ЖЭТФ, 2000, том 117, вып. 1, стр. 115–121

ДИФРАКЦИОННОЕ ОТРАЖЕНИЕ СВЕТА В ХОЛЕСТЕРИЧЕСКОМ ЖИДКОМ КРИСТАЛЛЕ В ПРИСУТСТВИИ НЕОБРАТИМОСТИ ВОЛН И ФОРМУЛА БРЭГГА—ВУЛЬФА ДЛЯ СРЕД С НЕОДИНАКОВЫМИ ДЛИНАМИ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ВОЛН

О. С. Ерицян* [*]

Ереванский государственный университет
375049, Ереван, Армения

Поступила в редакцию 22 октября 1998 г.

Рассмотрено дифракционное отражение света в холестерическом жидком кристалле в присутствии магнитооптической активности, приводящей к необратимости волн, в частности, к неодинаковости длин прямой и обратной волн. Показано, что формула Брэгга—Вульфа, содержащая одну длину волны, одинаковую для прямой и обратной волн, в рассматриваемой среде должна быть записана с участием двух длин волн. Приведены соотношения, обобщающие формулу Брэгга—Вульфа для сред с неодинаковыми длинами прямой и обратной волн, и рассмотрены примеры применения этих соотношений. Решена граничная задача для слоя холестерического жидкого кристалла.

PACS: 78.20Ek, 78.20Ls, 42.70Df

1. ВВЕДЕНИЕ

Распространение света в холестерических жидких кристаллах (ХЖК), как известно, имеет дифракционный характер [1, 2]. В средах, обладающих право-левой асимметрией пространственной структуры, какими являются естественно гиротропные среды и ХЖК, которые также должны быть отнесены, по определению, к гиротропным [3], в присутствии магнитооптической активности имеет место необратимость волн [4]: поверхность волновых векторов лишена центра симметрии, что приводит к неодинаковости величин, характеризующих свойства среды (фазовая скорость, модули углов поворота плоскости поляризации и кругового дихроизма и др.), соответствующих взаимно противоположным направлениям распространения.

Если рассматривать дифракционное отражение в ХЖК при распространении света вдоль оси среды в присутствии магнитного поля, то последнее индуцирует в среде магнитооптическую активность, что приводит к отмеченной выше необратимости волн. При этом во избежание эффектов искажения структуры, имеющих место под влиянием поля, целесообразен выбор ХЖК с такими модулями Франка K_{22}, K_{33} [2, с. 244], при которых искажение отсутствует до достижения полем некоторого критического значения. В этом случае формула Брэгга—Вульфа

$$2d \sin \varphi = n\lambda$$

теряет смысл, так как имеется не одна длина волны, а две, разные (из-за необратимости волн) для прямого и обратного направлений распространения.

Ниже, в разд. 2, мы рассмотрим дифракционное отражение в ХЖК в условиях необратимости волн и вычислим длины прямой и обратной волн на частотах, совпадающих с границами частотной области дифракционного отражения. Как показывает прямой расчет, длины прямой и обратной волн неодинаковы, и соотношение, выражающее условие усиления волн, отраженных на периодических неоднородностях среды, по своей форме отличается от формулы Брэгга—Вульфа. В соответствии с этим в уравнении Лауэ [5] модули волновых векторов прямой и обратной волн неодинаковы, и диаграмма, геометрически выражающая это уравнение [5], оказывается несимметричной относительно плоскости, перпенди-

[*]E-mail: physdep@moon.yerphi.am

кулярной вектору обратной решетки и делящей последний пополам.

Оказывается, что необратимость волн в смысле отсутствия центра симметрии у поверхности волновых векторов — жесткое условие для изменения вида формулы Брэгга—Вульфа. А именно, такое изменение имеет место также в естественно гиротропной среде в присутствии периодической неоднородности. Неодинаковость длин прямой и обратной волн обусловлена в такой среде разной поляризацией этих волн. Периодически неоднородные естественно гиротропные среды исследуются в разд. 3.

В разд. 4 рассмотрено дифракционное отражение при $k_i \neq k_s$ ($\mathbf{k}_i$ и $\mathbf{k}_s$ — волновые векторы прямой (падающей) и обратной (рассеянной) волн) в случае наклонного к плоскостям слоев распространения без учета в дисперсионном уравнении взаимодействия прямой и обратной волн. Вкратце рассмотрен также случай присутствия внешнего магнитного поля в естественно гиротропной среде.

