ЖЭТФ, 2000, том 117, вып. 1, стр. 67–74

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА В ВОДОРОДОПОДОБНОМ РЕЛЯТИВИСТСКОМ АТОМЕ: СВЕРХТОНКАЯ СТРУКТУРА

С. Г. Каршенбойм*

Государственный научный центр
Всероссийский научно-исследовательский институт метрологии им. Д. И. Менделеева
198005, Санкт-Петербург, Россия

В. Г. Иванов

Главная астрономическая обсерватория Российской академии наук
196140, Санкт-Петербург, Россия

В. М. Шабаев

Санкт-Петербургский государственный университет
198904, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 19 июля 1999 г.

Рассматривается вклад поляризации вакуума в сверхтонкое расщепление основного состояния водородоподобного атома. Выражение для поправки к энергии получено в виде явной функции параметра $Z\alpha$. Окончательное выражение, найденное в терминах обобщенных гипергеометрических функций и их производных, представляет собой функцию отношения масс частиц на орбите и в вакуумной петле и, следовательно, справедливо как для обычных, так и для мюонных атомов. Представлены также различные асимптотики.

PACS: 12.20.Ds; 31.30.Jv; 32.10.Fn

1. ВВЕДЕНИЕ

Эффекты поляризации вакуума влияют на уровни энергии в обычных (электронных) и в мюонных атомах. Наиболее важен лэмбовский сдвиг, который в мюонных атомах имеет место в главном приближении в силу упомянутых эффектов (рис. 1*a*). Аналитическое вычисление этой поправки представлено в [1]. Настоящая работа посвящена вкладу в сверхтонкое расщепление основного состояния водородоподобного атома и является непосредственным продолжением работы [1].

Вычисление ведущей поляризационной поправки к сверхтонкому расщеплению — задача более сложная, чем для случая лэмбовского сдвига. Вклад дают однопотенциальная (рис. 1*б*) и двухпотенциальная диаграммы (рис. 1*в*):

$$\Delta E_{hfs} = E_{TU} + E_{UT}\,. \tag{1}$$

Однопотенциальный вклад полностью аналогичен рассмотренному в [1, 2] вкладу в лэмбовский сдвиг, тогда как вклад диаграмм на рис. 1*в*, содержащих потенциал Юлинга и магнитное взаимодействие с кулоновской функцией Грина между ними, оказывается гораздо сложнее [3]. Тем не менее и он может быть вычислен в замкнутом аналитическом виде.

Напомним основные результаты для сверхтонкого расщепления основного состояния водородоподобного электронного и мюонного атомов. В электронном случае известны первые члены разложения по малому параметру $Z\alpha$ [4–6], а для больших значений заряда ядра имеются численные расчеты [7, 8].

Для мюонного атома недавно был получен нерелятивистский результат [9], причем однопотенциальный вклад был найден в аналитическом виде, а двухпотенциальный — в виде однократного интеграла.

Следует отметить, что все указанные расчеты, кроме численных [7, 8], проводились для точечного ядра. Конечно, эффекты распределения заряда и магнитного момента оказываются существенными при увеличении Z. Однако следует отметить, что

*E-mail: ksg@hm.csa.ru

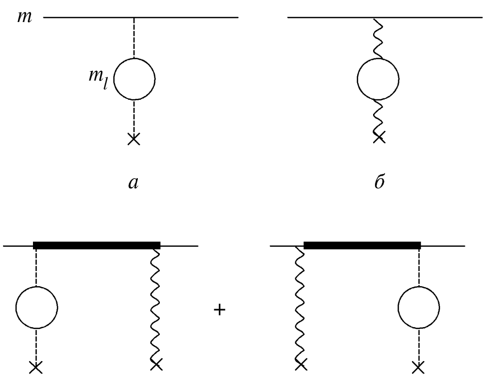

Рис. 1. Вклад поляризации вакуума в энергию. Связанная частица имеет массу m, а частица в поляризационной петле — m_l. Жирная линия отвечает редуцированной функции Грина частицы в кулоновском поле ядра

аналогичные вычисления можно провести и для более возбужденных уровней, для которых такие эффекты не столь важны. В случае электронных атомов наибольший интерес представляют уровни $1s$ и $2s$, для которых мы нашли новые члены разложения при малых значениях параметра $Z\alpha$, актуальные для мюония и водорода. В случае мюонных атомов возможны вычисления для более высоких уровней, поскольку эффекты сверхтонкой структуры в мюонных атомах оказываются более важными, чем в случае обычных атомов.

