_+^2} \times \\ \times :\sum_p (\bar{A}_{-p}\,\bar{A}_p + p\,\bar{B}_{-p}\,\bar{B}_p):, \quad m\neq 0, \qquad (5.13)$$

и второй формулой (3.16) (при $m = 0$). Используя (5.2), (5.4) и (5.13), вычислим диагональный матричный элемент метрического тензора относительно базисного состояния $|\,p\,\rangle = |\,z,\bar{z}+;\,n_i,\,\bar{n}_i,\,m_i,\,\bar{m}_i\,\rangle$ вида (4.3), (4.4):

$$\langle\,p\,|\,e^{2\rho(\sigma)}\,|\,p\,\rangle = -\frac{2\pi\,G}{\lambda}\,z^{(+)}(\sigma)\,\times \\ \times\left\{\tilde{\bar{z}}^{(-)}(\sigma) + \frac{\bar{z}^{(+)}(\sigma)}{(z_0^{(+)})^2}\left(\sum_i n_i + \sum_i m_i\right)\right\}. \qquad (5.14)$$

Функции $z^{(+)}(\sigma)$, $\bar{z}^{(+)}(\sigma)$ и $\tilde{\bar{z}}^{(-)}(\sigma)$ удовлетворяют $(2.29')$. При выводе формулы (5.14) мы воспользовались равенством (4.4) и считали, что базисный вектор нормирован.

Дальнейшее вычисление средних величин, их изучение и интерпретация не входят в задачи настоящей работы.

Вычисление матричных элементов от метрического тензора при помощи первого метода наталкивается на серьезные трудности. Действительно, переменные $\alpha_m^{(+)}$ не являются операторами в физическом пространстве состояний H_{PD}. Поэтому средние вида

$$\left\langle \sum_m \alpha_m^{(+)} e^{im\sigma} \right\rangle_{PD}, \quad \left\langle \sum_m \bar{\alpha}_m^{(+)} e^{-im\sigma} \right\rangle_{PD} \tag{5.15}$$

не определены. В силу условий квантования (4.1) и (4.2) можно было бы допустить, что среднее (5.2) равно нулю, если матричный элемент вычисляется относительно порождающих состояний $|\,k\pm\,\rangle_D$. Однако это не спасает общую ситуацию, поскольку при вычислении матричных элементов относительно возбужденных состояний приходится вычислять средние вида (5.15) (см. (5.12) и (5.14)).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье применены два метода квантования к теории двумерной гравитации. Первый метод, реализующий подход Дирака, позволяет провести квантование до конца. Это означает

а) построение пространства физических состояний с положительно определенным скалярным произведением;

б) явное выражение величин, имеющих физический смысл, через те операторы, при помощи которых строится пространство физических состояний.

Однако вычислить средние значения метрического тензора при помощи первого метода не удается по принципиальным причинам. Это утверждение справедливо по меньшей мере в том случае, когда пространство физических состояний строится при помощи операторов $A_n, B_n, \ldots$, определенных в разд. 3.

При втором методе квантования кроме задач а) и б) удается решить также следующую задачу:

в) вычисление средних значений метрического тензора относительно физических состояний.

На основании полученных результатов, можно сделать вывод, что второй метод квантования целесообразно применять в дальнейшем при изучении других моделей.

В заключение сделаем следующее замечание.

Модель (3.6) может быть без труда проквантована в калибровке «светового конуса». На применяемом в настоящей статье языке использование этой калибровки означает наложение связей второго рода:

$$\alpha_m^{(+)} = 0, \quad \tilde{\alpha}_m^{(-)} = 0, \quad \bar{\alpha}_m^{(+)} = 0, \quad \tilde{\bar{\alpha}}_m^{(-)} = 0, \quad m \neq 0. \tag{6.1}$$