В разд. 5 приведены результаты для случая прохождения света через слой ХЖК, обладающий необратимостью волн.

2. ДИФРАКЦИОННОЕ ОТРАЖЕНИЕ В МАГНИТОАКТИВНОМ ХЖК И ФОРМУЛА БРЭГГА—ВУЛЬФА

2.1. Дисперсионное уравнение

Рассмотрим распространение света частоты ω вдоль оси ХЖК (ось z) в присутствии внешнего магнитного поля, направленного вдоль этой оси. Пользуясь методом циркулярных компонент [1] или методом перехода в волновом уравнении к компонентам полей, отнесенным к осям x', y', поворачивающимся вместе со структурой [6] (ось x' везде направлена вдоль директора, ось y' перпендикулярна оси x', причем тройка осей x', y', z составляет правовинтовую систему), в обоих случаях приходим к следующему уравнению:

$$\mathcal{K}_g^4 - \left[\frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + 2q^2\right]\mathcal{K}_g^2 - 4q\frac{\omega^2}{c^2}g\mathcal{K}_g + \\ + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1 - q^2\right)\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2 - q^2\right) - \frac{\omega^4}{c^4}g^2 = 0. \quad (1)$$

Здесь $2\pi/\mathcal{K}_g$ — пространственный период поля в локальной системе среды, ε_1 и ε_2 — главные значения тензора диэлектрической проницаемости ХЖК соответственно вдоль осей x' и y', g — z-компонента вектора гирации, направленного вдоль оси z, ответственная за магнитооптическую активность, $q = 2\pi/\sigma$, σ — шаг спирали. Проекции k_{mz} волновых векторов циркулярных компонент поля связаны с корнями уравнения (1) соотношениями

$$k_{mz}^{\pm} = \mathcal{K}_{mg} \pm q, \quad (2)$$

как и в случае отсутствия магнитооптической активности, рассмотренном в [1, 2]: различие заключается в том, что корни уравнения (1) при $g \neq 0$ не совпадают с корнями этого уравнения при $g = 0$.

2.2. Определение границ области дифракционного отражения и величин $\mathcal{K}_{mg}$ на этих границах

Определим теперь границы ω_{1g}, ω_{2g} области дифракционного отражения (индекс g указывает на присутствие магнитооптической активности). Будем считать ε_1, ε_2, g действительными. Вне области дифракционного отражения величины $\mathcal{K}_{mg}$ действительны, а внутри нее обладают мнимой частью, т. е. комплексны. То же относится к $k_{mz}^{\pm}$, так как величина q в (2) действительна. Так как коэффициенты уравнения (1) действительны, то его комплексные корни должны быть комплексно-сопряженными. Поэтому на границах области дифракционного отражения, на которых при выходе из этой области исчезают мнимые части комплексных корней уравнения (1), последние должны быть кратными. (При $g = 0$ границы области дифракционного отражения обычно определяются из требования существования нулевых корней уравнения (1) [1, 2], а последние автоматически оказываются кратными.)

Обозначим кратные корни уравнения (1) при $g = 0$ через $\mathcal{K}_m$. При $g = 0$ имеем $\mathcal{K}_m = 0$ на границах ω_1, ω_2 области дифракционного отражения. Ввиду малости g величины $\mathcal{K}_{mg}$ будут мало отличаться от их значений при $g = 0$, т. е. от нуля. (Магнитооптический поворот плоскости поляризации в полях $\sim 10^4$ Гс в немагнитных диэлектриках в оптической области частот ~ 10 град/см. При длине волны (в вакууме) $\lambda \simeq 5 \cdot 10^{-5}$ см, диэлектрической проницаемости $\varepsilon \sim 5$ получаем $g \sim 10^{-5}$.) Пренебрегая четвертой степенью $\mathcal{K}_g$ в (1), приходим к следующему выражению для $\mathcal{K}_g$:

$$\mathcal{K}_g = \left(-2q\frac{\omega^2}{c^2}g \pm \eta\right)\left[\frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + 2q^2\right]^{-1}, \quad (3)$$

где

$$\eta = \left\{\left[\frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+2q^2\right]\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1 - q^2\right)\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2 - q^2\right) + \\ + \frac{\omega^4}{c^4}g^2\left[2q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\right]\right\}^{1/2}. \quad (4)$$