Работа организована следующим образом: вначале мы обсуждаем общее выражение для однопотенциального вклада, затем — для двухпотенциального. Далее рассматриваем различные асимптотики. В заключение проводится обсуждение результатов и дается сравнение с численными расчетами.

В данной работе мы полностью следуем обозначениям, использованным в [1], и в частности

$$\varepsilon = 1 - \sqrt{1-(Z\alpha)^2}, \quad \kappa = Z\alpha m/m_l,$$

m_l — масса частицы в петле, m — масса связанной частицы, $\hbar = c = 1$.

2. ОБЩЕЕ ВЫРАЖЕНИЕ

2.1. Однопотенциальный вклад

Вычисление однопотенциального вклада (рис. 1*б*) удобно начать с замены в импульсном представлении, отвечающей вставке свободной поляризации вакуума (ср. (4) в [1]):

$$\varepsilon_{abc}\,\frac{q_b\,\mu_c}{\mathbf{q}^2} \to \frac{\alpha}{\pi}\int\limits_0^1 dv\,\frac{v^2(1-v^2/3)}{1-v^2}\,\varepsilon_{abc}\,\frac{q_b\,\mu_c}{\mathbf{q}^2+\lambda^2}\,, \tag{2}$$

где μ — магнитный момент ядра,

$$\lambda(v) = \frac{2\,m_l}{\sqrt{1-v^2}}\,, \tag{3}$$

а частица в петле имеет массу m_l. В координатном представлении замена приобретает вид

$$\varepsilon_{abc}\,\nabla_b\,\mu_c\,\frac{1}{r} \to \frac{\alpha}{\pi}\int\limits_0^1 dv\,\frac{v^2(1-v^2/3)}{1-v^2}\varepsilon_{abc}\,\nabla_b\,\mu_c\,\frac{e^{-\lambda r}}{r}\,. \tag{4}$$

Однопотенциальный вклад определяется соотношением

$$E_{TU} = \frac{\alpha}{\pi}\,E_T\,R_{TU}(\kappa). \tag{5}$$

Здесь E_T — матричный элемент от магнитного обмена без радиационной поправки, найденный для основного состояния в работе [10],

$$E_T(1s) = \frac{E_F}{2\left[1-(Z\alpha)^2\right]-\sqrt{1-(Z\alpha)^2}}\,, \tag{6}$$

где энергия Ферми E_F отвечает нерелятивистскому взаимодействию двух магнитных моментов:

$$E_F = \frac{4}{3}\alpha(Z\alpha)^3\,\frac{\mu}{\mu_N}\,\frac{m}{m_p}\,\frac{2I+1}{2I}\,m\,, \tag{7}$$

μ_N — ядерный магнетон, I — спин ядра, а m_p — масса протона.

В общем случае дипольное магнитное взаимодействие содержит спин-спиновый и спин-орбитальный члены. В случае s-состояний второй член, очевидно, равен нулю, что позволяет значительно упростить выражение для поправки

$$\mathcal{R}_{TU}(\lambda) = \frac{\int\limits_0^\infty dr\,r^2\,f(r)\,g(r)\,\big(\partial/\partial r\big)\big(e^{-\lambda r}/r\big)}{\int\limits_0^\infty dr\,r^2\,f(r)\,g(r)\,\big(\partial/\partial r\big)\big(1/r\big)}\,. \tag{8}$$

Радиальный интеграл легко берется

$$\mathcal{R}_{TU}(\lambda) = \frac{\int\limits_0^\infty dr\, r^2\, e^{-2\gamma r}\, r^{-2\varepsilon} \big(\partial/\partial r\big) \big(e^{-\lambda r}/r\big)}{\int\limits_0^\infty dr\, r^2\, e^{-2\gamma r}\, r^{-2\varepsilon} \big(\partial/\partial r\big) \big(1/r\big)} = \left(\frac{2\gamma}{2\gamma+\lambda}\right)^{1-2\varepsilon} \left[1 + (1-2\varepsilon)\,\frac{\lambda}{2\gamma+\lambda}\right], \tag{9}$$