При этом, согласно (5.2) и (5.6), среднее значение метрического тензора относительно основного состояния равно нулю. С другой стороны, при втором методе квантования, согласно (5.7) и $(2.29')$, среднее метрического тензора относительно основного состояния, вообще говоря, не равно нулю. Отсюда видно, что наложения специальных калибровочных условий, упрощающих решение проблемы квантования, по возможности следует избегать. Действительно, в нашем случае наложение связей (6.1) приводит к существенному обеднению полученных результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы ВНШ (грант № 96-1596821).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть τ — некий «времениподобный» параметр и $z = e^{i\tau}$. Введем в рассмотрение следующие операторные функции:

$$\begin{aligned} q(\tau) \equiv q(z) &= \frac{x_+}{2p_+} + \frac{1}{i}\ln z + \\ &+ \frac{i}{p_+}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^{(+)} z^{-n}, \\ \bar{q}(\tau) \equiv \bar{q}(z) &= \frac{x_+}{2p_+} + \frac{1}{i}\ln z + \\ &+ \frac{i}{p_+}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\bar{\alpha}_n^{(+)} z^{-n}. \end{aligned} \tag{П.1}$$

По определению

$$u(z) \equiv e^{i\,q(z)} = z\,\exp\left(i\frac{x_+}{2p_+}\right)\times \times \exp\left(-\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n^{(+)}}{np_+}z^{-n}\right), \quad \bar{u}(z) \equiv e^{i\,\bar{q}(z)}. \tag{П.2}$$

Пусть контур C в плоскости комплексной переменной z один раз обходит точку $z = 0$ против часовой стрелки. Определим четыре бесконечномерные матрицы согласно формулам

$$\mathcal{M}_{m,n} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{dz}{z} z^{-n} u^m, \tag{П.3}$$

$$^F\mathcal{M}_{m,n} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{dz}{z} z^{-n} u^m \sqrt{\dot{q}}. \tag{П.4}$$

Определения матриц $\bar{\mathcal{M}}_{m,n}$ и $^F\bar{\mathcal{M}}_{m,n}$ получаются из определений (П.3) и (П.4) путем замены $q \to \bar{q}$, $u \to \bar{u}$. Здесь и далее

$$\dot{q} = \frac{d}{d\tau} q = iz \frac{d}{dz} q = 1 + \frac{1}{p_+} \sum_{n\neq 0} \alpha_n^{(+)} z^{-n}. \tag{П.5}$$

Обратим внимание на то, что все величины (П.1)–(П.5) следует рассматривать как формальные ряды относительно элементов свободной ассоциативной коммутативной инволютивной алгебры $\mathcal{A}^{(+)}$ с образующими $\{x_+/p_+, \alpha_m^{(+)}/p_+, \ \bar{\alpha}_m^{(+)}/p_+\}$. Это положение остается справедливым до тех пор, пока не проводится вычисление каких-либо средних относительно физических состояний. Коэффициенты при мономах относительно образующих алгебры $\mathcal{A}^{(+)}$ в разложениях величин (П.1)–(П.5) являются конечными полиномами относительно z и z^{-1}. Поэтому интегралы в (П.3) и (П.4) определены корректно. Тем самым матричные элементы матриц (П.3) и (П.4) принадлежат алгебре $\mathcal{A}^{(+)}$.

Из (П.2) имеем

$$\operatorname*{var}_C \ln u(z) = \operatorname*{var}_C \ln z - \operatorname*{var}_C \left(\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} \frac{\alpha_n^{(+)}}{p_+} z^{-n} \right).$$

Здесь $\mathrm{var}_C\, F(z)$ означает изменение функции $F(z)$ (вообще говоря, неоднозначной вдоль контура C) при однократном обходе контура C против часовой стрелки. При таком определении контура второе слагаемое в правой части последнего равенства вклада не дает, и мы имеем

$$\operatorname*{var}_C \ln u(z) = \operatorname*{var}_C \ln z = 2\pi i. \tag{П.6}$$

Из (П.2) и (П.5) находим

$$\frac{du(z)}{dz} = \frac{u(z)}{z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_n^{(+)}}{p_+} z^{-n} \neq 0. \tag{П.7}$$

Последнее неравенство является следствием того факта, что в алгебре $\mathcal{A}^{(+)}$ отсутствуют какие-либо соотношения кроме тех, которые вытекают из ее коммутативности.

Образ контура C в алгебре $\mathcal{A}^{(+)}$ при отображении (П.2) обозначим C^*.

