

КВАНТОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ДВУХМОДОВОМ ЛАЗЕРНОМ ПОЛЕ

Н. Б. Нарожный *, *М. С. Фофанов* **

*Московский государственный инженерно-физический институт
(технический университет)
115409, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 9 июля 1999 г.

Получены вероятности излучения фотона электроном и фоторождения e^+e^- -пары в поле, являющемся суперпозицией двух плоских электромагнитных волн с разными частотами, распространяющихся в одном направлении. Подробно изучен случай соизмеримых частот двух мод. Этот случай интересен прежде всего наличием эффектов, обусловленных интерференцией амплитуд, соответствующих разному числу поглощенных из каждой моды квантов с одинаковым суммарным 4-импульсом. Показано, что оптимальным для наблюдения интерференционных эффектов является случай поля с соотношением частот мод равным трем. Проведено сравнение вероятностей процессов излучения и рождения пары в поле монохроматической плоской волны и в двухмодовом поле, полученном расщеплением исходной волны на две. Показано, что полная вероятность излучения фотона электроном в двухмодовом поле уменьшается, а вероятность рождения пары фотоном растет по сравнению с вероятностями тех же процессов в исходной волне. Увеличение вероятности фоторождения пары объясняется открытием в двухмодовом поле дополнительных каналов реакций, запрещенных в исходном монохроматическом поле.

PACS: 41.60.-m, 12.20.-m, 32.80.Wr, 23.20.Ra

1. ВВЕДЕНИЕ

Процессы излучения фотона электроном и фоторождения пары в сильном одномодовом лазерном поле теоретически хорошо изучены [1] (см. также [2, 3]). Недавно эти эффекты исследовались экспериментально группой МакДональда на ускорителе SLAC [4, 5]. В этой работе мы рассмотрим вероятности тех же процессов в двухмодовом плосковолновом поле.

Под двухмодовым полем мы понимаем суперпозицию двух плоских монохроматических волн с частотами ω_1 и ω_2 , распространяющихся в одном направлении. Особый интерес вызывает двухмодовое поле с соизмеримыми частотами, так как в вероятностях квантовых процессов в таком поле может проявляться интерференция амплитуд, соответствующих разному числу поглощенных из каждой моды квантов с одинаковым суммарным 4-импульсом. Именно эта интерференция ответственна за так на-

зываемую «управляющую асимметрию» в пространственном распределении излучения электрона, сталкивающегося с двухмодовым лазерным полем, состоящим из сильной монохроматической компоненты и слабой компоненты с удвоенной частотой. Она впервые обсуждалась в работе Пунтайер и Лебнера [6] в рамках классической электродинамики. Подобные интерференционные эффекты, возникающие при взаимодействии световых волн в сплошной среде при наличии резонанса между кратными частотами световых волн и частотами электромагнитных переходов среды, были теоретически предсказаны в [7, 8], а затем экспериментально обнаружены в [9].

Попытка квантовоэлектродинамического рассмотрения излучения электрона и фоторождения пары в двухмодовом поле с циркулярно поляризованными составляющими была предпринята в работе [10]. К сожалению, эта работа содержит существенные ошибки, подробный анализ которых, а также правильный ответ для вероятностей рассмотренных процессов содержится в нашей

*E-mail: narozhny@pc1k32.mephi.ru

**E-mail: fofanov@pc1k32.mephi.ru

работе [11].

В настоящей работе мы рассмотрим двухмодовое поле, образованное двумя линейно поляризованными волнами с произвольным углом между плоскостями поляризации и сдвигом фаз. 4-потенциал такого поля может быть записан в виде

$$\begin{aligned} A^\mu &= A_1^\mu(\varphi_1) + A_2^\mu(\varphi_2), \\ A_1^\mu &= a_1^\mu \cos \varphi_1, \quad \varphi_1 = k_1 x, \\ A_2^\mu &= a_2^\mu \cos(\varphi_2 + \varphi), \quad \varphi_2 = k_2 x, \quad \varphi = \text{const}, \\ k_1^2 &= k_2^2 = 0, \quad k_1 a_1 = k_2 a_2 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Волновые 4-векторы мод отличаются множителем ν :

$$k_2 = \nu k_1, \quad (2)$$

который может быть как рациональным (соизмеримые частоты), так и иррациональным числом. Введем безразмерные параметры интенсивностей мод¹⁾

$$\eta_1^2 = -\frac{e^2 a_1^2}{m^2}, \quad \eta_2^2 = -\frac{e^2 a_2^2}{m^2}, \quad \eta_2 = \zeta \eta_1. \quad (3)$$

В дальнейшем нам понадобится также величина

$$\eta^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 = \eta_1^2(1 + \zeta^2), \quad (4)$$

которую можно назвать безразмерным параметром интенсивности двухмодового поля.

На практике двухмодовое поле вида (1) можно получить, сначала расщепляя монохроматический лазерный пучок на два, а затем сводя их вместе, предварительно пропустив один пучок через преобразователь частоты. Именно такую схему с $\nu = 3$ планируется осуществить в следующей серии экспериментов на SLAC²⁾. Если пренебречь потерями в преобразователе, то интенсивность исходной волны η_0^2 связана, как легко видеть, с интенсивностями мод соотношением

$$\eta_0^2 = \eta_1^2 + \nu^2 \eta_2^2. \quad (5)$$

Равенство (5) является существенным для количественного сравнения вероятностей процессов в двухмодовом поле и в поле исходной монохроматической волны. Заметим, что такая схема позволяет добиться постоянства разности фаз между модами лазерного поля.

Вычисление вероятностей квантовых процессов в двухмодовом плосковолновом поле мы будем проводить традиционным методом [1], в котором взаимодействие заряженных частиц с полем излучения

рассматривается по теории возмущений, а учет их взаимодействия с внешним полем осуществляется точно (картина Фарри). Последнее достигается за счет того, что в качестве базиса для расчета амплитуд переходов используются точные решения уравнения Дирака в поле плоской волны, так называемые волковские решения. Для поля, описываемого 4-потенциалом (1), волковские решения могут быть записаны в виде (ср., например, с [12])

$$\begin{aligned} \Psi_p(x) &= \\ &= \left[1 + \frac{e(\gamma k_1)(\gamma a_1)}{2pk_1} \cos \varphi_1 + \frac{e(\gamma k_2)(\gamma a_2)}{2pk_2} \cos(\varphi_2 + \varphi) \right] \times \\ &\times \frac{u_p}{\sqrt{2q_0}} \exp\{-i(qx + R_{1p} + R_{2p} + R_{3p} + R_{4p})\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} R_{1p} &= \frac{e(a_1 p)}{pk_1} \sin \varphi_1 - \frac{e^2 a_1^2}{8pk_1} \sin 2\varphi_1, \\ R_{2p} &= \frac{e(a_2 p)}{pk_2} \sin(\varphi_2 + \varphi) - \frac{e^2 a_2^2}{8pk_2} \sin 2(\varphi_2 + \varphi), \\ R_{3p} &= -\frac{e^2(a_1 a_2)}{2(1 + \nu)pk_1} \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi), \\ R_{4p} &= -\frac{e^2(a_1 a_2)}{2(1 - \nu)pk_1} \sin(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi). \end{aligned} \quad (7)$$

В формуле (6) 4-вектор

$$\begin{aligned} q^\mu &= p^\mu - \frac{e^2 \langle A_1^2 \rangle_1}{2pk_1} k_1^\mu - \frac{e^2 \langle A_2^2 \rangle_2}{2pk_2} k_2^\mu = \\ &= p^\mu - \frac{e^2 a_1^2}{4pk_1} k_1^\mu - \frac{e^2 a_2^2}{4pk_2} k_2^\mu \end{aligned} \quad (8)$$

мы будем называть средним кинетическим 4-импульсом электрона. Отметим, что усреднение для каждого из квадратов 4-потенциалов A_1 и A_2 в (8) проводится по своему периоду. В двухмодовом поле с соизмеримыми частотами, которое является периодическим, 4-вектор q имеет смысл квазиимпульса. Величину m_*

$$m_*^2 = q^2 = m^2 \left(1 + \frac{\eta^2}{2} \right) \quad (9)$$

мы будем называть эффективной массой электрона в двухмодовом поле вне зависимости от того, является это поле периодическим или нет.

2. ИЗЛУЧЕНИЕ ФОТОНА ЭЛЕКТРОНОМ

Элемент S -матрицы, соответствующий процессу излучения фотона с 4-импульсом $k' = (\omega', \mathbf{k}')$ и 4-

¹⁾ Мы используем систему единиц $\hbar = c = 1$.

²⁾ Частное сообщение проф. К. Т. МакДональда.