а возникший однократный интеграл

$$R_{TU}(\kappa) = \int\limits_0^1 dv\, \frac{v^2(1-v^2/3)}{\sqrt{1-v^2}} \left(\frac{\kappa}{1+\kappa\sqrt{1-v^2}}\right) \left(\frac{\kappa\sqrt{1-v^2}}{1+\kappa\sqrt{1-v^2}}\right)^{-2\varepsilon} \left[1 + (1-2\varepsilon)\,\frac{1}{1+\kappa\sqrt{1-v^2}}\right] \tag{10}$$

легко выразить в терминах базовых интегралов (см. (16) в [1])

$$E_{TU}(1s) = \frac{\alpha}{\pi}\, \frac{E_F}{2\left[1-(Z\alpha)^2\right] - \sqrt{1-(Z\alpha)^2}} \left\{ \left(I_{121} - \frac{1}{3}\, I_{221}\right) + \frac{1-2\varepsilon}{\kappa} \left(I_{132} - \frac{1}{3}\, I_{232}\right) \right\}. \tag{11}$$

Аналитичность результата определяется фактором (6):

$$(Z\alpha) < \sqrt{3}/2\,, \qquad \text{или} \qquad Z < 118.676... \tag{12}$$

2.2. Двухпотенциальный вклад

Рассмотрим теперь вклад диаграмм на рис. 1*в*. Отличие этого вклада от однопотенциального заключается в наличии кулоновской функции Грина, соединяющей потенциалы. Однако вклад можно переписать в виде некоторого матричного элемента от потенциала Юлинга, рассмотренного нами в [1], по волновой функции, возмущенной магнитным полем. Такая функция найдена явно в [11]. Используя явное выражение для возмущенной волновой функции (см. Приложение), получаем (ср. [1])

$$E_{UT} = \frac{\alpha}{\pi}\, E_T\, R_{UT}(\kappa)\,, \tag{13}$$

где

$$R_{UT}(\kappa) = \int\limits_0^1 dv\, \frac{v^2(1-v^2/3)}{1-v^2}\, \mathcal{R}_{UT}\big(\lambda(v)\big)\,, \tag{14}$$

$$\mathcal{R}_{UT}(\lambda) = \frac{\int\limits_0^\infty \big(f_{1s}\, X_{1s} + g_{1s}\, Y_{1s}\big) \left[(Z\alpha)\, e^{-\lambda r}/r\right] dr}{\int\limits_0^\infty f_{1s}\, g_{1s}\, dr}\,, \tag{15}$$

явные выражения радиальных компонент волновых функций приведены в Приложении.

Не составляет труда вычислить радиальные интегралы в (15) и в результате получить

$$R_{UT}(\kappa) = \frac{3-8\varepsilon+8\varepsilon^2-2\varepsilon^3}{(1-\varepsilon)^2}\, J_{20}(\kappa) - \frac{2}{1-\varepsilon}\, J_{21}(\kappa) + \frac{2(\varepsilon+1)}{1-2\varepsilon}\, J_{10}(\kappa) - 2(1-\varepsilon)\, J_{30}(\kappa)\,, \tag{16}$$

где J-интегралы

$$J_{mn}(\kappa) = \int\limits_0^1 dv\, \frac{v^2(1-v^2/3)}{1-v^2} \left(\frac{\kappa y}{1+\kappa y}\right)^{m-2\varepsilon} \ln^n \frac{\kappa y}{1+\kappa y} \tag{17}$$

выражаются в терминах производных интегралов I_{abc} (см. (16) в [1]) [3]:

$$J_{mn} = \frac{\partial^n}{\partial\mu^n} \left[I_{12\mu} - \frac{1}{3} I_{22\mu}\right]_{\mu=m}. \tag{18}$$

Как и в случае однопотенциального члена, аналитичность по Z определяется условием (12).

3. ПОПРАВКА К СВЕРХТОНКОМУ РАСЩЕПЛЕНИЮ ПРИ $Z\alpha \ll 1$

При больших значениях Z существенную роль играют конечные размеры ядра, поэтому полученные формулы наиболее актуальны в нерелятивистском пределе ($Z\alpha \ll 1$). Начнем рассмотрение с однопотенциального вклада.