Отображение (П.2) может быть обращено. Это является следствием неравенства (П.7). Указанное обращение означает, что существует аналитическая функция $z(u)$ от переменной u, обращающая уравнение (П.2) в тождество. Функция $z(u)$ является формальным рядом переменных $\{\alpha^{(+)}/p_+\}$. Уравнение (П.2) можно обращать методом итераций относительно степеней переменных $\alpha^{(+)}/p_+$. Пусть

$$z(u) = z^{(0)}(u) + z^{(1)}(u) + \ldots,$$

где

$$z^{(i)}(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n^{(i)} u^{-n},$$

а $z_n^{(i)}$ являются однородными функциями переменных $\alpha^{(+)}/p_+$ степени i. Используя уравнение (П.2), получаем

$$z^{(0)}(u) = u\, e^{-i\delta}, \quad \delta = \frac{x_+}{2p_+},$$

$$z^{(1)}(u) = u\, e^{-i\delta} \sum_{n\neq 0} \frac{\alpha_n^{(+)}}{np_+} (e^{-i\delta} u)^{-n}, \tag{П.8}$$

$$z^{(2)}(u) = u\, e^{-i\delta} \left\{ \frac{1}{2} \left[\sum_{n\neq 0} \frac{\alpha_n^{(+)}}{np_+} (e^{-i\delta} u)^{-n} \right]^2 - \right.$$

$$\left. - \left[\sum_{n\neq 0} \frac{\alpha_n^{(+)}}{p_+} (e^{-i\delta} u)^{-n} \right] \left[\sum_{m\neq 0} \frac{\alpha_m^{(+)}}{mp_+} (e^{-i\delta} u)^{-m} \right] \right\}$$

и т. д. Уравнение (П.2) однозначно определяет каждый следующий член $z^{(i)}(u)$ по предыдущим.

Из (П.6) следует также, что при однократном обходе переменной u по контуру C^* против часовой стрелки переменная z один раз обходит контур C против часовой стрелки. Из сказанного вытекает возможность «переделки» замкнутого интеграла по переменной z вдоль контура C в замкнутый интеграл по переменной u вдоль контура C^* и наоборот. Согласно (П.7) и (П.5)

$$\frac{du}{u} = \frac{dz}{z} \left\{ 1 + \sum_{n\neq 0} \frac{\alpha_n^{(+)}}{p_+} z^{-n} \right\} = \frac{dz}{z} \dot{q}. \tag{П.9}$$

Матрицы, обратные к матрицам (П.3) и (П.4), проще всего представляются в виде

$$\mathcal{M}_{n,l}^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C^*} \frac{du}{u} u^{-l} z^n, \tag{П.10}$$

$$^F\mathcal{M}_{n,l}^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C^*} \frac{du}{u} u^{-l} z^n (\dot{q})^{-1/2}. \tag{П.11}$$

Для доказательства равенств $\mathcal{M}\,\mathcal{M}^{-1} = \mathcal{M}^{-1}\,\mathcal{M} = 1$, ${}^F\mathcal{M}\,{}^F\mathcal{M}^{-1} = {}^F\mathcal{M}^{-1}\,{}^F\mathcal{M} = 1$ используются тождества

$$\left(z\,\frac{d}{dz}\right)^s f(z,\,u(z)) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{dz_1}{z_1}\,f(z_1,\,u(z_1)) \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^s\left(\frac{z}{z_1}\right)^n, \\ \left(u\,\frac{d}{du}\right)^s f(u,\,z(u)) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C^*} \frac{du_1}{u_1}\,f(u_1,\,z(u_1)) \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^s\left(\frac{u}{u_1}\right)^n, \quad s = 0,\,1,\ldots \tag{П.12}$$

В (П.12) функция $f(z,\,u)$ разлагается в ряды Лорана по своим аргументам и интегрирование проводится против часовой стрелки. Тождества (П.12) основаны на очевидных равенствах

$$\oint\limits_C \frac{dz}{z}\,z^n = \oint\limits_{C^*}\frac{du}{u}\,u^n = 2\pi i\,\delta_n.$$