вектором поляризации e' , дается формулой

$$S_{fi} = -ie \int \bar{\Psi}_{p'}(\gamma e'^*) \Psi_p \frac{\sqrt{4\pi} e^{ik'x}}{\sqrt{2\omega'}} d^4x. \quad (10)$$

С помощью формул (6), (7) легко увидеть, что подынтегральное выражение в (10) является линейной комбинацией величин, составленных из следующих множителей:

$$\cos^n \varphi_1 \exp \{-i(\alpha_1 \sin \varphi_1 - \beta_1 \sin 2\varphi_1)\}, \quad (11)$$

$n = 0, 1, 2,$

$$\cos^n (\varphi_2 + \varphi) \exp \{-i[\alpha_2 \sin (\varphi_2 + \varphi) - \beta_2 \sin 2(\varphi_2 + \varphi)]\}, \quad (12)$$

$n = 0, 1, 2,$

$$\cos^n (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi) \exp \{iz_3 \sin (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi)\}, \quad (13)$$

$n = 0, 1,$

$$\cos^n (\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi) \exp \{iz_4 \sin (\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi)\}, \quad (14)$$

$n = 0, 1.$

Здесь мы использовали обозначения

$$\alpha_i = e \left(\frac{a_i p}{k_i p} - \frac{a_i p'}{k_i p'} \right), \quad (15)$$

$$\beta_i = \frac{e^2 a_i^2}{8} \left(\frac{1}{k_i p} - \frac{1}{k_i p'} \right), \quad i = 1, 2,$$

$$z_{3,4} = \frac{e^2 (a_1 a_2)}{2(1 \pm \nu)} \left(\frac{1}{k_1 p} - \frac{1}{k_1 p'} \right). \quad (16)$$

Каждый из множителей (11)–(14) может быть разложен в ряд Фурье:

$$\begin{aligned} &\cos^n \varphi_1 \exp \{-i(\alpha_1 \sin \varphi_1 - \beta_1 \sin 2\varphi_1)\} = \\ &= \sum_{s_1=-\infty}^{\infty} A_n(s_1 \alpha_1 \beta_1) \exp(-is_1 \varphi_1), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &\cos^n (\varphi_2 + \varphi) \times \\ &\times \exp \{-i[\alpha_2 \sin (\varphi_2 + \varphi) - \beta_2 \sin 2(\varphi_2 + \varphi)]\} = \\ &= \sum_{s_2=-\infty}^{\infty} A_n(s_2 \alpha_2 \beta_2) \exp[-is_2 (\varphi_2 + \varphi)], \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} &\cos^n (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi) \exp \{iz_3 \sin (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi)\} = \\ &= \sum_{s_3=-\infty}^{\infty} \left(\frac{s_3}{z_3} \right)^n J_{s_3}(z_3) \exp[is_3 (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi)], \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} &\cos^n (\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi) \exp \{iz_4 \sin (\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi)\} = \\ &= \sum_{s_4=-\infty}^{\infty} \left(\frac{s_4}{z_4} \right)^n J_{s_4}(z_4) \exp[is_4 (\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi)], \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} A_n(s\alpha\beta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \cos^n \varphi \times \\ &\times \exp(is\varphi - i\alpha \sin \varphi + i\beta \sin 2\varphi) \end{aligned} \quad (21)$$

— функции, подробно изученные Никишовым и Ригусом в связи с процессами, происходящими в поле линейно поляризованной монохроматической волны [1], а $J_s(z)$ — функции Бесселя. Используя соотношения (17)–(20), выражение (10) для матричного элемента S_{fi} можно привести к виду

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} \frac{M_{fi}(s_1, s_2, s_3, s_4)}{\sqrt{8q_0 q'_0 \omega'}} (2\pi)^4 \times \\ &\times \delta^{(4)}(q + (s_1 - s_3 - s_4)k_1 + (s_2 - s_3 + s_4)k_2 - q' - k'), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} M_{fi}(s_1, s_2, s_3, s_4) &= -ie\sqrt{4\pi\bar{u}_{p'}} O(s_1, s_2, s_3, s_4) u_p \times \\ &\times \exp[-i(s_2 - s_3 + s_4)\varphi], \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} O(s_1, s_2, s_3, s_4) &= J_{s_3}(z_3) J_{s_4}(z_4) \times \\ &\times \left\{ \left[(\gamma e'^*) - \frac{e^2(a_1 a_2)}{2(k_1 p)(k_1 p')} (k_1 e'^*) (\gamma k_1) \left(\frac{s_3}{z_3} + \frac{s_4}{z_4} \right) \right] \times \right. \\ &\times A_0(s_1 \alpha_1 \beta_1) A_0(s_2 \alpha_2 \beta_2) + \\ &+ \left[e \left(\frac{(\gamma e'^*) (\gamma k_1) (\gamma a_1)}{2(k_1 p)} + \frac{(\gamma a_1) (\gamma k_1) (\gamma e'^*)}{2(k_1 p')} \right) \times \right. \\ &A_1(s_1 \alpha_1 \beta_1) - \frac{e^2 a_1^2 (k_1 e'^*)}{2(k_1 p)(k_1 p')} (\gamma k_1) A_2(s_1 \alpha_1 \beta_1) \left. \right] \times \\ &\times A_0(s_2 \alpha_2 \beta_2) + A_0(s_1 \alpha_1 \beta_1) \times \\ &\times \left[e \left(\frac{(\gamma e'^*) (\gamma k_2) (\gamma a_2)}{2(k_2 p)} + \frac{(\gamma a_2) (\gamma k_2) (\gamma e'^*)}{2(k_2 p')} \right) \times \right. \\ &\times A_1(s_2 \alpha_2 \beta_2) - \frac{e^2 a_2^2 (k_2 e'^*)}{2(k_2 p)(k_2 p')} (\gamma k_2) A_2(s_2 \alpha_2 \beta_2) \left. \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Если ввести числа

$$n_1 = s_1 - s_3 - s_4, \quad n_2 = s_2 - s_3 + s_4, \quad (25)$$

то выражение (22) можно представить в виде

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \sum_{n_1, n_2=-\infty}^{\infty} \exp(-in_2 \varphi) \frac{\widetilde{M}_{fi}(n_1, n_2)}{\sqrt{8q_0 q'_0 \omega'}} \times \\ &\times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q + n_1 k_1 + n_2 k_2 - q' - k'), \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} &\exp(-in_2 \varphi) \widetilde{M}_{fi}(n_1, n_2) = \\ &= \sum_{s_3, s_4=-\infty}^{\infty} M_{fi}(n_1 + s_3 + s_4, n_2 + s_3 - s_4, s_3, s_4). \end{aligned} \quad (27)$$

Структура закона сохранения в (26) позволяет интерпретировать $\widetilde{M}_{fi}(n_1, n_2)$ как парциальную амплитуду излучения фотона с импульсом k' за счет поглощения n_1 фотонов с импульсом k_1 из первой и n_2 фотонов с импульсом k_2 из второй мод внешнего поля. При этом, из-за того что зависимость от разности фаз между модами поля φ в правой части равенства (27) целиком определяется множителем $\exp(-in_2\varphi)$, амплитуда $\widetilde{M}_{fi}(n_1, n_2)$ описывает процесс излучения в поле с $\varphi = 0$.

Легко видеть, что все кинематические соотношения для процесса излучения фотона электроном в двухмодовом поле сохраняют тот же вид, что и в случае монохроматического поля (см. [1]), если в соответствующих формулах заменить число поглощенных квантов s на $n_1 + \nu n_2$, под частотой ω понимать частоту первой гармоники ω_1 , а под эффективной массой m_* — выражение (9). В частности, в сумме по n_1, n_2 в выражении (26) отличны от нуля только те слагаемые, для которых $n_1 + \nu n_2 > 0$.