3.1. Однопотенциальный вклад

В шредингеровском приближении результат известен аналитически [9]:

$$r_{TU}(\kappa) = \frac{2-\kappa^2+2\,\kappa^4}{3\,\kappa^3}\mathcal{A}(\kappa) - \frac{2}{3\,\kappa^3}\,\frac{\pi}{2} + \frac{6+\kappa^2}{9\,\kappa^2}\,, \tag{19}$$

где

$$\mathcal{A}(\kappa) = \frac{\arccos(\kappa)}{\sqrt{1-\kappa^2}} = \frac{\ln\left(\kappa+\sqrt{\kappa^2-1}\,\right)}{\sqrt{\kappa^2-1}}\,, \tag{20}$$

и аналогично выражению (18) в [1] определено

$$R_{TU}(\kappa) = r_{TU}(\kappa) - 2\,\varepsilon\, p_{TU}(\kappa) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\ . \tag{21}$$

Дальнейшее разложение в нерелятивистском приближении приводит к результату при малых κ:

$$R_{TU} = \frac{3\,\pi}{8}\kappa - \frac{4}{5}\kappa^2 + \frac{5\,\pi}{24}\kappa^3 - \left(\frac{3\,\pi}{8}\ln\frac{\kappa}{2} + \frac{\pi}{32}\right)\kappa\,(Z\alpha)^2\ . \tag{22}$$

Подставляя разложенный нормировочный фактор

$$E_T = E_F\left[1+\frac{3}{2}\,(Z\alpha)^2\right]\,, \tag{23}$$

для электронного атома ($\kappa = Z\alpha$) получаем результат

$$E_{TU} = \frac{\alpha}{\pi}\,E_F\left\{\frac{3\pi}{8}\,(Z\alpha) - \frac{4}{5}\,(Z\alpha)^2 + \left[-\frac{3\,\pi}{8}\,\ln\frac{Z\alpha}{2} + \frac{71\,\pi}{96}\right]\,(Z\alpha)^3\right\}, \tag{24}$$

подтверждающий все известные ранее коэффициенты (см. [4, 6]) и содержащий один новый, обозначаемый C_{30}.

3.2. Двухпотенциальный вклад

В отличие от однопотенциального вклада, для двухпотенциального даже в ведущем нерелятивистском приближении не удается получить достаточно компактное выражение. В частности, не удается существенно упростить интеграл J_{21} [9]:

$$R_{UT}(\kappa) = \pi\,\frac{\kappa^2-2}{2\kappa^3} + \frac{5\kappa^4-8\kappa^2+6}{3\kappa^2(1-\kappa^2)} + \frac{2\kappa^6-3\kappa^4+4\kappa^2-2}{\kappa^3(\kappa^2-1)}\,\mathcal{A}(\kappa) - 2J_{21}\ . \tag{25}$$

В работе [9] также найдены асимптотики данного выражения при больших и малых значениях параметра κ.

Дальнейшее нерелятивистское разложение при малых значениях κ приводит к результату

$$R_{UT}(\kappa) = \frac{3\,\pi}{8}\,\kappa + \left(\frac{214}{225} - \frac{8}{15}\ln(2\kappa)\right)\kappa^2 + \left(-\frac{43\,\pi}{288} + \frac{5\,\pi}{24}\ln\frac{\kappa}{2}\right)\kappa^3 + \left(\frac{23\,\pi}{32} - \frac{3\,\pi}{8}\ln\frac{\kappa}{2}\right)\kappa(Z\alpha)^2\ . \tag{26}$$

В случае электронных атомов, полагая $\kappa = Z\alpha$, находим [12]

$$R_{UT}(\kappa) = \frac{3\,\pi\,(Z\alpha)}{8} + \left(\frac{214}{225} - \frac{8}{15}\ln(2Z\alpha)\right)(Z\alpha)^2 + \left(\frac{41\,\pi}{72} - \frac{\pi}{6}\ln\frac{Z\alpha}{2}\right)(Z\alpha)^3 \tag{27}$$

или

$$E_{UT} = \frac{\alpha}{\pi}E_F\left\{\frac{3\,\pi\,Z\alpha}{8} + \left[\frac{214}{225} - \frac{8}{15}\ln(2Z\alpha)\right](Z\alpha)^2 + \left[\frac{163\,\pi}{144} - \frac{\pi}{6}\ln\frac{Z\alpha}{2}\right](Z\alpha)^3\right\}. \tag{28}$$

Как и в однопотенциальном случае (24), это выражение подтверждает все известные до настоящего времени коэффициенты разложения [4, 6] и, кроме того, представляет результат для одного нового (C_{30}).

4. СВЕРХТОНКОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ В МЮОННЫХ АТОМАХ

4.1. Однопотенциальный вклад

Для нерелятивистских мюонных атомов более актуальна асимптотика при малых значениях $Z\alpha$ и больших κ:

$$R_{TU}(\kappa) = \left\{\frac{2}{3}\ln(2\kappa) + \frac{1}{9}\right\} + \frac{\pi^2}{9}(Z\alpha)^2 + \mathcal{O}\big((Z\alpha)^4\big) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\kappa^2}\right) . \tag{29}$$

В более общем случае можно получить выражение

$$R_{TU}(\kappa) = I_{21} + (1-2\varepsilon)\,\frac{1}{\kappa}\,I_{32}\,, \tag{30}$$

где интегралы I_{bc} определены в (32) в [1]. Один из них (I_{21}) найден в [1] (см. (37)), другой (I_{32}) известен лишь частично:

$$I_{32} = I_{32}^{(1)} + I_{32}^{(2)}\,, \tag{31}$$

где (см. (34) в [1])

$$I_{bc}^{(1)} = \frac{2}{3}\,\kappa^{b-2}\,B_{1-\delta}\big(2-b+c-2\varepsilon,\ b-2\big)\,, \qquad \delta = \frac{1}{1+\kappa} \ll 1 \tag{32}$$

и

$$B_{1-\delta}\big(c-2\varepsilon-1\,,1\big) = \frac{1}{c-2\varepsilon-1} - \frac{1}{\kappa} + \frac{c-2\varepsilon}{2\,\kappa^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\kappa^2}\right) . \tag{33}$$

Второе слагаемое равно

$$I_{3c}^{(2)} = -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right) + \frac{c-2\varepsilon}{6\,\kappa} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\kappa^2}\right), \tag{34}$$

и в итоге находим

$$\frac{1}{\kappa}\,I_{3c} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{c-2\varepsilon-1} - \frac{\pi}{4}\,\frac{1}{\kappa} + \frac{c-2\varepsilon}{2\,\kappa^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\kappa^3}\right) . \tag{35}$$

Окончательно однопотенциальная поправка для сверхтонкого расщепления в мюонном атоме оказывается равной

$$R_{TU}(\kappa) = \left[\frac{2}{3}\,\ln\big(2\kappa\big) + \frac{2}{3}\,[\psi(1) - \psi(1-2\varepsilon)] + \frac{1}{9}\right] + \left[\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\,\varepsilon - \frac{5}{3}\,\varepsilon^2\right]\frac{1}{\kappa^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\kappa^3}\right) . \tag{36}$$

Выражение содержит элементарные функции и ψ-функцию — логарифмическую производную гамма-функции. Результат согласуется с двойной асимптотикой ($Z\alpha \ll 1$ и $\kappa \gg 1$), представленной в (29).

4.2. Двухпотенциальный вклад

Вначале рассмотрим двойной предел $Z\alpha \ll 1$ и $\kappa \gg 1$:

$$R_{UT}(\kappa) = 2\ln(2\kappa) - 3 + \frac{2\,\pi^2}{9} + \left(2\ln(2\kappa) - \frac{4}{3}\psi''(2) - 3 + \frac{4\,\pi^2}{9}\right)(Z\alpha)^2 + \mathcal{O}\big((Z\alpha)^4\big) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\kappa^2}\right) . \tag{37}$$

В более общем случае ($\kappa \gg 1$ при произвольных значениях $Z\alpha$) в выражении появляются производные ψ-функции:

$$R_{UT}(\kappa) = \frac{3-6\varepsilon+4\varepsilon^2-2\varepsilon^3}{(1-\varepsilon)^2(1-2\varepsilon)}\,\left[\frac{2}{3}\ln(2\kappa) + \frac{2}{3}\,[\psi(1) - \psi(1-2\varepsilon)] + \frac{1}{9}\right] + \\ + \left[\frac{4}{3(1-\varepsilon)}\psi'(2-2\varepsilon) - \frac{2}{3}\,\frac{3-\varepsilon}{(1-\varepsilon)(1-2\varepsilon)}\right] + \frac{3-2\varepsilon+\varepsilon^2}{\kappa^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\kappa^3}\right). \tag{38}$$