Корни будут кратные, если $\eta = 0$. Из уравнения $\eta = 0$ определяются границы ω_{1g}, ω_{2g} частотной области дифракционного отражения. С точностью до величин, содержащих g во второй степени, имеем

$$\omega_{1g} = \frac{qc}{\sqrt{\varepsilon_1}} \left[1 + \frac{g^2}{2\varepsilon_1(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\right], \qquad (5)$$

$$\omega_{2g} = \frac{qc}{\sqrt{\varepsilon_2}} \left[1 + \frac{g^2}{2\varepsilon_2(3\varepsilon_2 + \varepsilon_1)}\right]. \qquad (6)$$

Подставляя в (3) $\eta = 0$ и значения частот (5), (6), получаем значения $\mathcal{K}_{1,2g}(\omega_{1g})$, $\mathcal{K}_{1,2g}(\omega_{2g})$ кратных корней, ограничиваясь величинами, содержащими g в первой степени:

$$\mathcal{K}_{1,2g}(\omega_{1g}) = -\frac{2qg}{3\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \qquad (7)$$

на частоте $\omega = \omega_{1g}$ и

$$\mathcal{K}_{1,2g}(\omega_{2g}) = -\frac{2qg}{3\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \qquad (8)$$

на частоте $\omega = \omega_{2g}$. Относительная погрешность определения кратных корней, связанная с пренебрежением $\mathcal{K}_g^4$ в (1), есть величина порядка g^2/ε^2 ($\varepsilon \sim \varepsilon_1 \sim \varepsilon_2$).

2.3. Диаграмма Лауэ и формула Брэгга—Вульфа

Для z-компонент волновых векторов волн с дифрагирующей поляризацией с помощью (2), (7), (8) получаем

$$k_{1z}^{\pm} = k_{2z}^{\pm} = -2qg(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^{-1} \pm q \qquad (9)$$

на частоте ω_{1g} и

$$k_{1z}^{\pm} = k_{2z}^{\pm} = -2qg(3\varepsilon_2 + \varepsilon_1)^{-1} \pm q \qquad (10)$$

на частоте ω_{2g}.

Для конкретности рассмотрим одну из этих частот, скажем $\omega = \omega_{1g}$. Из (9) имеем для z-компоненты волнового вектора прямой волны (распространяющейся в направлении оси z)

$$k_{zi} = -2qg(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + q. \qquad (11)$$

Для обратной волны ($k_{zs} < 0$)

$$k_{zs} = -2qg(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - q. \qquad (12)$$

Согласно (11) и (12), $|k_{zi}| \neq |k_{zs}|$. Поэтому не равны друг другу также длины прямой и обратной волн, λ_i и λ_s:

$$\lambda_{i,s} = \frac{2\pi}{k_{i,s}} = \frac{2\pi}{|k_{zi,s}|} = \frac{\sigma}{1 \pm 2g(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^{-1}}. \qquad (13)$$

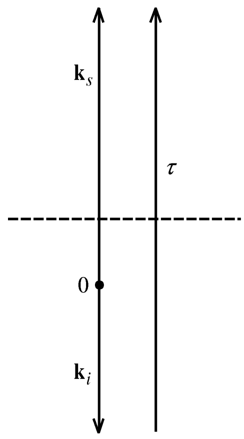


Рис. 1. Диаграмма, описывающая уравнение Лауэ для магнитоактивного ХЖК. Из-за необратимости волн модули волновых векторов прямой и обратной волн (соответственно k_i и k_s) неодинаковы

На рис. 1 представлена диаграмма, описывающая уравнение Лауэ

$$\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i = \boldsymbol{\tau}, \qquad (14)$$

где $\tau = 2\pi n/d$, $d = \sigma/2$ — период неоднородности среды.

Эта диаграмма отличается тем, что модули векторов $\mathbf{k}_i$ и $\mathbf{k}_s$ неодинаковы, поэтому нет симметрии относительно плоскости, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{\tau}$ и делящей последний пополам (эта плоскость отмечена на рисунке штрихами).

Проецируя уравнение Лауэ на направление $\boldsymbol{\tau}$, приходим к соотношению

$$\frac{2\pi}{\lambda_s} + \frac{2\pi}{\lambda_i} = \frac{2\pi}{d}, \qquad (15)$$

которое переходит в формулу Брэгга—Вульфа в своей обычной форме

$$2d \sin\varphi = n\lambda \qquad (16)$$

(в данном случае $n = 1$, $\varphi = \pi/2$) только при $\lambda_i = \lambda_s$.