В силу (П.6) и (П.12) при $s = 0$ имеем

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\mathcal{M}_{m,\,l}\,\mathcal{M}^{-1}_{l,\,n} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C^*}\frac{du_1}{u_1}\,u_1^{-n}\,\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C\frac{dz}{z}\,u^m \times \\ \times \sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{z_1}{z}\right)^l = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C^*}\frac{du_1}{u_1}\,u_1^{m-n} = \delta_{m-n}. \tag{П.13}$$

В (П.13) подразумевается, что $u = u(z)$ и $z_1 = z(u_1)$. Таким образом, равенство $\mathcal{M}\,\mathcal{M}^{-1} = 1$ установлено. Аналогично устанавливаются соотношения $\mathcal{M}^{-1}\,\mathcal{M} = 1$, ${}^F\mathcal{M}\,{}^F\mathcal{M}^{-1} = 1$, ${}^F\mathcal{M}^{-1}\,{}^F\mathcal{M} = 1$.

Непосредственно из формул (П.3) и (П.10) вытекает соотношение

$$l\,\mathcal{M}^{-1}_{n,\,l} = n\,\mathcal{M}_{-l,-n}, \tag{П.14}$$

справедливое при всех l и n. Из (П.4), (П.9) и (П.11) получаем

$${}^F\mathcal{M}^{-1}_{n,\,l} = {}^F\mathcal{M}_{-l,-n}. \tag{П.14$'$}$$

Ненулевые коммутаторы $\alpha^{(-)}_m$ и $\bar\alpha^{(-)}_m$ с $u(z)$ и $\bar u(z)$ находятся при помощи (П.2) и (2.12):

$$[\,\alpha^{(-)}_m,\,u(z)] = -\frac{2}{p_+}\,z^m\,u(z), \qquad m \neq 0, \\ [\,\alpha^{(-)}_0,\,u(z)] = -\frac{1}{p_+}\,z^m\,u(z) \tag{П.15}$$

и аналогично для величин с чертой.

Из определений (П.3) и (П.4) с учетом (П.15) следует, что

$$[\,\alpha^{(-)}_m,\,\mathcal{M}_{n,\,l}] = -\frac{2n}{p_+}\,\mathcal{M}_{n,\,l-m}, \\ [\alpha^{(-)}_m,\,{}^F\mathcal{M}_{n,l}] = -\frac{1}{2\pi i p_+}\oint\limits_C\frac{dz}{z}z^{-l+m}u^n \times \\ \times (2n\,(\dot q)^{1/2} + m\,(\dot q)^{-1/2}), \qquad m\neq 0, \\ [\,\alpha^{(-)}_0,\,\mathcal{M}_{n,\,l}] = -\frac{n}{p_+}\,\mathcal{M}_{n,\,l}, \\ [\,\alpha^{(-)}_0,\,{}^F\mathcal{M}_{n,\,l}] = -\frac{n}{p_+}\,{}^F\mathcal{M}_{n,\,l}. \tag{П.16}$$

Коммутационные соотношения (П.16) сохраняют свой вид, если везде в (П.16) подставить величины с чертой. Соотношения (П.16) исчерпывают все ненулевые коммутаторы между величинами $\alpha^{(-)}, \bar\alpha^{(-)}$, $\mathcal{M}, \bar{\mathcal{M}}$, ${}^F\mathcal{M}$, ${}^F\bar{\mathcal{M}}$.

Далее из (П.14) и (П.16) получаем

$$[\,\alpha^{(-)}_m,\,\mathcal{M}^{-1}_{n,\,l}] = \frac{2n}{p_+}\,\mathcal{M}_{-l,\,-(m+n)}, \quad m\neq 0, \\ [\,\alpha^{(-)}_0,\,\mathcal{M}^{-1}_{n,\,l}] = \frac{n}{p_+}\,\mathcal{M}_{-l,\,-n} = \frac{l}{p_+}\mathcal{M}^{-1}_{n,\,l}. \tag{П.17}$$