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Обсудим кратко полученные результаты. В случае обычных (электронных) атомов мы получили разложение при малых значениях $Z\alpha$

$$\Delta E_{hfs} = \frac{\alpha}{\pi} E_F \left\{ \frac{3\pi}{4} Z\alpha + \left[\frac{34}{225} - \frac{8}{15} \ln(2Z\alpha) \right] (Z\alpha)^2 + \left[\frac{539\pi}{288} - \frac{13\pi}{24} \ln \frac{Z\alpha}{2} \right] (Z\alpha)^3 \right\}, \tag{39}$$

которое наряду с известными коэффициентами содержит и один новый. Возможность проводить разложение до произвольного порядка малости оказывается важной как для собственно поляризационной поправки, так и вообще для изучения структуры ряда по параметру $Z\alpha$. Появление квадрата логарифма этого параметра в различных поправках [13, 6] делает точные вычисления предпочтительными. Данный результат наряду с расчетами юлинговской поправки впервые получен в замкнутой аналитической форме в виде явной функции параметра $Z\alpha$.

Не составляет труда получить разложения столь высоких порядков, сколь это необходимо. Например, в четвертом порядке по параметру $Z\alpha$ получаем

$$\Delta E_{TU}^{(4)} = \frac{\alpha}{\pi} E_F (Z\alpha)^4 \left(\frac{4}{5} \ln\left(2Z\alpha\right) - \frac{303}{175} \right)$$

и

$$\Delta E_{UT}^{(4)} = \frac{\alpha}{\pi} E_F (Z\alpha)^4 \left(\frac{8}{15} \ln^2\left(2Z\alpha\right) - \frac{5336}{1575} \ln\left(2Z\alpha\right) + \frac{767881}{165375} - \frac{2\pi^2}{45} \right).$$

Как упоминалось выше, имеются также численные результаты для расчетов данной поправки [7, 8]. Для сравнения прежде всего заметим, что часто при численных и аналитических расчетах в электронных атомах ($\kappa = Z\alpha$) используется несколько другая параметризация результата

$$E_{hfs}(1s) = \frac{\alpha}{\pi} E_F\, F(Z\alpha). \tag{40}$$

В таблице для сравнения приведены результаты для однопотенциального и двухпотенциального вкладов в полное выражение F (см. (11) и (16)), разложений (см. (24) и (28)) и численные результаты. Мы проводим сравнение только с результатами [8] для $Z \le 10$, так как при бóльших Z в данной работе было использовано неточечное ядро, как и при вычислениях в работе [7].

Приведем также найденные выше для мюонных атомов асимптотики

$$\Delta E_{hfs} = \frac{\alpha}{\pi} E_T \left\{ \frac{4 - 10\varepsilon + 9\varepsilon^2 - 4\varepsilon^3}{(1-\varepsilon)^2(1-2\varepsilon)} \left[\frac{2}{3} \ln(2\kappa) + \frac{2}{3} \left[\psi(1) - \psi(1-2\varepsilon)\right] + \frac{1}{9} \right] + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{4}{3(1-\varepsilon)} \psi'(2-2\varepsilon) - \frac{2}{3} \frac{3-\varepsilon}{(1-\varepsilon)(1-2\varepsilon)} \right] + \left(\frac{11}{3} - \frac{17}{3}\varepsilon - \frac{2}{3}\varepsilon^2 \right) \frac{1}{\kappa^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\kappa^3}\right) \right\},$$

Аналитические результаты данной работы и численные результаты работы [8] (обозначенные в [8] как $\boldsymbol{E_{VP}^{ML-Ue}}$ и $\boldsymbol{E_{VP}^{EL-Ue}}$ соответственно)

	Однопотенциальный вклад			Двухпотенциальный вклад		
Z	F_{TU} (11)	$F_{TU}, Z \to 0$ (24)	Численно [8]	F_{UT} (16)	$F_{UT}, Z \to 0$ (28)	Численно [8]
1	0.0085578	0.0085579	0.0085578	0.0087703	0.0087702	0.0087691
3	0.0254869	0.0254877	0.025487	0.0271133	0.0271086	0.027112
5	0.0422566	0.0422619	0.042257	0.0464153	0.0463843	0.046414
7	0.0589599	0.0589771	0.058960	0.0666723	0.0665652	0.066671
10	0.0840724	0.0841284	0.084072	0.0989572	0.0985560	0.098955
25	0.2192738	0.2195350	—	0.3068919	0.2936806	—