В следующем разделе рассмотрен пример другой среды, для которой формула Брэгга—Вульфа в обычном виде также неприменима из-за неодинаковости λ_i и λ_s.

3. ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНАЯ ИЗОТРОПНАЯ ЕСТЕСТВЕННО ГИРОТРОПНАЯ СРЕДА

3.1. Материальные уравнения

Будем рассматривать распространение электромагнитной волны частоты ω в среде, описываемой материальными уравнениями

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \frac{1}{2}(\Delta\varepsilon)e^{-i\Omega t}\left[e^{i\tau z} + e^{-i\tau z}\right]\mathbf{E} + \gamma \operatorname{rot}\mathbf{E},$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{H}, \tag{17}$$

где Ω — частота волны, модулирующей диэлектрическую проницаемость среды, $\Delta\varepsilon$ — глубина модуляции, $\tau = 2\pi/d$, d — период неоднородности среды. Уравнения (17) описывают естественно гиротропную изотропную среду [3, 5, 7, 8] с модулированной в пространстве диэлектрической проницаемостью. Модуляция может быть создана, например, плоской ультразвуковой волной. Будем считать, что в волновом уравнении для электромагнитной волны можно пренебречь зависимостью параметров среды от времени, а их временную зависимость учитывать в окончательных результатах. Если в отсутствие пространственной дисперсии ($\gamma = 0$) так можно поступать при $\Omega/\omega \ll 1$ [9], то при $\gamma \neq 0$ следует требовать также

$$\left|\frac{\Omega}{\omega}\Delta\varepsilon\right| \ll \left|\frac{\omega^2}{c^2}\gamma\right|, \tag{18}$$

чтобы было правомерно сохранять γ в волновом уравнении, пренебрегая при этом указанными выше производными по времени. Считая длину ультразвуковой волны порядка длины световой волны (что необходимо для дифракционного отражения т. е. $\Omega/v \sim \omega/c$ (v — скорость механической волны), условие (18) запишем в виде

$$\left|\frac{v}{c\lambda}\Delta\varepsilon\right| \ll \left|\frac{\omega^2}{c^2}\gamma\right|. \tag{19}$$

Обычные значения угла ϑ_0 поворота плоскости поляризации на единице длины пути луча составляют несколько градусов на сантиметр. Считая $\vartheta_0 \simeq 5$ град/см, получаем $|\omega^2\gamma/c^2| \sim 10^{-1}$. Поэтому соотношение (19) сводится к неравенству

$$\left|\frac{\omega}{c}\Delta\varepsilon\right| \ll 0.1,$$

что легко выполнимо.

3.2. Дифракционное отражение

Представим поле монохроматической волны, распространяющейся в среде вдоль оси z, в виде

$$\mathbf{E}(z,t) = \left[\mathbf{E}_0 \exp(ik_{0z}z) + \sum_m \mathbf{E}_m \exp(ik_{mz}z)\right] \times \exp(-i\omega t). \tag{20}$$

Пользуясь уравнениями (17), из волнового уравнения получаем

$$k_{mz} = k_{0z} + m\tau, \quad m = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{21}$$

В двухволновом приближении, учитывающем пространственные компоненты $\mathbf{E}_0 \exp[i(k_{0z}z - \omega t)]$ и $\mathbf{E}_{-1} \exp[i(k_{-1z}z - \omega t)]$, получаем следующее уравнение для k_{0z}:

$$\left[\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0 - k_{0z}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\gamma k_{0z}\right]\left[\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0 - (k_{0z}-\tau)^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\gamma(k_{0z}-\tau)\right] - \frac{\omega^4}{c^4}\frac{(\Delta\varepsilon)^2}{4} = 0. \tag{22}$$