Квадрат модуля матричного элемента (26) равен

$$\begin{aligned} \frac{|S_{fi}|^2}{VT} &= \sum_{n_1, n_2, n'_1, n'_2} \theta(n_1 + \nu n_2) \theta(n'_1 + \nu n'_2) \times \\ &\times \frac{\widetilde{M}_{fi}(n_1, n_2) \widetilde{M}_{fi}^*(n'_1, n'_2)}{8q_0 q'_0 \omega'} \exp[i(n'_2 - n_2)\varphi] \times \\ &\times \frac{(2\pi)^8}{VT} \delta^{(4)}[q + (n_1 + \nu n_2)k_1 - q' - k'] \times \\ &\times \delta^{(4)}[q + (n'_1 + \nu n'_2)k_1 - q' - k']. \end{aligned} \quad (28)$$

Очевидно, что для произведения δ -функций в правой части выражения (28) имеет место соотношение

$$\begin{aligned} &\delta^{(4)}[q + (n_1 + \nu n_2)k_1 - q' - k'] \times \\ &\times \delta^{(4)}[q + (n'_1 + \nu n'_2)k_1 - q' - k'] = \frac{VT}{(2\pi)^4} \times \\ &\times \Lambda_{n_1 n_2; n'_1 n'_2} \delta^{(4)}[q + (n_1 + \nu n_2)k_1 - q' - k'], \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\Lambda_{n_1 n_2; n'_1 n'_2} = \begin{cases} \delta_{n_1 n'_1} \delta_{n_2 n'_2}, & \nu - \text{иррациональное,} \\ \delta_{n_1 + \nu n_2, n'_1 + \nu n'_2}, & \nu - \text{рациональное.} \end{cases} \quad (30)$$

Используя соотношение (29), для дифференциальной вероятности излучения в единицу времени, просуммированной по поляризациям конечных частиц и усредненной по поляризациям начального электрона, после стандартных, хотя и довольно громозд-

ких вычислений получим

$$\begin{aligned} dW^e &= \frac{e^2 m^2}{4\pi q_0} \sum_{n_1, n_2, n'_1, n'_2} \theta(n_1 + \nu n_2) \Lambda_{n_1 n_2; n'_1 n'_2} \times \\ &\times \exp[i(n'_2 - n_2)\varphi] w^e(n_1, n_2; n'_1, n'_2) \times \\ &\times \delta^{(4)}(q + n_1 k_1 + n_2 k_2 - q' - k') \frac{d^3 k'}{\omega'} \frac{d^3 q'}{q'_0}, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} w^e(n_1, n_2; n'_1, n'_2) &= \\ &= \sum_{s_3, s_4, s'_3, s'_4} J_{s_3}(z_3) J_{s'_3}(z_3) J_{s_4}(z_4) J_{s'_4}(z_4) \times \\ &\times v^e \begin{pmatrix} n_1 + s_3 + s_4, & n_2 + s_3 - s_4, & s_3, & s_4 \\ n'_1 + s'_3 + s'_4, & n'_2 + s'_3 - s'_4, & s'_3, & s'_4 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (32)$$

Все суммирования в формулах (31), (32) проводятся от $-\infty$ до ∞ и

$$\begin{aligned} v^e \begin{pmatrix} s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \\ s'_1, & s'_2, & s'_3, & s'_4 \end{pmatrix} &= \\ &= - \left[2 + \eta_1^2 \zeta \cos \phi \left(1 + \frac{u^2}{2(1+u)} \right) \right] \times \\ &\times \left(\frac{s_3 + s'_3}{z_3} + \frac{s_4 + s'_4}{z_4} \right) \times \\ &\times A_0(s_1) A_0(s'_1) A_0(s_2) A_0(s'_2) + \eta_1^2 \left(1 + \frac{u^2}{2(1+u)} \right) \times \\ &\times \{ [2A_1(s_1) A_1(s'_1) - A_0(s_1) A_2(s'_1) - A_2(s_1) A_0(s'_1)] \times \\ &\times A_0(s_2) A_0(s'_2) + \zeta^2 A_0(s_1) A_0(s'_1) \times \\ &\times [2A_1(s_2) A_1(s'_2) - A_0(s_2) A_2(s'_2) - A_2(s_2) A_0(s'_2)] + \\ &+ 2\zeta \cos \phi [A_0(s_1) A_1(s'_1) A_1(s_2) A_0(s'_2) + \\ &+ A_1(s_1) A_0(s'_1) A_0(s_2) A_1(s'_2)] \}. \end{aligned} \quad (33)$$

В формуле (33) использованы обозначения

$$\begin{aligned} A_n(s_i) &= A_n(s_i \alpha_i \beta_i), \quad A_n(s'_i) = A_n(s'_i \alpha_i \beta_i), \\ u &= \frac{k_1 k'}{k_1 q'}, \end{aligned} \quad (34)$$

а угол ϕ определен соотношением

$$e^2 a_1 a_2 = -m^2 \eta_1^2 \zeta \cos \phi \quad (35)$$

и, если выбрать калибровку, в которой нулевые компоненты векторов a_i равны нулю, имеет смысл угла между амплитудами электрических векторов двух мод.

Из формул (32), (33) легко видеть, что величины $w^e(n_1, n_2; n'_1, n'_2)$ симметричны относительно перестановки $(n_1, n_2) \leftrightarrow (n'_1, n'_2)$:

$$w^e(n_1, n_2; n'_1, n'_2) = w^e(n'_1, n'_2; n_1, n_2). \quad (36)$$

Выполняя интегрирование в (31) по импульсам конечных частиц так же, как в [1], и переходя к инвариантным переменным u, ψ , где ψ имеет смысл угла между плоскостями $(\mathbf{k}_1 q')$ и $(\mathbf{k}_1 \mathbf{a}_1)$ в системе координат, в которой \mathbf{k}_1 и \mathbf{q} направлены навстречу друг другу, для полной вероятности излучения в единицу времени получим

$$W^e = \frac{e^2 m^2}{4\pi q_0} \sum_{n_1, n_2, n'_1, n'_2} \theta(n_1 + \nu n_2) \Lambda_{n_1 n_2; n'_1 n'_2} \times \exp[i(n'_2 - n_2)\varphi] \int_0^{u_s(\nu)} \frac{du}{(1+u)^2} \times \int_0^{2\pi} d\psi w^e(n_1, n_2; n'_1, n'_2). \quad (37)$$

Здесь

$$u_s(\nu) = 2s \frac{k_1 q}{m_*^2}, \quad s = n_1 + \nu n_2, \quad (38)$$

а параметры функций A_n и аргументы функций Бесселя выражаются через u, ψ следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= z_1 \cos \psi, & \alpha_2 &= z_2 \cos(\psi + \phi), \\ z_1 &= \frac{2s\eta_1}{\sqrt{1 + \eta^2/2}} \sqrt{\frac{u}{u_s(\nu)} \left(1 - \frac{u}{u_s(\nu)}\right)}, \\ z_2 &= \frac{\zeta}{\nu} z_1, \\ \beta_1 &= \frac{s\eta_1^2}{4(1 + \eta^2/2)} \frac{u}{u_s(\nu)}, & \beta_2 &= \frac{\zeta^2}{\nu} \beta_1, \\ z_3 &= 4 \frac{\beta_1 \zeta}{1 + \nu} \cos \phi, & z_4 &= 4 \frac{\beta_1 \zeta}{1 - \nu} \cos \phi. \end{aligned} \quad (39)$$

В случае несоизмеримых частот, как видно из формулы (30), $n_1 = n'_1, n_2 = n'_2$ и выражение (37) в полном соответствии с интерпретацией амплитуды (27) можно рассматривать как сумму парциальных вероятностей излучения за счет поглощения n_1 квантов из первой и n_2 квантов из второй мод.

Если частоты соизмеримы, парциальные вероятности с фиксированными n_1 и n_2 кроме квадратов модулей соответствующих амплитуд содержат бесконечное число слагаемых, обязанных своим появлением интерференции амплитуд, отвечающих различному числу поглощенных из каждой моды квантов n_1, n_2 и n'_1, n'_2 , но одному и тому же суммарному 4-импульсу

$$(n_1 + \nu n_2)k_1 = (n'_1 + \nu n'_2)k_1.$$

Заметим, что зависимость как дифференциальной, так и полной вероятностей излучения от разно-

сти фаз φ между двумя модами полностью определяется присутствующим в формулах (31), (37) фактором $\exp[i(n'_2 - n_2)\varphi]$. Поэтому при несоизмеримых частотах, когда имеет место равенство $n_2 = n'_2$, зависимость от φ исчезает. Когда частоты соизмеримы, вероятности излучения (31), (37) за счет присутствия интерференционных слагаемых зависят от разности фаз между двумя модами внешнего поля. Зависимость полной вероятности от сдвига фаз существенно отличает поле линейно поляризованных мод от циркулярно поляризованного двухмодового поля [11]. В последнем случае из-за отсутствия выделенного направления в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, зависимость от угловой переменной ψ становится тривиальной [11] и интегрирование по ней приводит к исчезновению интерференционных слагаемых, а вместе с ними и зависимости от сдвига фаз φ .

3. ИЗЛУЧЕНИЕ ФОТОНА. СЛУЧАЙ СОИЗМЕРИМЫХ ЧАСТОТ

В этом разделе мы рассмотрим вероятность излучения фотона (37) в случае соизмеримых частот. При этом ν мы будем считать для определенности целым числом большим единицы. Если частоты соизмеримы, то процессы излучения за счет поглощения n_1, n_2 фотонов соответственно из первой и второй мод с $n_1 + \nu n_2 = s = \text{const}$, т. е. с одним и тем же 4-импульсом sk_1 , поглощенным из поля, неразличимы. Поэтому формулу (37) для соизмеримых частот удобно переписать в виде

$$W^e = \sum_{s=1}^{\infty} W_s^e = \frac{e^2 m^2}{4\pi q_0} \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^{u_s(\nu)} \frac{du}{(1+u)^2} \int_0^{2\pi} d\psi \times \sum_{n_2, n'_2=-\infty}^{\infty} \cos[(n_2 - n'_2)\varphi] \times w^e(s - \nu n_2, n_2; s - \nu n'_2, n'_2). \quad (40)$$

Мы воспользовались здесь вещественностью величин w^e и свойством симметрии (36).