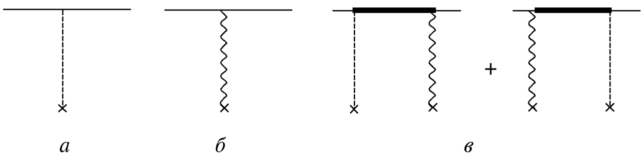

Рис. 2. Скелетные диаграммы

которые при малых значениях заряда ядра приобретают вид

$$\Delta E_{hfs} = \frac{\alpha}{\pi} E_F \left\{ \frac{8}{3}\ln(2\kappa) - \frac{26}{9} + \frac{2\pi^2}{9} + \frac{11}{3\kappa^2} + \right. $$
$$\left. + \left(6\ln(2\kappa) - \frac{4}{3}\psi''(2) - \frac{22}{3} + \frac{8\pi^2}{9} + \frac{103}{24\kappa^2} \right)(Z\alpha)^2 + \mathcal{O}\big((Z\alpha)^4\big) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\kappa^3}\right) \right\},$$

Обе асимптотики содержат большой логарифм $(\ln(2\kappa))$, который может быть найден с использованием бегущей константы связи и известных матричных элементов для скелетных диаграмм (рис. 2) [12], в частности

$$E^{Sc}_{TU}(1s) = E_T(1s) \qquad \text{и} \qquad E^{Sc}_{UT}(1s) = Z\alpha \frac{\partial E_T(1s)}{\partial (Z\alpha)} = \frac{3 - 6\varepsilon + 4\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3}{(1-\varepsilon)^2(1-2\varepsilon)} E_T(1s).$$

Рецепт вычисления логарифмических членов заключается в умножении скелетных матричных элементов на величину

$$\frac{2}{3}\frac{\alpha}{\pi}\ln\frac{\overline{q}_{at}}{m_l},$$

которая возникает из известного выражения для бегущей константы связи (ср. [1]). Характерный атомный импульс равен $\overline{q}_{at} = Z\alpha m = \kappa m_l$. В итоге получаются логарифмические вклады, содержащиеся в (36), (38), что служит еще одним подтверждением этих результатов.

В заключение заметим, что подобные расчеты могут быть проведены для сверхтонкого расщепления любого уровня. Выражение для релятивистской энергии E_T известно [14], как и способ вычисления поправки к волновой функции, возмущенной магнитным полем ядра [15, 11].

Работа выполнена при частичной поддержке программы «Фундаментальная метрология», а также Российского фонда фундаментальных исследований (проект 98-02-18350) и программы «Университеты России. Фундаментальные исследования» (проект 3930).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Возмущение дираковской кулоновской волновой функции магнитным полем ядра

Поправка первого порядка по сверхтонкому взаимодействию к дираковской кулоновской волновой функции может быть найдена аналитически методом обобщенных вириальных соотношений, развитым в [15]. Явное решение для основного состояния в форме удобной для практических вычислений было представлено в [11] (во второй строке уравнения (18) этой статьи следует изменить знак перед $\varepsilon_{n\kappa}$). Ниже мы следуем обозначениям, принятым в [16]. Дираковская волновая функция определяется нами в следующем виде:

$$\Psi_{njlm} = \begin{pmatrix} f_{njl}(r)\,\Omega_{jlm}(\mathbf{n}) \\ -i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})\,g_{njl}(r)\,\Omega_{jlm}(\mathbf{n}) \end{pmatrix}, \tag{П.1}$$

где

$$f_{1s} = 2\sqrt{\frac{(Z\alpha)^3 m^3 (2-\varepsilon)}{\Gamma(3-2\varepsilon)}}\,(2Z\alpha m r)^{-\varepsilon} e^{-Z\alpha m r}, \tag{П.2}$$

$$g_{1s} = -2\sqrt{\frac{(Z\alpha)^5 m^3}{(2-\varepsilon)\Gamma(3-2\varepsilon)}}\,(2Z\alpha m r)^{-\varepsilon} e^{-Z\alpha m r} \tag{П.3}$$

— компоненты чисто кулоновской функции (см. [16]).