Для определения k_{0z} и k_{-1z} на границах области дифракционного отражения представим k_{0z} в виде

$$k_{0z} = \frac{\tau}{2} + x. \tag{23}$$

Тогда для k_{-1z} будем иметь

$$k_{-1z} = -\frac{\tau}{2} + x. \tag{24}$$

Подставив (23) в (22), приходим к уравнению для x:

$$x^4 - 2\frac{\omega^2}{c^2}\gamma x^3 - \left[2\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0 + \frac{\tau^2}{4}\right) - \frac{\omega^4}{c^4}\gamma^2\right]x^2 + 2\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0 + \frac{\tau^2}{4}\right)\frac{\omega^2}{c^2}\gamma x + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0 - \frac{\tau^2}{4}\right)^2 - \frac{\omega^4}{c^4}\frac{(\Delta\varepsilon)^2}{4} - \frac{\tau^2}{4}\frac{\omega^4}{c^4}\gamma^2 = 0. \tag{25}$$

Пространственная дисперсия приводит в изотропной однородной среде к изменению модулей волновых векторов на величину порядка $\omega^2\gamma/c^2$ [5]. Считая x в (25) величиной такого порядка и пренебрегая x в четвертой и третьей степенях, из (25) получаем

$$x = \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0 + \frac{\tau^2}{4}\right)\frac{\omega^2}{c^2}\gamma \pm \sqrt{u}\right] \times \left[2\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0 + \frac{\tau^2}{4}\right) + \frac{\omega^4}{c^4}\gamma^2\right]^{-1}, \tag{26}$$

$$u = \left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0 + \frac{\tau^2}{4}\right)\frac{\omega^4}{c^4}\gamma^2 + \times \left[2\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0 + \frac{\tau^2}{4}\right) + \frac{\omega^4}{c^4}\gamma^2\right] \times \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0 - \frac{\tau^2}{4}\right)^2 - \frac{\omega^4}{c^4}\frac{(\Delta\varepsilon)^2}{4} - \frac{\tau^2}{4}\frac{\omega^4}{c^4}\gamma^2\right]. \tag{27}$$

Допуская относительную погрешность порядка

$$\frac{\omega^4}{c^4}\gamma^2\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0+\frac{\tau^2}{4}\right)^{-1},$$

из (27) получаем следующее выражение для кратных корней:

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\gamma. \tag{28}$$

Таким образом, согласно (23), (24), (28),

$$k_{0z}=\frac{\tau}{2}+\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\gamma, \quad k_{-1z}=-\frac{\tau}{2}+\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\gamma. \tag{29}$$

Формулы (29) имеют место, когда поляризация волн определяется соотношениями

$$E_{0x}-iE_{0y}=0, \quad E_{-1x}-iE_{-1y}=0 \tag{30}$$

(прямая волна имеет правую круговую поляризацию, обратная — левую). В случае, когда поляризации обеих волн обратные, следует в (29) заменить γ на $-\gamma$.

Согласно (29), длины прямой и обратной волн неодинаковы, поэтому формула Брэгга—Вульфа должна содержать две длины волн, как и в случае ХЖК, обладающего необратимостью волн.

Частотные границы области дифракционного отражения определяются из уравнения $u = 0$ в (27). Допуская относительную погрешность порядка $\tau^2\gamma^2/\Delta\varepsilon$, для указанных границ имеем

$$\frac{\omega_{1,2}}{c}=\frac{\tau}{2}\left(\varepsilon_0\pm\frac{\Delta\varepsilon}{2}\right)^{-1/2}. \tag{31}$$

При получении (31) считалось, что выполняется соотношение

$$\left|\frac{\omega}{c}\gamma\right|\ll\sqrt{2|\Delta\varepsilon|}. \tag{32}$$

4. НАКЛОННОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА. ОБОБЩЕНИЕ ВИДА ФОРМУЛЫ БРЭГГА—ВУЛЬФА

В разд. 2 и 3 мы рассматривали распространение света в направлении, перпендикулярном слоям. При этом мы учитывали взаимодействие прямой и обратной волн. В случае ХЖК это видно из того, что мы исходили из точного дисперсионного уравнения, учитывающего все волны (нами были выделены те его решения, которые соответствуют дифрагирующей поляризации). В случае среды, описываемой уравнениями (17), мы для определения k_{0z} и k_{-1z} получили дисперсионное уравнение с учетом обеих волн с z-компонентами волновых векторов k_{0z} и k_{-1z}. Ниже мы рассмотрим наклонное к слоям распространение, но без учета взаимодействия волн.