В пределе слабого поля $\eta_1 \sim \eta_2 \ll 1$ амплитуды $\widetilde{M}_{fi}(n_1, n_2)$ и величины $w^e(s - \nu n_2, n_2; s - \nu n'_2, n'_2)$ могут быть вычислены в рамках диаграммной техники [1] (см. также [11], где подробно обсуждается применение диаграммной техники к случаю двухмодового поля с циркулярно поляризованными компонентами). Так, например, амплитуде $\widetilde{M}_{fi}(1, 1)$ соответствуют диаграммы, изображенные на рис. 1, где точками отмечены диаграммы, отличающиеся от

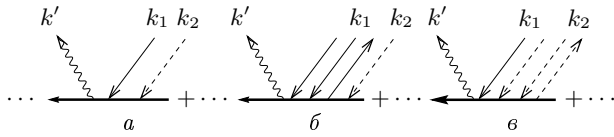


Рис. 1. Диаграммы, соответствующие амплитуде $\widetilde{M}_{fi}(1, 1)$ излучения фотона электроном в двухмодовом поле

приведенных всевозможными перестановками вершин.

Ясно, что в теории возмущений амплитуды $\widetilde{M}_{fi}(n_1, n_2)$ можно представить в виде

$$\widetilde{M}_{fi}(n_1, n_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \widetilde{M}_{fi}^{(m)}(n_1, n_2),$$

где $\widetilde{M}_{fi}^{(0)}$ соответствует диаграммам с поглощением n_1 фотонов из первой и n_2 фотонов из второй мод, а $\widetilde{M}_{fi}^{(m)}$ с $m \geq 1$ описывают те же диаграммы с добавлением m пар фотонов любой моды, причем один фотон из этой пары поглощен из волны, а другой испущен в волну. Например, диаграммам, изображенным на рис. 1а, соответствует амплитуда $\widetilde{M}_{fi}^{(0)}(1, 1)$, совокупность диаграмм рис. 1б, в описывается амплитудой $\widetilde{M}_{fi}^{(1)}(1, 1)$. Очевидно, что для амплитуды $\widetilde{M}_{fi}^{(m)}$ имеем

$$\widetilde{M}_{fi}^{(m)}(n_1, n_2) \sim \eta_1^{|n_1|+|n_2|+2m},$$

соответственно, зависимость от поля величин $w^e(s - \nu n_2, n_2; s - \nu n'_2, n'_2)$ в формуле (40) в рамках теории возмущений будет определяться выражением

$$w^e(s - \nu n_2, n_2; s - \nu n'_2, n'_2) = \sum_{m_1, m_2=0}^{\infty} w_{m_1 m_2}^e \eta_1^{g+2m_1+2m_2}, \quad (41)$$

$$g = |s - \nu n_2| + |n_2| + |s - \nu n'_2| + |n'_2|. \quad (42)$$

В формуле (41) коэффициенты $w_{m_1 m_2}^e$ от поля не зависят, а числам m_1 и m_2 можно придать смысл числа пар фотонов с нулевым суммарным 4-импульсом, принадлежащих, соответственно, первой и второй модам.

В поле монохроматической волны [1] структура вероятности совпадает с (40), если в последней заменить двойную сумму по n_2, n'_2 на одно единственное слагаемое с $n_2 = n'_2 = 0$. Число s в этом случае определяет как 4-импульс sk_1 , поглощенный электроном из поля, так и число поглощенных фотонов.

Парциальная вероятность W_s^e имеет в слабом поле порядок η^{2s} , и максимальный вклад в полную вероятность дает излучение первой гармоники $W_1^e \sim \eta^2$. В двухмодовом поле ситуация другая. Величина W_s^e зависит от числа s немонотонно. Здесь уже две парциальные вероятности W_1^e и W_ν^e имеют одинаковый порядок η^2 . Это очень легко понять, если вспомнить, что число s определяет только 4-импульс, поглощенный из поля, а не число поглощенных фотонов. Так, W_ν^e в основном определяется диаграммами с поглощением одного фотона из второй моды $n_2 = 1, n_1 = s - \nu = 0$, в то время как вклад диаграмм с поглощением ν фотонов из первой моды $n_1 = s = \nu, n_2 = 0$ в соответствии с формулой (41) имеет порядок $\eta_1^{2\nu}$ и определяет малую добавку соответствующего порядка к W_ν^e .

Определим минимальный порядок теории возмущений, в котором проявляются интерференционные эффекты. Это означает (см. формулу (41)), что нам нужно определить минимальное значение числа g (42) при $n_2 \neq n'_2$.

Пусть $g = 4$. Тогда должно выполняться равенство

$$4 = |s - \nu n_2| + |n_2| + |s - \nu n'_2| + |n'_2|. \quad (43)$$

Нетрудно убедиться, что это равенство возможно, только если, во-первых, $n_2, n'_2 \geq 0$ (напомним, что $s \geq 1, \nu \geq 2$) и, во-вторых, $|n_2| + |n'_2| = 1$, т. е. при $n_2 = 0, n'_2 = 1$ или $n_2 = 1, n'_2 = 0$. Для таких значений n_2, n'_2 равенство (43) превращается в соотношение

$$3 = s + |s - \nu|, \quad (44)$$

которое выполняется только при $s \leq \nu$ и только для $\nu = 3$.

Таким образом, значение кратности частот $\nu = 3$ является выделенным. В слабом поле только при $\nu = 3$ интерференционные эффекты присутствуют уже в четвертом порядке теории возмущений. Для $\nu \neq 3$ они проявляются, как минимум, с шестого порядка, т. е. оказываются значительно слабее. В дальнейшем все расчеты мы будем проводить для $\nu = 3$.

В вероятность излучения в слабом поле, вычисленную с точностью до членов порядка η_1^4 включительно, дают вклад первые четыре гармоники. Например, вероятность излучения первой гармоники W_1^e , которая определяется диаграммами, изобра-

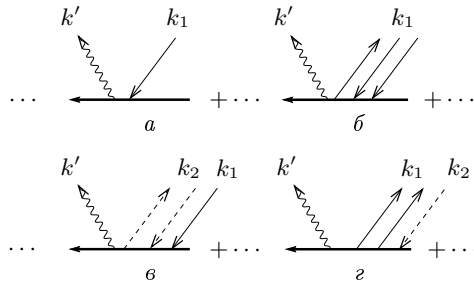


Рис. 2. Диаграммы, определяющие частичную вероятность излучения первой гармоники W_1^e в двухмодовом поле

женными на рис. 2, при $\nu = 3$ равна

$$W_1^e = \frac{e^2 m^2}{4\pi q_0} \int_0^{u_1^{(3)}} \frac{du}{(1+u)^2} \times \int_{-\pi}^{\pi} d\psi \{w^e(1, 0; 1, 0) + 2 \cos \varphi w^e(1, 0; -2, 1)\}, \quad (45)$$

где

$$w^e(1, 0; 1, 0) = w_1^e(1, 0; 1, 0) + w_2^e(1, 0; 1, 0), \quad (46)$$

$$w_1^e(1, 0; 1, 0) = \frac{\eta_1^2}{4} \left\{ 2 + \frac{u^2}{1+u} - \frac{8u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) \times \cos^2 \psi - \frac{\eta_1^2}{4} \frac{u}{u_1} \left[2 + \frac{u^2}{1+u} + 8 \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) \times \left(\frac{u}{u_1} + \frac{u^2}{1+u}\right) \cos^2 \psi - 32 \frac{u}{u_1} \times \left(1 - \frac{u}{u_1}\right)^2 \cos^4 \psi \right] \right\}, \quad (47)$$

$$w_2^e(1, 0; 1, 0) = -\frac{\eta_1^4 \zeta^2}{4} \frac{u}{u_1} \left\{ \frac{1}{9} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) \times \left[\left(4 + 2 \frac{u^2}{1+u}\right) \cos^2(\psi + \phi) + \frac{18u^2}{1+u} \cos^2 \psi - 16 \frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) \cos^2 \psi \cos^2(\psi + \phi) \right] - \frac{1}{8} \left[\left(4 + 2 \frac{u^2}{1+u}\right) \cos^2 \phi - 16 \frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) \times \cos \phi \cos \psi \cos(\psi + \phi) \right] \right\}, \quad (48)$$

$$w^e(1, 0; -2, 1) = \frac{\eta_1^4 \zeta}{4} \frac{u}{u_1} \left\{ \left(4 + 2 \frac{u^2}{1+u}\right) \times \left[\frac{3}{4} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) \cos \psi \left(\cos \psi \cos \phi - \frac{\cos(\psi + \phi)}{3} \right) - \frac{\cos \phi}{16} \right] - 2 \frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) \cos \psi \left[\cos \psi \cos \phi + \frac{\cos(\psi + \phi)}{6} \left(1 + 4 \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) \cos^2 \psi \right) \right] \right\}. \quad (49)$$