В разд. 3 используются следующие формулы:

$$\sum_q \mathcal{M}^{-1}_{m,\,l+q}\,\mathcal{M}^{-1}_{n,\,p-q} = \mathcal{M}^{-1}_{(m+n),\,(l+p)}, \tag{П.18а}$$

$$\sum_q q\,\left(\mathcal{M}^{-1}_{m,\,l+q}\,\mathcal{M}^{-1}_{n,\,p-q} - \mathcal{M}^{-1}_{n,\,l+q}\,\mathcal{M}^{-1}_{m,\,p-q}\right) = \\ = (m-n)\,\mathcal{M}_{-(l+p),-(m+n)}, \tag{П.18б}$$

$$\sum_q q^2\,\left(\mathcal{M}^{-1}_{m,\,l+q}\,\mathcal{M}^{-1}_{n,\,p-q} - \mathcal{M}^{-1}_{n,\,l+q}\,\mathcal{M}^{-1}_{m,\,p-q}\right) = \\ = (m-n)\,(p-l)\mathcal{M}_{-(l+p),-(m+n)}. \tag{П.18в}$$

Используя формулы (П.10) и (П.12) при $s = 1$, можно получить, например, следующее соотношение:

$$\sum_{q=-\infty}^{+\infty} q\,\mathcal{M}^{-1}_{m,\,l+q}\,\mathcal{M}^{-1}_{n,\,p-q} = \\ = \frac{1}{2\pi\,i}\oint\limits_{C^*} du\,u^{-p}\,z^n\,\frac{d}{du}(u^{-l}\,z^m). \tag{П.19}$$

Так как нас интересует лишь антисимметричная по индексам m и n часть соотношения (П.19), в его правой части можно вынести u^{-l} из-под знака дифференцирования. Учитывая также, что $(dz/du)\,du = dz$, получаем формулу (П.18б). Остальные формулы ((П.18а) и (П.18в)) доказываются аналогично.

Имеют место также следующие формулы:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{M}^{-1}_{m,s}\,\mathcal{M}^{-1}_{n-m,r} = \\ = \frac{1}{p_+}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha^{(+)}_{n-m}\,\mathcal{M}^{-1}_{m,r+s}, \tag{П.20}$$

$$\sum_l l\left({}^F\mathcal{M}^{-1}_{n-l,\,p}\,{}^F\mathcal{M}^{-1}_{l,\,q} - {}^F\mathcal{M}^{-1}_{n-l,\,q}\,{}^F\mathcal{M}^{-1}_{l,\,p}\right) = \\ = \frac{(q-p)}{p_+}\sum_l \alpha^{(+)}_l\,\mathcal{M}^{-1}_{(n-l),(p+q)}, \tag{П.21}$$

при выводе которых мы воспользовались соотношениями (П.9), (П.10) и (П.12).

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Jackiw, E-print archive gr-qc/9612052.

2. E. Benedict, R. Jackiw, and H.-J. Lee, Phys. Rev. D **54**, 6213 (1996).

3. D. Cangemi, R. Jackiw, and B. Zwiebach, Ann. Phys. (N. Y.) **245**, 408 (1996); D. Gangemi and R. Jackiw, Phys. Lett. B **337**, 271 (1994); Phys. Rev. D **50**, 3913 (1994); D. Amati, S. Elitzur, and E. Rabinovici, Nucl. Phys. B **418**, 45 (1994); D. Louis-Martinez, J. Gegenberg, and G. Kunstatter, Phys. Lett. B **321**, 193 (1994); E. Benedict, Phys. Lett. B **340**, 43 (1994); T. Strobl, Phys. Rev. D **50**, 7346 (1994).

4. С. Н. Вергелес, ЖЭТФ **113**, 1566 (1998).

5. O. Andreev, Phys. Rev. D **57**, 3725 (1998).

6. S. N. Vergeles, E-prints archive hep-th/9906024.

7. P. A. M. Dirac, *Lectures on quantum mechanics*, Yeshiva University, New York (1964).

8. П. А. М. Дирак, *Лекции по квантовой теории поля*, Мир, Москва (1971).

9. E. Del Giudice, P. Di Vecchia, and S. Fubini, Ann. Phys. **70**, 378 (1972).

10. М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен, *Теория суперструн*, Мир, Москва (1990).

11. П. А. М. Дирак, *Принципы квантовой механики*, Наука, Москва (1970).