4.1. Условие правомерности неучета взаимодействия волн на периодических неоднородностях среды

Неодинаковость длин прямой и обратной волн обусловлена, согласно (29), присутствием пространственной дисперсии, которая дает вклады $\sim\omega^2\gamma/2c^2$ в модули волновых векторов этих волн. Для сохранения эффекта неодинаковости длин волн мы должны сохранить в k_{0z}, k_{-1z} величины $\omega^2\gamma/2c^2$. Выясним, при каком условии правомерно сохранять вклад пространственной дисперсии, не учитывая при этом взаимодействия волн на периодических неоднородностях среды. Подставив в (29) значение $\tau/2$ из (31), получаем

$$k_{0z}=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0}+\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\gamma\pm\frac{\omega}{c}\frac{\Delta\varepsilon}{4\sqrt{\varepsilon_0}} \tag{33}$$

(двум знакам соответствуют две частотные границы области дифракционного отражения). Таким образом, на границах области дифракционного отражения взаимодействие волн приводит к поправке к модулям волнового вектора равной $(\omega/c)\Delta\varepsilon/4\sqrt{\varepsilon_0}$, а пространственная дисперсия — к изменению этих модулей на $\omega^2\gamma/2c^2$. Поэтому при определении длин волн неучет взаимодействия волн правомерен, если

$$\left|\frac{\omega}{c}\gamma\right|\gg\left|\frac{\Delta\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon_0}}\right|. \tag{34}$$

Для света с длиной волны в вакууме $\lambda\simeq 6\cdot 10^{-5}$ см соотношения (32) и (34) при $\omega^2\gamma/c^2\sim\sim 0.1$ дают

$$\left|\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0}\right|\ll 10^{-6}\ll\sqrt{2|\Delta\varepsilon|}. \tag{35}$$

Эти соотношения выполняются, например, при

$$\varepsilon_0\sim 5, \quad \Delta\varepsilon\simeq 5\cdot 10^{-7}.$$

На рис. 2 представлено сечение плоскостью (проходящей через ось z) поверхности волновых векторов для среды (17) без учета периодической неоднородности. Две сферы соответствуют волнам с правой и левой круговой поляризацией; модули волновых векторов для этих волн (т. е. радиусы сфер) равны:

$$k^-=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0}+\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\gamma, \quad k^+=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0}-\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\gamma \tag{36}$$

(верхним индексам «$-$» и «$+$» соответствуют левая и правая круговые поляризации).

4.2. Диаграмма Лауэ

Пусть теперь в среде создана периодическая неоднородность, причем имеет место соотношение

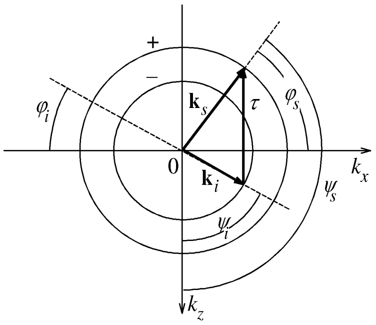


Рис. 2. Диаграмма, описывающая уравнение Лауэ для изотропной естественно гиротропной периодически неоднородной среды. Окружности — линии пересечения поверхности волновых векторов с плоскостью k_x, k_z

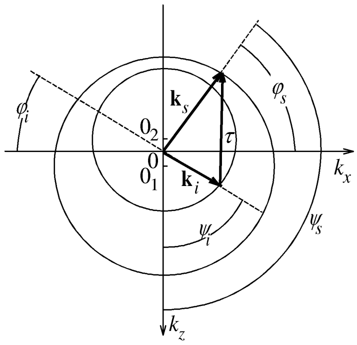


Рис. 3. То же, что и на рис. 2, но для случая присутствия внешнего магнитного поля, которое приводит к необратимости волн

(34). Тогда, допуская относительную погрешность порядка $(\Delta\varepsilon/\varepsilon_0)(\omega\gamma/c)^{-1}$, можно пользоваться выражениями (36) для k^+ и k^-, а диаграмму, геометрически выражающую уравнение Лауэ, построить, считая модули волновых векторов равными радиусам сфер.