Первое слагаемое в правой части формулы (46) $w_1^e(1, 0; 1, 0)$ воспроизводит результат Никишова и Ритуса [1] для случая монохроматической волны с тем отличием, что величина u_1 (38) теперь определяется эффективной массой электрона в двухмодовом поле (9), а не в поле монохроматической волны (следует работе [1], мы определяем u_1 точной формулой (38), что необходимо для правильного описания кинематических особенностей процесса). Это слагаемое определяется совокупностью диаграмм (а) и (б) и одной из диаграмм (в) на рис. 2, которая приводит к «перенормировке» эффективной массы. Второе слагаемое $w_2^e(1, 0; 1, 0)$ определяется интерференцией диаграмм (а) и (в) на рис. 2 и, естественно, отсутствует в случае монохроматической волны. Поэтому оно содержит множитель ζ^2 и зависит от угла ϕ между плоскостями поляризации двух мод.

Интерференционное слагаемое (49) определяется интерференцией диаграмм (а) и (г) на рис. 2. Оно содержит параметр ζ в первой степени, так как диаграммы (г) на рис. 2 содержат только одну линию, соответствующую поглощению фотона из второй моды, и тоже зависит от угла ϕ . При этом при $\phi = \pi/2$, т. е. в случае, если две моды поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях, интерференционное слагаемое не дает вклада в полную вероятность. Отметим, что это обстоятельство никак не связано с теорией возмущений. Здесь мы имеем ситуацию, аналогичную случаю циркулярно поляризованных мод [11].

Интерференционные эффекты могут существенно влиять на величину вероятности излучения. Так, на рис. 3 приведены графики зависимостей от u_1 вкладов в полную вероятность величин $w^{e(4)}(1, 0; 1, 0)$, которая представляет собой слагаемое порядка η_1^4 в $w^e(1, 0; 1, 0)$ (46) и $2w^e(1, 0; -2, 1)$ (49). Из графиков видно, что разность между этими двумя величинами меняет знак при некотором значении $u_1 = u_1^*$ близком к единице. Это означает, в частности, что при разности фаз $\varphi = \pi$ меняется знак поправки порядка η_1^4 к полной вероятности излучения первой гармоники, а при $u_1 = u_1^*$ эта поправка обращается в нуль.

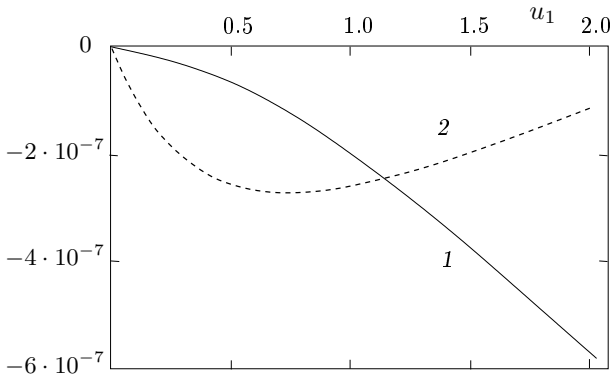


Рис. 3. Зависимость от u_1 вклада в полную вероятность излучения в слабом поле величин $w^{e(4)}(1, 0; 1, 0)$ (1) и $2w^e(1, 0; -2, 1)$ (2) при следующих параметрах: $\eta_0 = 0.5, \zeta = 1.2, \phi = 0$

Заметим, однако, что такой эффект имеет место не при любых значениях параметра ζ , а только при $\zeta > \zeta_* \approx 0.852$. При $\zeta < \zeta_*$ графики на рис. 3 не пересекаются и поправка четвертого порядка к W_1^e всегда отрицательна.

При $\eta \gtrsim 1$, т.е. в отсутствие малого параметра, представление (40) для вероятности излучения становится неудобным для численных расчетов, так как, используя его, приходится учитывать вклад большого числа слагаемых одного порядка в шестикратной сумме для парциальных вероятностей (см. формулы (40), (32)).

Для поля с соизмеримыми частотами мод можно получить более удобную для численных расчетов формулу для вероятности. В этом случае подынтегральное выражение в формуле (10) для матричного элемента излучения является периодической функцией и может быть разложено в однократный ряд Фурье. Далее, действуя по тому же сценарию, который используется в [1], можно получить для вероятности выражение

$$\begin{aligned}
 W^e = & \frac{e^2 m^2}{2\pi q_0} \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^{u_s(\nu)} \frac{du}{(1+u)^2} \int_0^{2\pi} d\psi \times \\
 & \times \left\{ -|A_{00}(s)|^2 + \left(1 + \frac{u^2}{2(1+u)} \right) \times \right. \\
 & \times [\eta_1^2 (|A_{10}(s)|^2 - \text{Re}(A_{00}(s)A_{20}^*(s))) + \\
 & + \eta_1^2 \zeta^2 (|A_{01}(s)|^2 - \text{Re}(A_{00}(s)A_{02}^*(s))) + 2\eta_1^2 \zeta \times \\
 & \left. \times \cos \phi \text{Re}(A_{10}(s)A_{01}^*(s) - A_{00}(s)A_{11}^*(s))] \right\}, \quad (50)
 \end{aligned}$$

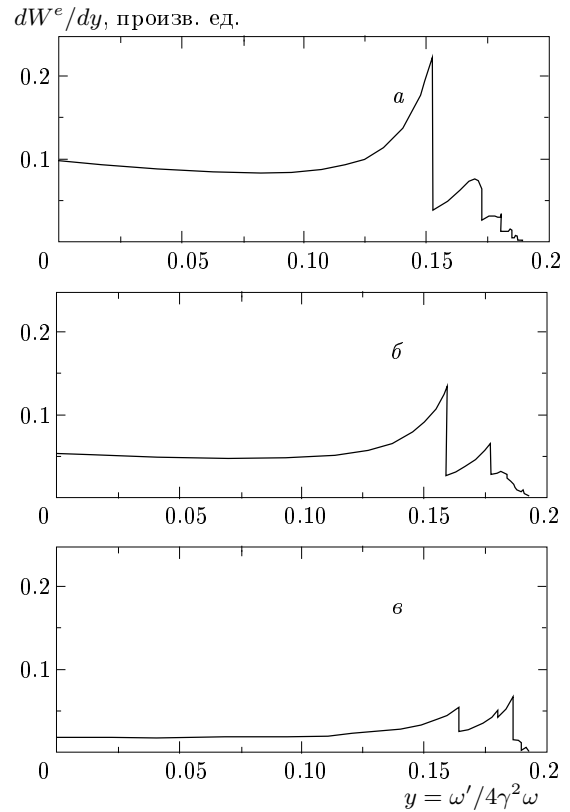


Рис. 4. Спектральное распределение вероятности излучения фотона электроном при различных соотношениях между интенсивностями мод $\zeta = 0$ (а), 0.36 (б), 1 (в) при одинаковой интенсивности исходной монохроматической волны $\eta_0^2 = 1$ и следующих параметрах: $m^2/k_1 p = 0.4, \phi = 0, \varphi = 0$

где функции $A_{km}(s)$ определены соотношением

$$\begin{aligned}
 A_{km}(s) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi_1 \cos^k \varphi_1 \cos^m(\nu\varphi_1 + \varphi) \times \\
 & \times \exp(is\varphi_1 - i\alpha_1 \sin \varphi_1 + i\beta_1 \sin 2\varphi_1 - \\
 & - i\alpha_2 \sin(\nu\varphi_1 + \varphi) + i\beta_2 \sin 2(\nu\varphi_1 + \varphi) + \\
 & + iz_3 \sin(\varphi_1 + \nu\varphi_1 + \varphi) + iz_4 \sin(\varphi_1 - \nu\varphi_1 - \varphi)), \quad (51)
 \end{aligned}$$

а все параметры сохранили свои определения. Ниже во всех численных расчетах при η_1 или $\eta_2 \sim 1$ мы используем представление (50).