Линейная по магнитному моменту ядра поправка к основному состоянию представляет собой сложное выражение, содержащее вклады s- и d-волны. Нас интересует матричный элемент от центрального потенциала (см. (15)), поэтому здесь приводим только первый из этих двух вкладов

$$\left(\delta\Psi_{1,1/2,0,m}\right)^s = -\frac{2}{3}\alpha\,\frac{\mu}{\mu_N}\,\frac{1}{m_p}\,\frac{F(F+1)-I(I+1)-3/4}{2I}\begin{pmatrix} X_{1s}(r)\,\Omega_{1/2,0,m}(\mathbf{n}) \\ -i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})\,Y_{1s}(r)\,\Omega_{1/2,0,m}(\mathbf{n}) \end{pmatrix}, \tag{П.4}$$

где полный момент системы F может принимать значения $I \pm 1/2$, а радиальные компоненты имеют вид [11]

$$X_{1s} = \frac{1}{1-4(1-\varepsilon)^2}\left[\left(\frac{2(Z\alpha)^3 m}{1-\varepsilon} - \frac{3}{r}\right) f_{1s} + \left(3(2-\varepsilon)m - \frac{2Z\alpha}{r}\right) g_{1s} - \frac{2Z\alpha(3-2\varepsilon)m}{r} F_{1s}\right], \tag{П.5}$$

$$Y_{1s} = \frac{1}{1-4(1-\varepsilon)^2}\left[\left(\frac{2(Z\alpha)^3 m}{1-\varepsilon} + \frac{3}{r}\right) g_{1s} + \left(-3\varepsilon\, m + \frac{6Z\alpha}{r}\right) f_{1s} - \frac{2Z\alpha(3-2\varepsilon)m}{r} G_{1s}\right], \tag{П.6}$$

$$F_{1s}(r) = \sqrt{\frac{Z\alpha m(2-\varepsilon)}{\Gamma(3-2\varepsilon)}}\, e^{-Z\alpha m r}\,(2Z\alpha m r)^{1-\varepsilon}\left[\frac{\psi(3-2\varepsilon)}{1-\varepsilon} + 2 - \varepsilon - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2(1-\varepsilon)} - Z\alpha m r - \frac{1}{1-\varepsilon}\ln\Big(2Z\alpha m r\Big)\right], \tag{П.7}$$

$$G_{1s}(r) = -\sqrt{\frac{(Z\alpha)^3 m}{(2-\varepsilon)\Gamma(3-2\varepsilon)}}\, e^{-Z\alpha m r}\,(2Z\alpha m r)^{1-\varepsilon}\left[\frac{\psi(3-2\varepsilon)}{1-\varepsilon} + 2 - \varepsilon + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2(1-\varepsilon)} - Z\alpha m r - \frac{1}{1-\varepsilon}\ln\Big(2Z\alpha m r\Big)\right]. \tag{П.8}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Г. Каршенбойм, ЖЭТФ **116**(11), (1999).
2. S. G. Karshenboim, Can. J. Phys. **76**, 168 (1998).
3. S. G. Karshenboim, V. G. Ivanov, and V. M. Shabaev, Can. J. Phys. **76**, 503 (1998).
4. S. L.Brodsky and G. W. Erickson, Phys. Rev. **148**, 26 (1966).
5. S. M. Schneider, W. Greiner, and G. Soff, Phys. Rev. A **50**, 118 (1994).
6. S. G. Karshenboim, Z. Phys. D **36**, 11 (1996).
7. V. M. Shabaev, M. Tomaselli, T. Kühl, A.N. Artemyev, and V. A. Yerokhin, Phys. Rev. A **56**, 252 (1997).
8. P. Sunnergren, H. Person, S. Salomonson, S. M. Schneider, I. Lindgren, and G. Soff, Phys. Rev. A **58**, 1055 (1998).
9. S. G. Karshenboim, U. Jentschura, G. Soff, and V. G. Ivanov, Euro. J. Phys. D **2**, 209 (1998).
10. G. Breit, Phys. Rev. **35**, 1477 (1930).
11. M. B. Shabaeva and V. M. Shabaev, Phys. Rev. A **52**, 2811 (1995).
12. S. G. Karshenboim, V. G. Ivanov, and V. M. Shabaev, Phys. Scripta **80**, 491 (1999).
13. С. Г. Каршенбойм, ЖЭТФ **103**, 1105 (1993).
14. P. Pyykko, E. Pajanne, and M. Inokuti, Int. J. Quant. Chem. **7**, 785 (1973).
15. V. M. Shabaev, J. Phys. B **24**, 4479 (1991).
16. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1980).