На рис. 2 изображена ситуация, удовлетворяющая уравнению Лауэ. Так как в направлении оси x нет неоднородности, то тангенциальные компоненты волновых векторов одинаковы:

$$k_s \cos\varphi_s = k_i \cos\varphi_i. \tag{37}$$

Это соотношение получается также при проектировании уравнения Лауэ на плоскость, перпендикулярную $\boldsymbol{\tau}$. Так как $k_s \neq k_i$, то

$$\varphi_s \neq \varphi_i. \tag{38}$$

Проектируя уравнение Лауэ на направление $\boldsymbol{\tau}$, получаем

$$k_s \sin\varphi_s + k_i \sin\varphi_i = \frac{2\pi}{d}\,n. \tag{39}$$

Это соотношение — фазовое условие усиления волн, рассеянных на периодических неоднородностях среды. Так как $\varphi_i \neq \varphi_s$, то соотношение (39) не сводится к формуле Брэгга—Вульфа в ее обычном виде.

4.3. Случай присутствия магнитного поля

В присутствии магнитного поля, направленного вдоль оси z, в правой части первого из материальных уравнений (17) добавляется член $i[\mathbf{gE}]$, ответственный за возникшую из-за присутствия этого поля магнитооптическую активность. Допуская в модулях волновых векторов относительную погрешность порядка g^2, для модулей k^+ и k^- будем иметь [4, 10]

$$k^{\pm} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0}\left[1 \mp \left(\frac{g}{\varepsilon_0}\cos\psi + \frac{(\omega/c)\gamma}{\sqrt{\varepsilon_0}}\right)\right], \tag{40}$$

где ψ — угол между направлением распространения волны и осью z, вдоль которой приложено внешнее поле.

Формула Брэгга—Вульфа принимает вид ($\sin\varphi_i = \cos\psi_i$, $\cos\varphi_i = \sin\psi_i$, $\sin\varphi_s = -\cos\psi_s$, $\cos\varphi_s = \sin\psi_s$, см. рис. 3)

$$\begin{aligned}
&\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0}\left[1 \mp \frac{1}{2}\left(\frac{g}{\varepsilon_0}\sin\varphi_i + \frac{\omega}{c}\gamma\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}\right)\right]\sin\varphi_i + \\
&\quad + \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0}\left[1 \mp \frac{1}{2}\left(-\frac{g}{\varepsilon_0}\sin\varphi_s + \frac{\omega}{c}\gamma\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}\right)\right] \times \\
&\quad \times \sin\varphi_s = \frac{2\pi}{d}\,n.
\end{aligned} \tag{41}$$

К этой формуле должна быть присоединена формула (заменяющая соотношение $\varphi_s = \varphi_i$, имеющее место при $\lambda_s = \lambda_i$):

$$\begin{aligned}
&\left[1 \mp \frac{1}{2}\left(\frac{g}{\varepsilon_0}\sin\varphi_i + \frac{\omega}{c}\gamma\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}\right)\right]\cos\varphi_i = \\
&= \left[1 \mp \frac{1}{2}\left(-\frac{g}{\varepsilon_0}\sin\varphi_s + \frac{\omega}{c}\gamma\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}\right)\right]\cos\varphi_s.
\end{aligned} \tag{42}$$

Четыре варианта выбора знаков в правой и левой частях выражения (41) соответствуют четырем ситуациям: правой и левой поляризациям рассеянной волны при правой и левой поляризациях падающей волны (то же относится к формуле (42)).

Диаграмма, выражающая уравнение Лауэ, изображена на рис. 3. Заметим, что диаграммы, изображенные на рис. 2 и 3, при нормальном к слоям падении совпадают по своему виду с диаграммой, изображенной на рис. 1 для ХЖК.

4.4. Обобщение вида формулы Брэгга—Вульфа

Формула Брэгга—Вульфа для периодически неоднородной среды, в которой длины прямой и обратной волн неодинаковы, принимает форму

$$\frac{2\pi}{\lambda(\varphi_i)}\sin\varphi_i + \frac{2\pi}{\lambda(\varphi_s)}\sin\varphi_s = \frac{2\pi}{d}\,n, \qquad (43)$$

к которой ввиду присутствия двух углов, φ_i и φ_s, в общем случае не равных друг другу, должна быть присоединена формула