На рис. 4 представлены кривые спектрального распределения излучения при различных соотношениях между интенсивностями мод, т.е. при различных значениях параметра $\zeta = \eta_2/\eta_1$, соответствующие одинаковой интенсивности исходной монохроматической волны. Кривая на рис. 4а соответствует значению $\zeta = 0$, т.е. случаю поля монохроматической волны с частотой ω_1 и интенсивностью η_0 .

При этом предполагается, что имеет место «лобовое столкновение» электрона с лазерным полем, т. е. 4-импульс начального электрона \mathbf{q} и волновой 4-вектор поля \mathbf{k}_1 антипараллельны. Спектр излучения, соответствующий s -ой гармонике, имеет резкую границу при частоте $\omega_{\eta_0}^s(0)$ [2], т. е. при частоте фотона, излученного в направлении импульса начального электрона. Эта частота легко может быть найдена из законов сохранения и определяется выражением

$$\omega_{\eta_0}^s(0) = \frac{s\omega q_-^2}{m_*^2 + 2s\omega q_-}, \quad (52)$$

где m_* — эффективная масса электрона в поле монохроматической волны. На рис. 4б, в представлены спектральные распределения излучения в двухмодовом поле соответственно для значений $\zeta = 0.36, 1$. Эти кривые имеют две существенные особенности.

Во-первых, границы всех гармоник на рис. 4б, в сдвинуты вправо по сравнению с соответствующими границами в монохроматической волне. Этот эффект имеет простое объяснение. Действительно, поскольку вид законов сохранения в двухмодовом поле не изменился по сравнению с монохроматическим полем, формула (52) для граничной частоты сохраняет свой вид. Однако под m_* нужно теперь понимать эффективную массу (9) электрона в двухмодовом поле, которая, будучи выражена через интенсивность η_0 исходной волны (см. формулу (5)), может быть записана в виде

$$m_*^2 = m^2 \left(1 + \frac{\eta_0^2}{2} \frac{1 + \zeta^2}{1 + \nu^2 \zeta^2} \right). \quad (53)$$

Значение параметра $\zeta = 0$ соответствует полю исходной монохроматической волны с частотой ω_1 , а $\zeta = \infty$ соответствует случаю, когда исходная волна полностью преобразована в монохроматическую волну с частотой $\omega_2 = \nu\omega_1$. Из формулы (53) легко видеть, что эффективно электрон в двухмодовом поле ($\zeta > 0$) оказывается легче электрона в исходной монохроматической волне, что и объясняет, в соответствии с формулой (52), сдвиг границ гармоник. Очевидно, что этот эффект можно использовать для непосредственного измерения зависимости эффективной массы электрона от напряженности внешнего поля.

Другой важной особенностью кривых на рис. 4 является изменение относительного вклада различных парциальных вероятностей W_s^e в полную вероятность W^e в зависимости от параметра ζ . В частности, при $\zeta = 1, \eta_0 = 1$ параметры интенсивности η_1 и η_2 оказываются равными, и из рис. 4в видно, что основной вклад в полную вероятность при этом

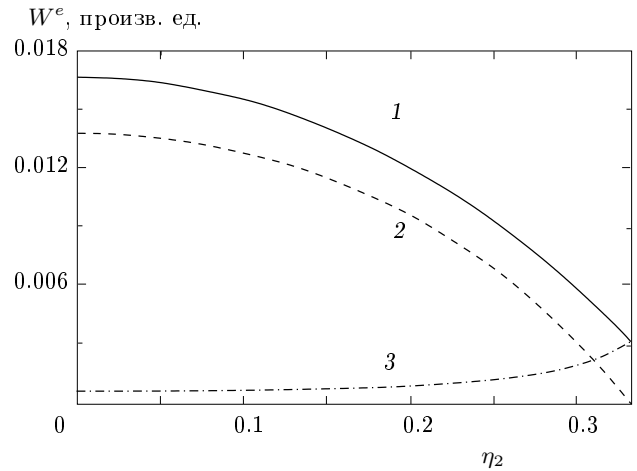


Рис. 5. Зависимость полной вероятности излучения W^e (1) и вкладов в нее парциальных вероятностей W_1^e (2) и W_3^e (3) от распределения интенсивности между модами поля при фиксированной интенсивности исходной монохроматической волны $\eta_0^2 = 1$ и следующих параметрах: $m^2/k_1 p = 0.4, \phi = 0, \varphi = 0$

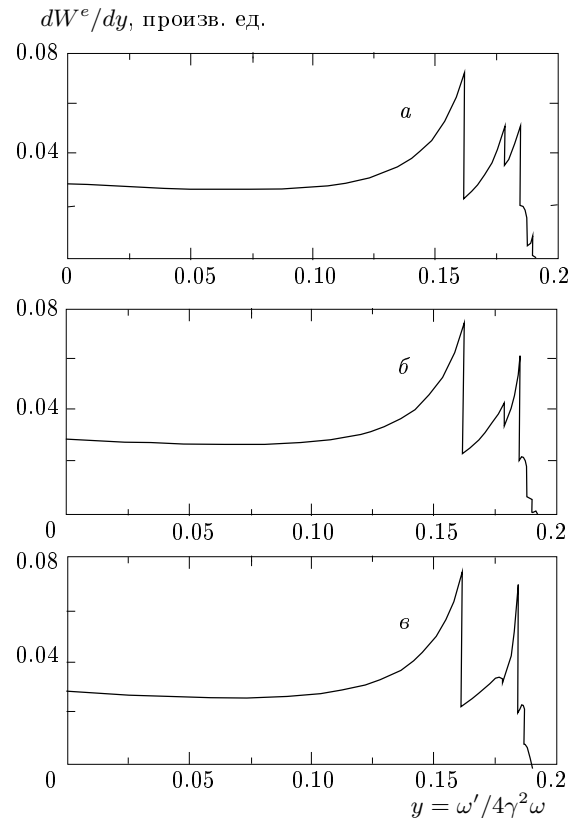


Рис. 6. Спектральное распределение вероятности излучения при различных сдвигах фаз φ между модами поля: $\varphi = 0$ (а), $\pi/2$ (б), π (в) при следующих параметрах: $\eta_0 = 1, m^2/k_1 p = 0.4, \zeta = 0.7, \phi = 0$

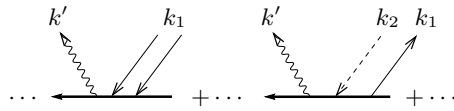


Рис. 7. Диаграммы, отвечающие вкладу второй гармоники $s = 2$ в вероятность излучения фотона электроном в двухмодовом поле

дает парциальная вероятность W_3^e . Отметим, однако, что перераспределение вкладов в полную вероятность парциальных вероятностей W_1^e и W_3^e с ростом ζ происходит на фоне уменьшения полной вероятности. Это наглядно иллюстрируется кривыми рис. 5 и объясняется уменьшением параметра интенсивности η (4) двухмодового поля по сравнению с параметром интенсивности исходной нерасщепленной волны η_0 (5).

На рис. 6 представлены спектральные распределения излучения в двухмодовом поле в зависимости от сдвига фаз φ между модами. Как видно из графиков на рис. 6а, б, в, наиболее сильно эта зависимость проявляется для второй гармоники. В рамках теории возмущений это объясняется тем, что интерференционные и неинтерференционные слагаемые для излучения второй гармоники, которая определяется диаграммами, изображенными на рис. 7, имеют одинаковый порядок величины. Как мы видим, такое соотношение между этими слагаемыми сохраняется и при не слишком малых η_1, η_2 , когда теория возмущений уже неприменима.

4. РОЖДЕНИЕ ПАРЫ ФОТОНОМ

Дифференциальную вероятность образования пары неполяризованным фотоном можно получить, если в формулах (31)–(33) сделать замены $p \rightarrow -p, k' \rightarrow -k', d^3k' \rightarrow d^3q$ и изменить общий знак выражения (31) на обратный (ср. [1]). Интегрируя полученное таким образом выражение по импульсам конечных электрона и позитрона так же, как в работе [1], получим

$$W^\gamma = \frac{e^2 m^2}{8\pi\omega'} \sum_{n_1, n_2, n'_1, n'_2} \theta(n_1 + \nu n_2 - s_0) \times \Lambda_{n_1 n_2; n'_1 n'_2} \exp[i(n'_2 - n_2)\varphi] \times \int_1^{u_s(\nu)} \frac{du}{u\sqrt{u(u-1)}} \int_0^{2\pi} d\psi w^\gamma(n_1, n_2; n'_1, n'_2), \quad (54)$$

где

$$u = \frac{(k_1 k')^2}{4(k_1 q)(k_1 q')}, \quad u_s(\nu) = \frac{s}{s_0}, \quad (55)$$

$$s = n_1 + \nu n_2, \quad s_0 = \frac{2m_*^2}{k_1 k'},$$

а ψ — угол между плоскостями $(\mathbf{k}_1 \mathbf{q}')$ и $(\mathbf{k}_1 \mathbf{a}_1)$ в системе, в которой \mathbf{k} и \mathbf{k}_1 направлены навстречу друг другу. Выражение для $w^\gamma(n_1, n_2; n'_1, n'_2)$ можно получить из $w^e(n_1, n_2; n'_1, n'_2)$, если в формулах (32), (33) сделать замену

$$1 + \frac{u^2}{2(1+u)} \rightarrow 1 - 2u$$

и изменить общий знак на обратный. При этом параметры функций A_n и аргументы функций Бесселя сохраняют свой вид (39).

По сравнению с формулами (31), (37) в выражениях для соответствующих вероятностей рождения пары нужно изменить аргумент θ -функции. Это связано с существованием порога реакции фоторождения пары

$$n_1 + \nu n_2 = \frac{m_*^2 + qq'}{k_1 k'} \geq s_0.$$

Мы будем интересоваться случаем соизмеримых частот, для которых вероятность (54) так же, как и в задаче об излучении, имеет смысл переписать в виде (ср. с формулой (40))

$$W^\gamma = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \theta(s - s_0) W_s^\gamma = \frac{e^2 m^2}{8\pi\omega'} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \theta(s - s_0) \times \int_1^{u_s(\nu)} \frac{du}{u\sqrt{u(u-1)}} \times \int_0^{2\pi} d\psi \sum_{n_2, n'_2=-\infty}^{\infty} \cos[(n_2 - n'_2)\varphi] \times w^\gamma(s - \nu n_2, n_2; s - \nu n'_2, n'_2). \quad (56)$$

По тем же причинам, что и в задаче об излучении, для численных расчетов в случае, если хотя бы один из параметров интенсивностей мод не мал по сравнению с единицей, удобно использовать представление

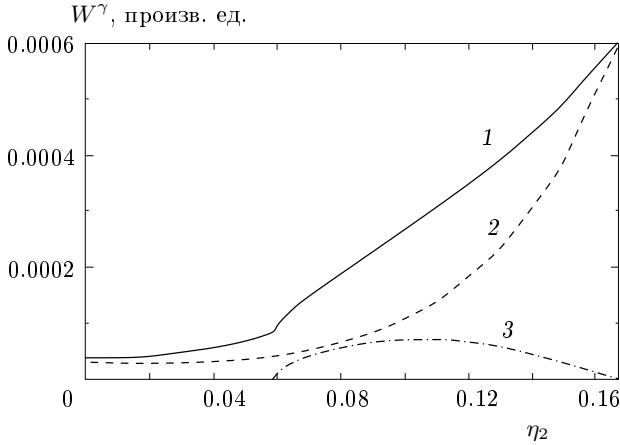


Рис. 8. Зависимость полной вероятности рождения пар в двухмодовом поле W^γ (1) от распределения интенсивности между модами поля при фиксированной интенсивности исходной монохроматической волны $\eta_0^2 = 0.5$ при следующих параметрах: $m^2/k_1k' = 0.9$, $\phi = 0$, $\varphi = 0$. Показан вклад парциальных вероятностей W_3^γ (2) и W_2^γ (3)

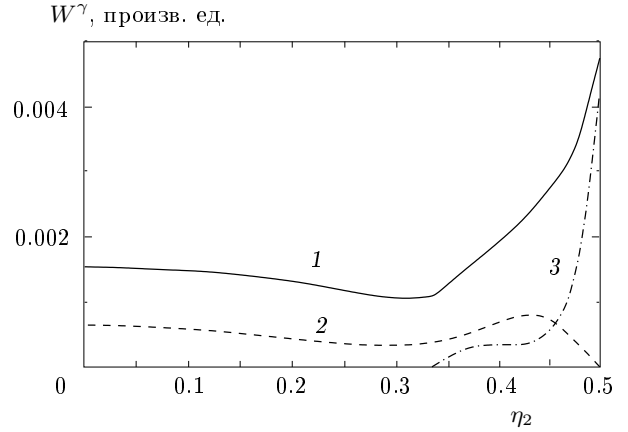


Рис. 9. Зависимость полной вероятности рождения пар в двухмодовом поле W^γ (1) и вклада в нее парциальных вероятностей W_4^γ (2) и W_3^γ (3) от распределения интенсивности между модами поля при фиксированной интенсивности исходной монохроматической волны $\eta_0^2 = 1.5$ при следующих параметрах: $m^2/k_1k' = 0.9$, $\phi = 0$, $\varphi = 0$

для вероятности образования пары в виде однократной суммы по s . Оно имеет вид (ср. с формулой (50))

$$W^\gamma = \frac{e^2 m^2}{4\pi\omega'} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \theta(s-s_0) \int_1^{u_s(\nu)} \frac{du}{u\sqrt{u(u-1)}} \int_0^{2\pi} d\psi \times$$

$$\times \{ |A_{00}(s)|^2 + (2u-1) [\eta_1^2 (|A_{10}(s)|^2 - \text{Re} A_{00}(s)A_{20}^*(s)) + \eta_1^2 \zeta^2 \times$$

$$\times (|A_{01}(s)|^2 - \text{Re}(A_{00}(s)A_{02}^*(s))) + 2\eta_1^2 \zeta \times$$

$$\times \cos \phi \text{Re}(A_{10}(s)A_{01}^*(s) - A_{00}(s)A_{11}^*(s))] \}, \quad (57)$$

где функции $A_{km}(s)$ определены формулой (51), а все параметры — формулами (55), (39).

Из формулы (56) видно, что для процесса рождения пары фотоном в двухмодовом поле с соизмеримыми частотами характерны такие же интерференционные эффекты, как и в задаче об излучении фотона электроном. Поскольку для величин $w^\gamma(n_1, n_2; n'_1, n'_2)$ при условии применимости теории возмущений справедливо представление (41), мы можем заключить, что и в этой задаче для наблюдения интерференционных эффектов оптимальным является отношение частот $\nu = \omega_2/\omega_1$, равное трем, которое мы и использовали во всех дальнейших расчетах. Однако пороговый характер реакции образования пары приводит к ряду интересных особенностей этого процесса.

Рассмотрим зависимости полной вероятности рождения пары от параметра η_2 , изображенные на

рис. 8, 9. Параметры для кривой, изображенной на рис. 8, подобраны так, что пороговое значение числа s в поле исходной монохроматической волны удовлетворяет условию $2 < s_0 < 3$. Это означает, что в поле монохроматической волны при $\eta_0 \lesssim 1$ основной вклад в вероятность дает парциальная вероятность W_3^γ , которая формируется, в основном, за счет процесса с поглощением трех фотонов волны. Если при фиксированном значении параметра η_0 (см. формулу (5)) в поле появилась примесь второй моды, то вклад в W_3^γ начинает давать канал с поглощением одного фотона второй моды. Причем с ростом ζ (или η_2) вклад этого канала растет быстрее, чем убывает вклад канала с поглощением трех фотонов первой моды. К этому добавляется также³⁾ рост парциальной вероятности W_4^γ за счет открывшегося канала с поглощением из поля одного фотона с частотой ω_1 и одного с частотой $\omega_2 = 3\omega_1$. В результате, в отличие от задачи об излучении, наблюдается рост полной вероятности рождения пары при расщеплении исходной монохроматической волны на две составляющие с частотами ω_1 и $\omega_2 = 3\omega_1$.

Подчеркнем, что этот рост происходит на фоне уже упоминавшегося уменьшения параметра интенсивности двухмодового поля η по сравнению с параметром интенсивности η_0 исходной монохроматической волны. Причиной этого эффекта является от-

³⁾ Остальные гармоники дают пренебрежимо малый вклад в полную вероятность.

крытие нового канала при расщеплении волны на две, который до этого был запрещен законами сохранения.

Отметим скачок производной полной вероятности, хорошо видный на рис. 8. Этот скачок объясняется тем, что за счет уменьшения эффективных масс электрона и позитрона с ростом ζ (или η_2) при некотором значении $\zeta = \zeta_{02}$ открывается еще один канал реакции. Значение параметра ζ_{02} определяется уравнением $s_0(\zeta_{02}) = 2$, и при $\zeta \geq \zeta_{02}$ вклад в полную вероятность начинает давать парциальная вероятность W_2^γ .

На рис. 9 представлена зависимость полной вероятности рождения пары для случая, когда в исходном монохроматическом поле пороговое значение s_0 числа s больше 3. Здесь при малых ζ (или η_2) мы наблюдаем вполне объяснимое убывание полной вероятности, поскольку уменьшение параметра интенсивности η по сравнению с η_0 не сопровождается открытием нового канала, дающего существенный вклад в основную гармонику W_4^γ . Рост начинается только со значения η_2 , соответствующего $\zeta = \zeta_{03}$, $s_0(\zeta_{03}) = 3$, при котором открывается канал рождения пары за счет поглощения 4-импульса $3k_1$ из внешнего поля. Разумеется, при $\zeta = \zeta_{03}$ мы наблюдаем скачок производной полной вероятности.