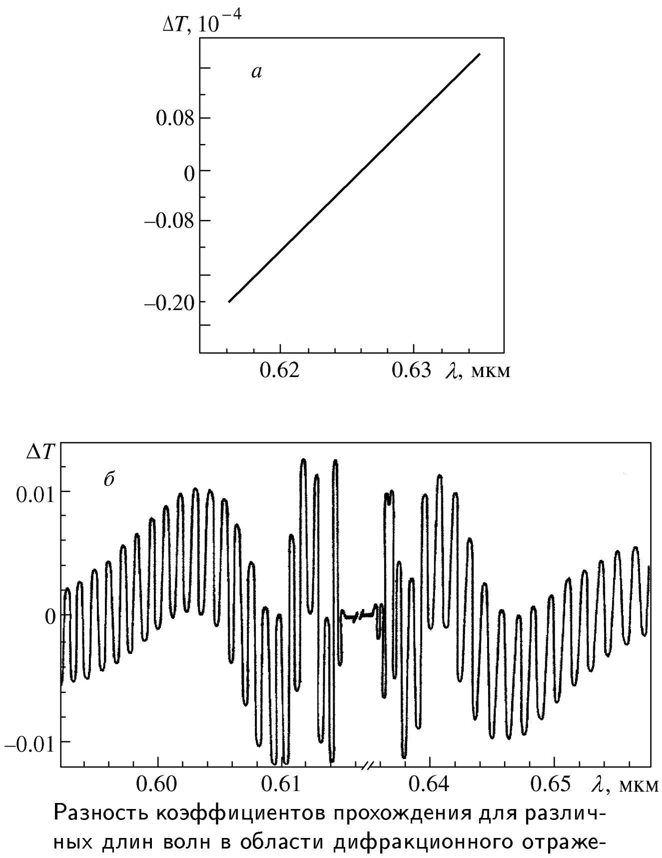
$$\frac{2\pi}{\lambda(\varphi_i)}\cos\varphi_i = \frac{2\pi}{\lambda(\varphi_s)}\cos\varphi_s \qquad (44)$$

(вместо $\varphi_i = \varphi_s$).

Зависимость λ от φ дается дисперсионным уравнением.

5. ПРОХОЖДЕНИЕ СВЕТА ЧЕРЕЗ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ СЛОЙ ХЖК В СЛУЧАЕ НЕОБРАТИМОСТИ ВОЛН

Рассмотрим нормальное прохождение плоскополяризованного света через плоскопараллельный слой ХЖК, обладающий необратимостью волн. При этом будем изучать два варианта: прохождение в двух взаимно противоположных направлениях. На рис. 4*б* приведены результаты расчета разности коэффициентов прохождения для различных длин волн вне области дифракционного отражения, а на рис. 4*а* — то же, но для области дифракционного отражения. По оси ординат отложена разность $\Delta T = T_1 - T_2$, где T_1 — коэффициент прохождения, когда свет падает на слой в направлении оси z, направление которой совпадает с направлением вектора гирации $\mathbf{g}$, перпендикулярного к границам слоя; T_2 — коэффициент прохождения при обратном направлении распространения падающего света. Компоненты тензора диэлектрической проницаемости равны $\varepsilon_1 = 2.290$, $\varepsilon_2 = 2.143$; $g = 10^{-4}$, шаг спирали 0.42 мкм; толщина слоя 200 мкм; границы области дифракционного отражения 615 и 630 мкм. Как следует из рисунков, необратимость волн (неодинаковость длин прямой и обратной волн) привела к неодинаковости коэффициентов T_1 и T_2, соответствующих двум взаимно противоположным направлениям прохождения плоскополяризованного света через слой.



Разность коэффициентов прохождения для различных длин волн в области дифракционного отражения (*а*) и вне ее (*б*)

Выражаю глубокую благодарность А. А. Геворгяну за числовые расчеты на компьютере и обсуждение ряда результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. И. Кац, ЖЭТФ **59**, 1854 (1970).
2. В. А. Беляков, А. С. Сонин, *Оптика холестерических жидких кристаллов*, Наука, Москва (1982).
3. Ф. И. Феодоров, *Теория гиротропии*, Наука и техника, Минск (1976).
4. О. С. Ерицян, УФН **138**, 645 (1982).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
6. C. W. Oseen, Trans. Farad. Soc. **29**, 883 (1933).
7. В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург, *Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов*, Наука, Москва (1979).
8. Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков, Ф. И. Феодоров, Н. А. Хило, Кристаллография **18**, 227 (1973).
9. Л. А. Островский, Б. Н. Степанов, Изв. вузов, Радиофизика **14**, 484 (1971).
10. О. С. Ерицян, *Оптика гиротропных сред и холестерических жидких кристаллов*, Айастан, Ереван, (1988), с. 68.