На рис. 10 показаны спектральные распределения вероятности рождения пары фотоном при различных распределениях интенсивности между модами поля. Интенсивность исходной монохроматической волны одинакова для всех распределений $\eta_0^2 = 1$. Так же как и в спектре излучения, с ростом ζ происходит относительное увеличение вклада гармоник с s кратным 3. Однако в задаче излучения этот рост происходит на фоне уменьшения основной гармоники с $s = 1$, и в результате полная вероятность уменьшается. В случае же фоторождения пары из-за существования порога реакции, при выбранных значениях параметров третья гармоника является основной, и ее рост с ростом ζ приводит к увеличению полной вероятности. Отметим, что появление нового локального плато на рис. 10в связано с открытием при $\zeta > \zeta_{02}$ канала фоторождения пары за счет поглощения двух фотонов.

Отметим, что с ростом ζ уменьшаются эффективные массы электрона и позитрона, а вместе с ними и величина s_0 . В результате с ростом ζ происходит увеличение ширин гармоник, которые определяются соотношением [3]

$$(\Delta q_0)_s = \omega' \sqrt{1 - \frac{s_0}{s}}. \quad (58)$$

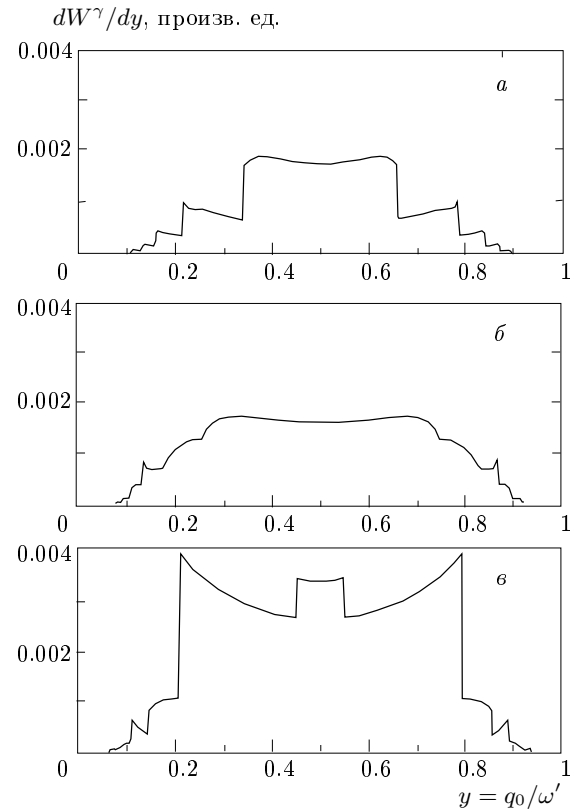


Рис. 10. Спектральное распределение вероятности фоторождения пары при различных соотношениях между интенсивностями мод: $\zeta = 0$ (а), 0.36 (б), 1 (в) при следующих параметрах: $\eta_0 = 1$, $m^2/k_1k' = 0.9$, $\phi = 0$, $\varphi = 0$

Этот эффект также может быть использован для прямого измерения эффективной массы электрона в плосковолновом поле в зависимости от его интенсивности.

Наконец, рис. 11 иллюстрирует влияние интерференционных эффектов на спектральное распределение вероятности рождения пары, выражающееся в зависимости распределения от разности фаз φ между модами. Отметим, что при $\eta_1 \approx \eta_2 < 1$ интерференционные эффекты должны проявляться слабо. Так, если $\eta_0 = 1$, $2 < s_0 < 3$, значение $\zeta = 1$ достигается, если $\eta_1 = \eta_2 \simeq 0.316$. Интерференционные эффекты для основной гармоники $s = 3$ определяются при этом интерференцией каналов с поглощением трех фотонов из моды с частотой ω_1 и одного фотона из моды с частотой $\omega_2 = 3\omega_1$. Соответствующее интерференционное слагаемое имеет порядок η_1^4 , в то время как основное слагаемое $\sim \eta_1^2$. Другими словами, интерференционное слагаемое составляет примерно 10% от основного. Ситуация

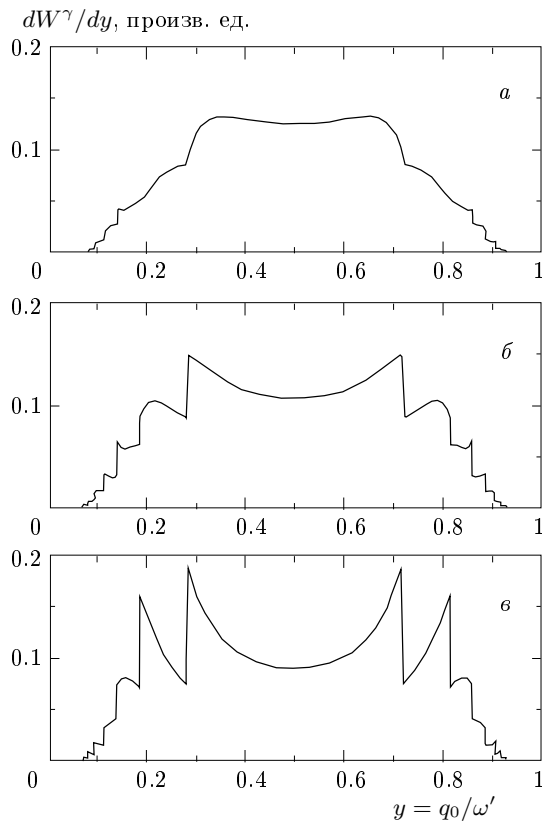


Рис. 11. Спектральное распределение вероятности фоторождения пары при различных сдвигах фаз φ между модами поля: $\varphi = 0$ (а), $\pi/2$ (б), π (в) при следующих параметрах: $s_0 = 2.4$, $m^2/k_1k' = 0.9$, $\zeta = 0.25$, $\phi = 0$

меняется, если мода с утроенной частотой слабая. Например, параметры, соответствующие спектральным распределениям, изображенным на рис. 11, таковы, что $\eta_1 = 0.8$ и $\eta_2 = 0.2$. В этом случае канал с поглощением одного фотона с частотой ω_2 дает малый вклад в полную вероятность, так как определяется малым фактором $\eta_2^2 = 0.04$, в то время как вклад канала с поглощением трех фотонов из моды с частотой ω_1 грубо можно оценить как пропорциональный $\eta_1^6 = 0.26$. Интерференционное же слагаемое оценивается при этом как $\eta_1^3\eta_2 \approx 0.1$, т. е. составляет примерно 40% от основного. Отметим, что подобные оценки можно было бы провести и для задачи излучения. Однако там вклад в полную вероятность дает еще и первая гармоника W_1^e , которая при рассмотренных параметрах интенсивностей мод является определяющей, и ее вклад $\sim \eta_1^2$ заметно превосходит порядок величины ведущего интерференционного слагаемого. В задаче о рождении пары из-за наличия порога реакции канал,

соответствующий поглощению одного фотона с частотой ω_1 , запрещен, что и приводит к заметному проявлению интерференционных эффектов, как видно из рис. 11.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-02-16973) и Министерства образования Российской Федерации (грант № 97-5.2-117).

Один из авторов (Н. Б. Н.) благодарен профессору К. Т. МакДональду за обсуждение некоторых вопросов, рассмотренных в этой статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Ритус, Труды ФИАН **111**, 5 (1979).
2. Н. Б. Нарожный, М. С. Фофанов, ЖЭТФ **110**, 26 (1996).
3. N. B. Narozhnyi and M. S. Fofanov, Laser Phys. **7**, 141 (1997).
4. C. Bula et al., Phys. Rev. Lett. **76**, 3116 (1996).
5. D. L. Burke et al., Phys. Rev. Lett. **79**, 1626 (1997).
6. A. K. Puntajer and C. Leubner, Opt. Commun. **73**, 153 (1989).
7. Э. А. Маныкин, А. М. Афанасьев, ЖЭТФ **48**, 931 (1965).
8. Э. А. Маныкин, А. М. Афанасьев, ЖЭТФ **52**, 1246 (1967).
9. Ce Chen, Yi-Yian Yin, and D. S. Elliott, Phys. Rev. Lett. **64**, 507 (1990).
10. An Yu and H. Takahashi, Phys. Rev. E **57**, 2276 (1998).
11. N. B. Narozhny and M. S. Fofanov, Phys. Rev. E **60**, 3443 (1999).
12. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1989), с. 178.